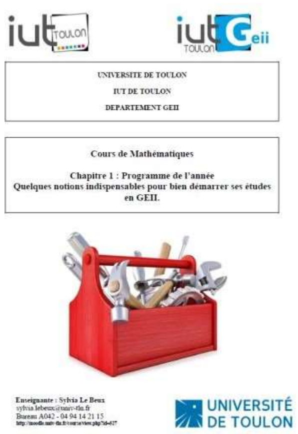
Poursuites d'études 1 : Les EDL du premier ordre – méthode de variation de la constante.

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !

- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…

- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.

- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> : EDLCC.

- Comment résoudre une EDL à coefficients <u>non</u> constants ?

- Qu'est-ce que la méthode de variation de la constante ?

Rappel : Résolution d'une EDLCC du 1er ordre

Chapitre 1 page 34

Théorème : Soit (E), une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : $y'(x) + a.y(x) = f(x)$ (E) (où a est une constante réelle et f est une fonction continue sur I).

Pour résoudre (E) sur I, on procède en deux étapes :

Etape 1 : On résout **l'équation homogène** (ou sans second membre) associée :

$$(E_0) \quad y'(x) + a.y(x) = 0$$

Les solutions de (E_0) sont : $y_0(x) = \lambda . e^{-ax}$ où λ est une constante réelle.

Dém : Vidéo 14 Annexe.

Etape 2 : On recherche **une solution particulière** de (E) $y'(x) + a.y(x) = f(x)$, que l'on note y_p.

Conclusion : Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions de la forme : $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$. Elles sont aussi appelées « solution générale » de (E) et notées y_G

Chapitre 1 page 34

Equation différentielle linéaire à coefficients constants

Résolution Résoudre une l'EDL à coefficients constants :

(E) $\mathbf{a.y'(x) + b.y(x) = f(x)}$ (où $\mathbf{a \neq 0}$, b sont des constantes et f une fonction continue sur I), c'est rechercher toutes les fonctions y(x) solutions dérivables dans I. Pour cela,

Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0) \quad \mathbf{a.y'(x) + b.y(x) = 0}$$

$y' + \frac{b}{a} y = 0$ $\qquad$ $y' + A y = 0 \Leftrightarrow y_0 = \lambda . e^{-Ax}$ $\qquad$ $A = \frac{b}{a}$

Les solutions de (E_0) sont : $y_0(x) = \boldsymbol{\lambda . e^{-\frac{b}{a}x}}$ où λ est une constante réelle.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.

Etape 3 : Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions de la forme : $\mathbf{y(x) = y_0(x) + y_p(x)}$ (on les appelle aussi solutions générales de (E))

4) Recherche d'une solution particulière

Rappel

Dans les cas les plus courants, on cherchera une solution particulière de l'équation $\frac{dy}{dt} + a.y = f(t)$ (E), du même type que la fonction f apparaissant au second membre de (E).

Forme du second membre $t \mapsto f(t)$	Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$
$f(t) = \text{constante}$	$y_p(t) = \text{constante}$
$f(t) = \text{polynôme}$	$y_p(t) = \text{polynôme de même degré}$
$f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$ où α, β et m sont des réels	$y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes.
$f(t) = g(t).e^{m.t}$ où m est un réel.	$y_p(t) = z(t).e^{m.t}$

Vidéo 14, 15 playlist 1°A.

Résolution d'une EDL à coefficients non constants

$ay'(x)+by(x)=f(x)$ $a,b \in \mathbb{R}$

$y_0=\lambda.e^{-\frac{b}{a}x}$ $a \neq 0.$

Equation différentielle linéaire à coefficients non constants

Définition/Théorème Résoudre une l'EDL : (E) $\mathbf{a(x).y'(x)+b(x).y(x)=f(x)}$ (où $\mathbf{a \neq 0}$, b et f sont des fonctions continues sur I), c'est rechercher toutes les fonctions y(x) solutions dérivables dans I. Pour cela,

Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0)\ \mathbf{a(x).y'(x)+b(x).y(x)=0}$$

Les solutions de (E_0) sont : $y_0(x)=\lambda.e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$ où λ est une constante réelle.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.

