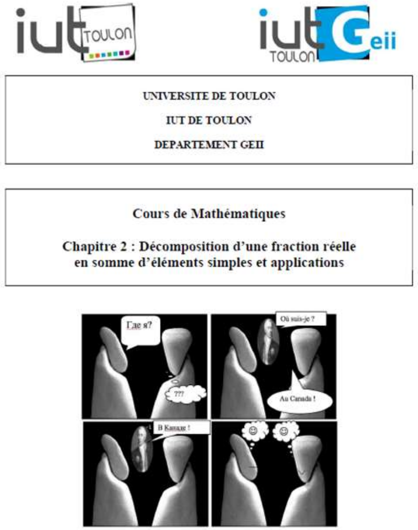
Sem 47 : Amphi 7 – Les polynômes

- Consignes à suivre pour les TD à distance :


UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

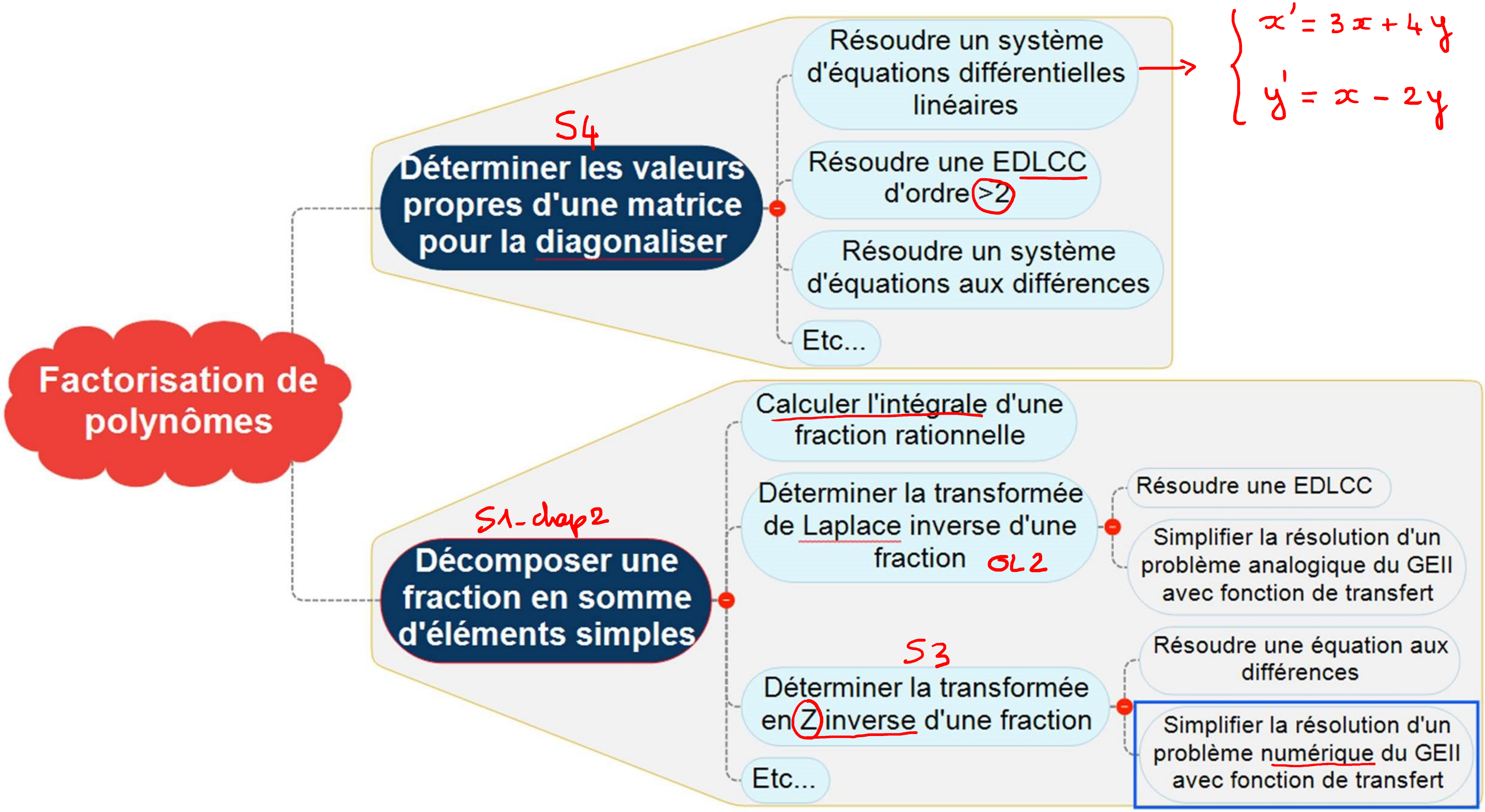
Chapitre 2 : Décomposition d'une fraction réelle en somme d'éléments simples et applications

