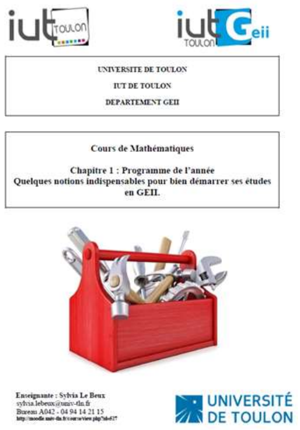
Annexe TD sem45 – Trigonométrie et complexes suite et fin.

- Consignes à suivre pour les TD à distance :



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance :

- Supplément, hors programme DS en vidéo annexe : Exercice 6 page 20, Exercice 6 page 28 et fin de l'exercice 2 page 28.

Exercice 6 Etudier la dernière partie de la page 19, puis déterminer:

$-\pi/4$; 0 ; 189 ; $\pi/3$; $\frac{\pi}{20}$

Arctan(-1) ; Arctan(0) ; tan(Arctan189) ; Arctan$\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; Arctan$\left(\tan\frac{\pi}{20}\right)$;

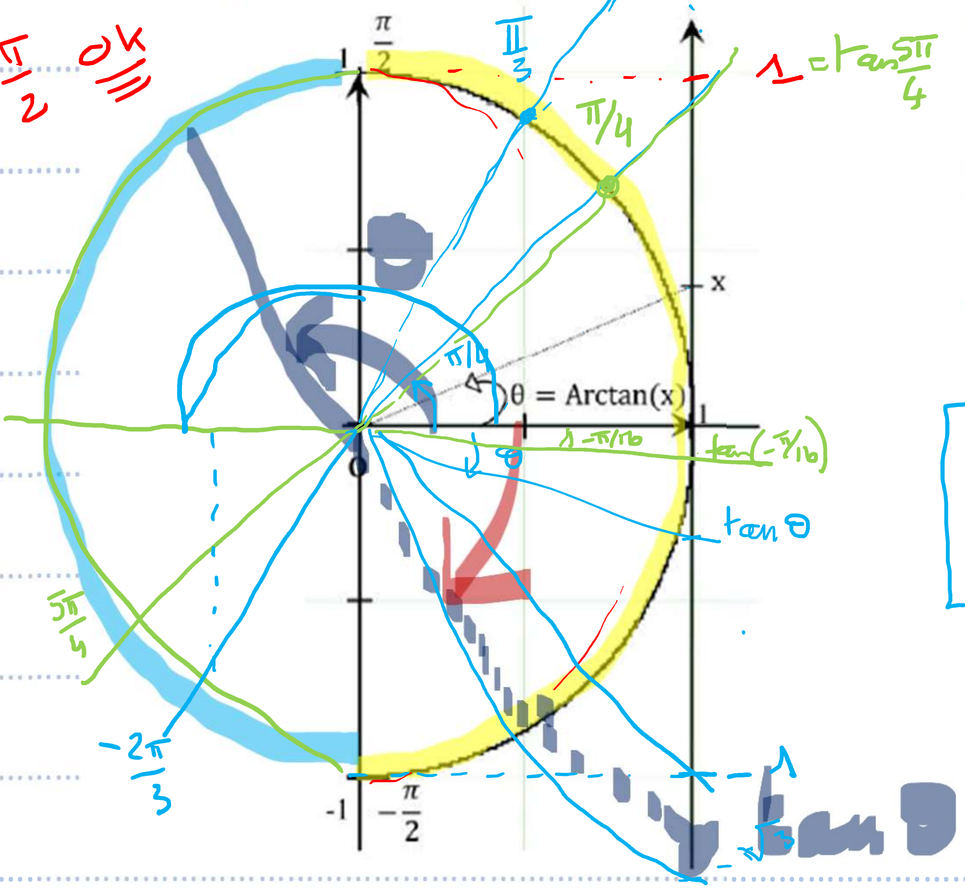
$\forall\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ $\quad \operatorname{Arc}\tan(\tan(\theta)) = \theta - \pi$ $\in \left]-\pi/2 ; \pi/2\right[$

Car : $+\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

alors $-\frac{\pi}{2} < \theta - \pi < \frac{\pi}{2}$ ok

Chapitre 1 page 19 & 20

Arctangente



Soit x∈ ℝ, on appelle Arctangente de x et on note Arctan(x), l'unique angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ solution de l'équation : tan(θ) = x .

$\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbf{tan(Arctan(x)) = x}$

$\forall \boldsymbol{\theta} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $\mathbf{Arctan(tan(\theta)) = \theta}$

tan(Arctan112)=112 ; $\operatorname{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{-\pi}{16}\right)\right) = -\frac{\pi}{16}$ $\in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 6 Résolution d'équations du second degré :

1) Rappel : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$:
pour résoudre $P(x) = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, P possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, P possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Résoudre l'équation $1 + z + z^2 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$z_1 = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \frac{-1-j\sqrt{3}}{2}$

2) Si a, b et c sont des nombres complexes : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c complexes et $a \neq 0$: pour résoudre $P(x) = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est un nombre complexe. On cherche alors les racines carrées de Δ, par définition, ce sont les deux solutions δ_1 et δ_2 de l'équation : $\delta^2 = \Delta$

P possède alors deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\delta_1}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\delta_1}{2a}$

$$z_1 = \frac{-2-2j+2-2j}{2} = -2j$$

$$z_2 = \frac{-2-2j-2+2j}{2} = -2$$

a) Résoudre l'équation : $\overset{a}{1}z^2 + \overbrace{2(1+j)}^{b}z + \overbrace{4j}^{c} = 0$

b) Résoudre l'équation : $\underset{a}{1}z^2 + \underbrace{(2-j)}_{b}z \underbrace{-2j}_{c} = 0$

a) $\Delta = b^2 - 4ac = [2(1+j)]^2 - 4.1.4j = 4(1+j)^2 - 16j = 4(1+2j+j^2) - 16j$

$\Delta = -8j$

On résoudre $\delta^2 = -8j$

$\delta^2 = 8e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\quad\quad \delta^2 = 3$

$\delta = \pm\left(8.e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2}$ $\quad\quad \delta = \pm\sqrt{3}$ $\quad\quad \sqrt{x} = x^{1/2}$

$\delta = \pm\sqrt{8}.e^{-j\pi/4} = \pm\left(\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \pm(2-2j) = 2-2j$ et $-2+2j$

b) Résoudre l'équation : $z^2 + (2 - j)z - 2j = 0$

$$\Delta = (2-j)^2 - 4(-2j) = 4 - 4j + \underbrace{j^2}_{-1} + 8j = 3 + 4j$$

On résoudre $\delta^2 = \Delta = 3+4j$

On pose $\delta = a + jb$ et on résout :

$(a+jb)^2 = 3+4j \Leftarrow |(a+jb)^2| = |3+4j| \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$

$|a+jb|^2$

$a^2 + 2ajb + (jb)^2 = 3+4j$

$a^2 + j2ab - b^2 = 3+4j$

$a^2 - b^2 + j2ab = 3+4j \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 5 & (3) \\ a^2 - b^2 = 3 & (1) \\ 2ab = 4 & (2) \end{cases}$

Méth 2 // (3) + (1) $\Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$

(2) $ab = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 1 \\ a = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$

$\delta_1 = 2+j$ et $\delta_2 = -2-j$ sont les racines carrées de $3+4j$

$$z_1 = \frac{-2+j+2+j}{2} = j$$

$$z_2 = \frac{-2+j-2-j}{2} = -2$$