Etape 3 : Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $\mathbf{y(x)=y_0(x)+y_p(x)}$

Démonstration de l'étape 1 : $a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0 \quad (E_0)$

$(E_0) \iff a\dfrac{dy}{dx} + by = 0$ → "équation à variables séparables"

$\iff a\dfrac{dy}{dx} = -by$

On sépare les variables :

$\iff \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{b}{a}dx$

$\iff \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{b}{a}dx$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\iff \ln|y| + C_1 = -\displaystyle\int \frac{b}{a}dx + C_2$

$\iff \ln|y| = -\displaystyle\int \frac{b}{a}dx + C \; ; C \in \mathbb{R}$

$e^{\ln|y|} = e^{-\int \frac{b}{a}dx + C}$ $\qquad e^{A+B} = e^A . e^B$

$|y| = \underbrace{e^C}_{ct>0} \times \underbrace{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}_{>0}$

On note $e^C = |\lambda|$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$|y(x)| = |\lambda| \times \left| e^{-\int \frac{b}{a}dx} \right|$

$|y(x)| = \left| \lambda . e^{-\int \frac{b}{a}dx} \right|$

$$\boxed{y_0(x) = \lambda . e^{-\int \frac{b}{a}dx} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Résoudre $xy'+1y=1$ (E) sur $]0;+\infty[$. $]-\infty;0[$

$a(x).y'(x)+b(x)y(x)=f(x)$

$\rightarrow$ On résout $xy'+y=0$ $\qquad ay'+by=0 \iff y(x)=\lambda.e^{-\int \frac{b}{a}dx}$

Les solutions sont donc : $y_0(x)=\lambda.e^{-\int \frac{1}{x}dx}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$= \lambda.e^{-\ln|x|}$$

$$= \lambda.e^{\ln|x^{-1}|}$$

$\alpha \ln x = \ln(x^\alpha)$; $x>0$

$y_0(x)=\dfrac{\lambda}{x}$; $x>0$

$\dfrac{\lambda}{-x}$; $x<0$. $\qquad K=-\lambda$; $k\in\mathbb{R}$

$\rightarrow$ On cherche y_p, une solution particulière de (E)

$y_p=1 \Rightarrow y'_p=0 \qquad xy'_p+y_p=1$ $\underline{\underline{ok}}$

$\rightarrow$ Conclusion Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$: $y=y_0+y_p$

$y(x)=\dfrac{\lambda}{x}+1$; $\lambda\in\mathbb{R}$. $\quad x>0$

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = \ln x$; $\underline{x > 0}$ (E)

$\left[\begin{array}{l} ay' + by = 0 \\ y_0 = \lambda . e^{-\int \frac{b}{a} dx} \end{array}\right.$

$a(x) = 1$ et $b(x) = -\frac{1}{x}$

→ On résout $y' - \frac{y}{x} = 0$

les solutions sont : $y_0(x) = \lambda . e^{-\int -\frac{1}{x} dx} = \lambda . e^{\int \frac{1}{x} dx}$

$= \lambda . e^{\ln|x|}$

$= \lambda . e^{\ln(x)}$

$y_0(x) = \lambda . x$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

→ On cherche y_p, une solution particulière de (E).

Méthode de variation de la constante

Résolution d'EDL dont on ne connaît pas de solution particulière **Méthode de variation de la constante** :

On doit résoudre une l'EDL : (E) $a(x).y'(x)+b(x).y(x)=f(x)$, pour cela :

Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0)\ a(x).y'(x)+b(x).y(x)=0$$

Les solutions de (E_0) sont notées : $y_0(x)=\lambda.g(x)$ où λ est une constante réelle.

$= e^{-\int \frac{b}{a}dx}$

Etape 2 : On pose $y(x)=\lambda(x).g(x)$ (la constante λ devient une fonction $\lambda(x)$), et on recherche toutes les fonctions λ telles que y est solution de (E).