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance :

- Définitions et opérations
- Polynômes du second degré.
- Division euclidienne de polynômes

Chapitre 2 page 3



$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Partie A : Pré requis - Factorisation d'un polynôme

Chapitre 2 page 4

I. Généralités

1) Définitions

- ✓ Soit z, une variable réelle ou complexe ; n, un entier naturel ; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réelles ou complexes.
  On appelle polynôme, toute fonction P définie par :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

On note aussi : $$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

$$P(z) = \underbrace{1}_{a_3} z^3 \underbrace{-3}_{a_2} z^2 + \underbrace{2}_{a_1} z + \underbrace{1}_{a_0}$$

- ✓ a_k est appelé coefficient de z^k Coefficient de z^2 : -3

- ✓ $a_k z^k$ est appelé monôme de degré k monôme de degré 1 : $2z$.

- ✓ On appelle degré du polynôme P et on note deg(P) le plus haut degré des monômes de P. Dans les notations précédentes deg(P)=n. $\deg(P) = 3$

- Si deg(P)=0, alors $P(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
  P est alors appelé <u>polynôme constant</u>, et deg(P) = 0

$z^0 = 1$

- $\boxed{P(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0}$. Le polynôme P est alors appelé <u>polynôme nul</u> et on note : $P \equiv 0$, et deg(P) = $-\infty$ par convention.

$P(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont appelées <u>racines</u>, ou <u>zéros</u> du polynôme P.

$P(z) = z - 3 = 0 \Longleftrightarrow z = 3$

- On note $\mathbb{R}$ [X] l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
  On note $\mathbb{C}$ [X] l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

- $P(z) = 5z^2 + 3z$ $\quad P \in \mathbb{R}[x]$ $\quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
  $P \in \mathbb{C}[x]$ $\quad \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$

- $P(z) = 2z^2 - \underbrace{3j}_{\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} z + 5$ $\quad P \in \mathbb{C}[x]$
  $P \notin \mathbb{R}[x]$

privé de

2) Exemple

$$P(x) = x^5 - 3x^8 + x\sqrt{2} - 5 + 3x^7$$

« P est un polynôme à coefficients réels » se note : $P \in \mathbb{R}[x]$

« Le degré de P est 8 », se note : $\deg(P) = 8$

Quel est le monôme de degré 7 ? $3x^7$

Quel est le coefficient de x^2 ? 0

Ordonner P suivant les puissances croissantes :

$P(x) = -5 + x\sqrt{2} + x^5 + 3x^7 - 3x^8$

Ordonner P suivant les puissances décroissantes :

$P(x) = -3x^8 + 3x^7 + x^5 + x\sqrt{2} - 5$.

Chapitre 2 page 5

3) Opérations

Soit : $\mathbf{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. deg(P)=n

et : $\mathbf{Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m} = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$. deg(Q)=m.

✓ Egalité

$$\boxed{\mathbf{P \equiv Q \Leftrightarrow P(z) = Q(z)\ \ \forall z \in \mathbb{C} \ \Leftrightarrow \begin{cases} \deg(P) = \deg(Q) = n \\ a_k = b_k \ \ \forall\, 0 \le k \le n \end{cases}}}$$

$ax^3 + bx + c = x^3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$

✓ Addition

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1).z + (a_2 + b_2).z^2 + ... + (a_k + b_k)z^k + ...$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{(P+Q)(z) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) z^k} \\ &\mathbf{\deg(P+Q) = \max\left(\deg(P), \deg(Q)\right)} \end{aligned}}$$

$P(z) = 1 + 2z + 3z^4$ $\deg(P) = 4$

$Q(z) = -1 + 3z - z^2$ $\deg(Q) = 2$

$(P+Q)(z) = 5z - z^2 + 3z^4$ $\deg(P+Q) = 4$

✓ Multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$

$$\lambda.P(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda.a_k z^k$$

$$\deg(\lambda.P) = \deg(P) = n$$

$\lambda . P(z) = \lambda (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n)$

$\lambda . P(z) = \lambda a_0 + \lambda a_1 z + \dots + \lambda a_{n-1} z^{n-1} + \lambda a_n z^n$