Etape 3 : Les solutions de (E) sont toutes les fonctions y(x) obtenues à l'étape 2

EDL $a \neq 0$.

Dém. de la méthode de variation de la Cte : $ay' + by = f \quad (E)$

$\rightarrow$ $ay' + by = 0$ a pour solutions $y_0(x) = \underline{\lambda \cdot g(x)}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ On pose $\lambda = \lambda(x)$ tel que $y(x) = \lambda(x) \cdot g(x)$ est solution de (E)

$$y' = \lambda' g + \lambda g' \leftarrow (U.V)' = U'V + UV'$$

On remplace dans (E) : $\underbrace{a\lambda' g + a\lambda g'}_{ay'} + \underbrace{b\lambda g}_{by} = f$

$$\Longleftrightarrow a\lambda' g + \lambda \underbrace{\cancel{(ag' + bg)}}_{=0} = f$$

$=0$ car λg est solution de $ay' + by = 0$

$$\Longleftrightarrow \lambda' = \frac{f}{a \cdot g} \Longleftrightarrow \lambda = \int \frac{f}{ag}\, dx = H + C \ ; \ C \in \mathbb{R}$$

H : une primitive de $\frac{f}{ag}$.

Alors $y(x) = \underbrace{(H(x) + C)}_{\lambda} \cdot \underbrace{g(x)}_{g} = \underbrace{H(x) \cdot g(x)}_{y_P} + \underbrace{C \cdot g(x)}_{y_0}$ ...

$$y = y_P + y_0$$

Résoudre $1.y' - \frac{y}{x} = \ln x$; $x > 0$

Etape 1 On résout $y' - \frac{y}{x} = 0$ (E_0) ; $x>0$

Les solutions sont :

$$y_0(x) = \lambda . e^{-\int -\frac{1}{x} dx} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \lambda e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$= \lambda . e^{\ln|x|}$$

$$y_0(x) = \lambda . x$$

Etape 2 On applique la méthode de variation de la constante :

On pose $-\frac{1}{x} \times y(x) = \lambda(x) . x$ est solution (E)

$1 \times y' = \lambda' x + \lambda . 1$

On remplace dans (E) : $-\frac{1}{\cancel{x}} \lambda \cancel{x} + \lambda' x + \lambda = \ln x$ "les λ s'en vont"

$\lambda' x = \ln x$

$$\lambda' = \frac{\ln x}{x} \Longleftrightarrow \lambda(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \frac{\ln x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{U'} \cdot \underbrace{\ln x}_{U}$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C \; ; \; C \in \mathbb{R}. \qquad \int U' U^{\alpha}\,dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \quad \alpha \neq -1$$

Les solutions de (E) sont : $y = \lambda . x$

$$y(x) = \underbrace{\frac{1}{2} x . \ln^2 x}_{y_p} + \underbrace{C . x}_{y_0} \; ; \; C \in \mathbb{R} \qquad x > 0$$

Exercices

$$\begin{cases} y' - y.\tan x = 2\sin x \\ y(\pi) = -1 \end{cases}$$

$$y' + x.y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = x^2.\ln x \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad x>0$$

$$\begin{cases} y' - y.\tan x = 2\sin x \\ y(\pi) = -1 \end{cases}$$

avec : $\boxed{x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[}$ $\ni \pi$ $a = 1$; $b = -\tan x$

$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

C.I

→ On résout : $y' - y.\tan x = 0 \quad (E_0)$

Les solutions sont : $y_0(x) = \lambda . e^{-\int -\tan x \, dx}$

$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + cte$

$y_0(x) = \lambda . e^{-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$e^{\alpha \ln x} = e^{\ln x^{\alpha}} = x^{\alpha}$

$= \lambda . e^{-\ln|\cos x|}$

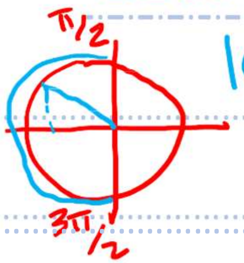
$= \lambda . e^{\ln \frac{1}{|\cos x|}}$

$\cos x < 0 \quad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$

$y_0(x) = \frac{\lambda}{|\cos x|} = \frac{-\lambda}{\cos x}$

On note $C = -\lambda \in \mathbb{R}$.

$y_0(x) = \frac{C}{\cos x}$; $C \in \mathbb{R}$



$|\cos x| = -\cos x$

→ Méthode de variation de la constante :

On pose $C = C(x)$ et on cherche les fonctions C telles que : $y = \frac{C}{\cos x}$ sont solutions de (E).

$-\tan x \times y$

$C \times \frac{1}{\cos x}$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$1 \times y' = \frac{C \sin x}{\cos^2 x} + \frac{C'}{\cos x}$

On remplace dans (E) et on obtient :

$$\underbrace{\frac{C \sin x}{\cos^2 x} + \frac{C'}{\cos x}}_{y'} - \frac{C}{\cos x} . \underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}} = 2.\sin x$$

$$\Longleftrightarrow \frac{c'}{\cos x} = 2\sin x$$

$$\int u'u^{\alpha}\,dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \qquad \alpha \neq -1$$

$$\Longleftrightarrow c' = 2\,\overbrace{\sin x}^{u}.\overbrace{\cos x}^{u'}$$

$$\Longleftrightarrow c = \sin^2 x + k \; ; k \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sont donc : $1 - \cos^2 x$ $\longrightarrow \frac{1}{\cos x} - \cos x + \frac{k}{\cos x}$

$$y(x) = \frac{c(x)}{\cos x} \Longleftrightarrow y(x) = \frac{\overbrace{\sin^2 x}^{1-\cos^2 x}}{\cos x} + \frac{k}{\cos x} \quad (*)$$

$$\Longleftrightarrow y(x) = \underbrace{\sin x . \tan x}_{y_p} + \underbrace{\frac{k}{\cos x}}_{y_0} \qquad x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$$

Condition initiale : $y(\pi) = -1 \Longleftrightarrow \cancel{\underbrace{\sin \pi}_{0} . \tan \pi} + \frac{k}{\underbrace{\cos \pi}_{=-1}} = -1 \Longleftrightarrow k = 1$

La solution est donc : $y(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\cos x}$; $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$

$y' + x.y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (E)

On résout $y' + xy = 0$ (E_0)

les solutions sont : $y_0(x) = \lambda . e^{-\int x dx}$

$y_0(x) = \lambda . e^{-x^2/2}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

On applique la méthode de variation de la constante et on obtient :

$y = \lambda . e^{-x^2/2}$ où λ est une fonction

$y' = \lambda' e^{-x^2/2} - \lambda x e^{-x^2/2}$

On remplace dans (E) : $\lambda' e^{-x^2/2} - \lambda x e^{-x^2/2} + x \lambda e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}$

$\lambda' = 1 \iff \lambda = x + C$; $C \in \mathbb{R}$.

les solutions de (E) sont donc : $y = \lambda . e^{-x^2/2}$

$y(x) = \underbrace{x . e^{-x^2/2}}_{y_P} + \underbrace{C x}_{y_0}$; $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = x^2 . \ln x \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad x>0$$

IPP : $\displaystyle\int_a^b U.V' \, dx = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V \, dx$

choix de U

ALPES

Arcsin

Arccos

...

ln

polynôme

exp

sin, Cos, sh, ch.