✓ Multiplication par un polynôme

$(PQ)(z) = P(z).Q(z)$

$= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m)$

$b_{m-2} z^{m-2}$

$z^1 . z^{m-1} = z^m$

$z^2 . z^{m-2} = z^m$

$= a_0 b_0 + a_0 b_1 z + a_0 b_2 z^2 + \dots + a_0 b_m z^m +$

$+ \quad a_1 b_0 z + a_1 b_1 z^2 + \dots + a_1 b_{m-1} z^m + a_1 b_m z^{m+1} +$

$+ \quad a_2 b_0 z^2 + \dots + a_2 b_{m-2} z^m + a_2 b_{m-1} z^{m+1} + a_2 b_m z^{m+2} \dots$

$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) z^3$

$+ \dots + (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_k b_0) z^k + \dots$

$\dots + a_n b_m z^{n+m}$

Exple

$P(z) = z^2 + 1 \quad \deg P = 2$

$Q(z) = z^3 \quad \deg Q = 3$

$P(z)Q(z) = z^5 + z^3 \quad \deg(PQ) = 5$

$$(PQ)(z) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) . z^k$$

$$\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$n + m$

4) Exemples

✓ $P(z) = 4.\underbrace{(z-1)}_{\text{degré 1}}.\underbrace{(z+1)}_{\text{aussi}}.\underbrace{(z-j)}_{\text{idem}}$

deg(P) = deg(z−1) + deg(z+1) + deg(z−j) = 3

Développer P : P(z) = 4 (z−1)(z+1)(z−j)

$(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$

On développe

On factorise

$P(z) = 4(z^2-1)(z-j)$

$P(z) = 4(z^3 - jz^2 - z + j)$

$P(z) = 4z^3 - 4jz^2 - 4z + 4j$

Quelles sont les racines (ou zéros) de P ? P(z) = 0 AB = 0 ⟺ A = 0 ou B = 0

$P(z) = 4.(z-1).(z+1).(z-j) \iff z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = j$

Le polynôme P est élément de quel ensemble ? $P \in \mathbb{C}[x]$ $P \notin \mathbb{R}[x]$

✓ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Déterminer le polynôme Q tel que : $P(x) = (x-1).Q(x)$

✓ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Déterminer le polynôme Q tel que : $P(x) = (x-1).\underbrace{Q(x)}_{?}$

$$3 = \deg(P) = \underbrace{\deg(x-1)}_{1} + \deg(Q) \iff \deg(Q) = 2$$

On pose $Q(x) = ax^2 + bx + c$

$$(x-1).Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

$$ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

$$ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c = 1x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ c - b = 4 \\ -c = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 + a = -2 \\ c = 4 + b = 2 \end{cases}$$

Donc $Q(x) = x^2 - 2x + 2$

$P(x) = (x-1).(x^2 - 2x + 2)$

II. Polynômes de degré 2

1) Racines d'un polynôme de degré 2

✓ Exemple $Q(x) = x^2 - 2x + 2$; $Q \in \mathbb{R}[X]$

A l'aide des formules apprises en terminale, déterminer les racines de Q, puis factoriser Q :

Rappel $Q(x) = ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\Delta < 0$ $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$Q(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

$\Delta = 0$ $x_1 = x_2$ racine double : x_1

$Q(x) = a(x - x_1)^2$

$Q(x) = 1 \cdot x^2 - 2x + 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$

$z_1 = \dfrac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{2 + 2j}{2} = 1 + j$

$z_2 = \overline{z_1} = z_1^* = 1 - j$

Factorisation de Q :

$Q(z) = (z - 1 - j) \cdot (z - 1 + j)$

$1+j$; $1-j$

On remarque que les racines de P sont ...complexes conjugués...........

En reprenant le deuxième exemple du paragraphe I.4), factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$:

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$? $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z-1)(z^2-2z+2)$

$P(z) = (z-1)(z-1-j)(z-1+j)$......................................

$\deg(P) = 3$ Produit de 3 polynômes de degré 1

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$?

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (z-1)(z^2-2z+2)$..............................

$z-1-j \notin \mathbb{R}[x]$

$z-1+j \notin \mathbb{R}[x]$

Début pour la poursuite d'études

✓ Que se passe-t-il si P est un polynôme à coefficients non tous réels ? $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$

privé de.

Soit $P(z) = a.z^2 + b.z + c$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Factorisons P :

....

$$P(z) = az^2 + bz + c \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$= a\Big(\underbrace{z^2 + \frac{b}{a}z}_{\text{début}} + \frac{c}{a}\Big) \qquad \left(z^2 + 2Az + A^2\right) = (z+A)^2$$

$$= a\Big(\underbrace{z^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{A \quad A^2} - \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{A^2} + \frac{c}{a}\Big)$$

$$= a\Big[\underbrace{\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}_{B^2}\Big] \qquad A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$= a\Big[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \Big(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a\,a}\Big)\Big]$$

Δ On note δ, une solution de $\delta^2 = \Delta$

$$= a\Big[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}}{4a^2}\Big] = a\Big[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\Big]$$

$$P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0 \iff \begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \end{cases}$$

✓ Généralisation Racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes.

Les racines du polynôme $P(z) = a.z^2 + b.z + c$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ sont :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \end{cases} \quad \text{où} \quad \boxed{\delta^2 = b^2 - 4.a.c} - \Delta$$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}$ est alors : $P(z) = a.(z - z_1)(z - z_2)$

2) Exemples

✓ Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = \underbrace{4}_{a}.z^2 + \underbrace{4}_{b}.z + \underbrace{1-2j}_{c} \; ; \; P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4.4(1-2j) = 16 - 16(1-2j) = 32j$$

2) Exemples

Chapitre 2 page 8

✓ Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = 4.z^2 + 4.z + 1 - 2j \; ; \; P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$$

$\Delta = 32j$.

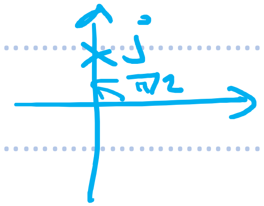
On résout $\delta^2 = 32j$

$\delta^2 = 32.e^{j\pi/2}$

$\delta = \pm \left(32.e^{j\pi/2}\right)^{1/2}$

$\delta = \pm \underbrace{\sqrt{32}}_{4\sqrt{2}}.e^{j\pi/4}$

$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$



$\delta^2 = 3$

$\delta = \pm\sqrt{3} = \pm 3^{1/2}$

$e^{j\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}$

Les solutions de P sont : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-4+4\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}}{8} = \frac{-1+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{j}{2}$

z_1 et z_2 ne sont pas conjugués.

$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-1-(1+j)}{2} = \frac{-2-j}{2} = -1-\frac{1}{2}j$

$P(z) = 4\left(z - j/2\right)\left(z + 1 + 1/2\,j\right)$

✓ Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = 2.z^2 + z + 1 + 3j \ ; P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$$

Fin pour la poursuite d'études

3) Résultats à connaître

Chapitre 2 page 9

Résultat 1 Relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme de degré 2 :

Soit $P(z) = z^2 - s.z + p \in \mathbb{C}[X]$. Soit α et β les racines de P.
Alors : $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha.\beta$

✓ Démonstration

$\begin{cases} P(\alpha)=0 \\ P(\beta)=0 \end{cases} \Rightarrow P(z) = (z-\alpha)(z-\beta) = z^2 - \beta z - \alpha z + \alpha\beta$

$P(z) = z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha\beta$

$P(z) = z^2 - s.z + p$

exple : $p(x) = x^2 - \underbrace{5}_{2+3}x + \underbrace{6}_{2\times 3} = (x-2).(x-3)$

✓ <u>Exercice</u> Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \overbrace{\alpha+\beta}^{s} = -5 \\ \underbrace{\alpha.\beta}_{p} = 5 \end{cases}$.

α et β sont les racines de $x^2 - sx + p$

On résout $x^2 + 5x + 5 = 0$

$\Delta = 25 - 20 = 5$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} = \alpha \\ x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} = \beta \end{cases}$$

$\sqrt{5}^2 = 5$

<u>Vérif</u> : $\alpha+\beta = \dfrac{-5+\cancel{\sqrt{5}}}{2} + \dfrac{-5-\cancel{\sqrt{5}}}{2} = \dfrac{-2\times 5}{2} = -5$

$\alpha.\beta = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{(\overset{a}{-5}+\overset{b}{\sqrt{5}})(\overset{a\;-\;b}{-5-\sqrt{5}})}{4} = \dfrac{\overset{a^2-b^2}{25-5}}{4} = 5$

Exercice 1 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

$P(x) = x^2 - 9$; $P(x) = x^2 + 9$; $P(x) = 4x^2 - 25$; $P(x) = 9x^2 - 6x + 1$;

$P(x) = (x+1)^2 - 16$; $P(x) = 3(x-2)^2 + 5$

$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Chapitre 2 page 31