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = x^2 . \ln x \ (E) \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad x>0$$

Etape 1 On résout $y' - \frac{y}{x} = 0 \quad (E_0) \quad ; \ x>0$

Les solutions sont :

$$y_0(x) = \lambda . e^{-\int -\frac{1}{x} dx} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \lambda e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$= \lambda . e^{\ln|x|}$$

$$y_0(x) = \lambda . x$$

Etape 2 On applique la méthode de variation de la constante :

On pose $\lambda = \lambda(x)$. On cherche les fonctions λ telles que : $y = \lambda . x$ sont solutions de (E)

$-\frac{1}{x} \times y = \lambda . x$

$1 \times y' = \lambda' x + \lambda$

On remplace dans (E) : $-\lambda + \lambda' x + \lambda = x^2 . \ln x$

$\Leftrightarrow \lambda' x = x^2 . \ln x$

$\Leftrightarrow \lambda' = x . \ln x$ P.L

IPP $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\int u v' dx = [uv] - \int u' v dx$

$$\lambda(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\int x\,dx$$

$$\lambda(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

Les solutions de (E) sont donc : $y = \lambda . x$

$$y(x) = \underbrace{\frac{x^3}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^3}_{y_P} + \underbrace{Cx}_{y_0} \; ; \; C\in\mathbb{R} \; ; \; x>0$$

Condition initiale : $y(1) = 0$

$$y(1) = -\frac{1}{4} + C = 0 \iff C = \frac{1}{4}$$

La solution du problème est donc : $y(x) = \frac{x^3}{4}\left(2\ln x - 1\right) + \frac{1}{4}x$.

Remarque : Ne pourrait-on pas aussi appliquer la méthode de variation de la constante à toute EDL ?

Chapitre 1 page 39

Exemple : $y'+y = x^2 \quad (E)$

Sans la méthode de variation de la Cte :

Etape 1 On résout $y'+y=0 \quad (E_0)$

Les solutions sont : $y_0(x) = \lambda . e^{-x}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Etape 2 On cherche y_p, une solution particulière de (E). On pose $y_p(x) = ax^2+bx+c$

$y_p'(x) = 2ax+b$. On remplace dans (E) et on obtient : $2ax+b+ax^2+bx+c = x^2$

$$ax^2+(2a+b)x+b+c = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \text{ donc } y_p = x^2-2x+2$$

Les solutions de (E) sont donc :

$y = y_0 + y_p \Longleftrightarrow y(x) = \lambda e^{-x} + x^2 - 2x + 2$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Avec la méthode de variation de la Cte :

$y = \lambda . e^{-x}$ $\quad \lambda = \lambda(x)$

$y' = \lambda' . e^{-x} - \lambda . e^{-x}$

$(E) \Longleftrightarrow \lambda' e^{-x} - \cancel{\lambda e^{-x}} + \cancel{\lambda e^{-x}} = x^2$

$\Longleftrightarrow \lambda' = x^2 . e^{+x}$ $\quad u = x^2$

IPP1 P . E ..... $\int x . e^{-x} dx$ IPP2

Remarque : Doit-on toujours appliquer la méthode de variation de la constante à une EDL à coefficients non constants ?

Exemple : $y' + xy = x^2 \quad ; \quad x > 0$

$\rightarrow \quad y' + xy = 0 \iff y_0(x) = \lambda . e^{-\int -x\,dx}$

$\iff y_0(x) = \lambda \int e^{x}\,dx$

$y_0(x) = \lambda e^{x} \; ; \lambda \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ On cherche $y_p(x) = ax^2 + bx + c$

$y'_p = 2ax + b$

On remplace dans (E) :

$y'_p + x y_p = x^2$

$2ax + b \quad + ax^3 + bx^2 + cx = x^2$

$ax^3 + bx^2 + (2a+c)x + b = x^2$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ 2a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Impossible !

Conclusion : 1) Quand est-il recommandé d'appliquer la méthode de variation de la constante ?

EDL à coeff non constants, et on ne connaît pas y_p

EDLCC $ay' + by = f$ n'est ni une cte
ni polynôme
ni sinusoïdale
ni $z \cdot e^{\cdots}$

2) Quand n'est-il pas recommandé d'appliquer la méthode de variation de la constante ?

EDLCC $ay' + by = f$ → cte
→ polynôme
→ $\alpha \cos \cdots + \beta \sin \cdots$
→ $z \cdot e^{\cdots}$