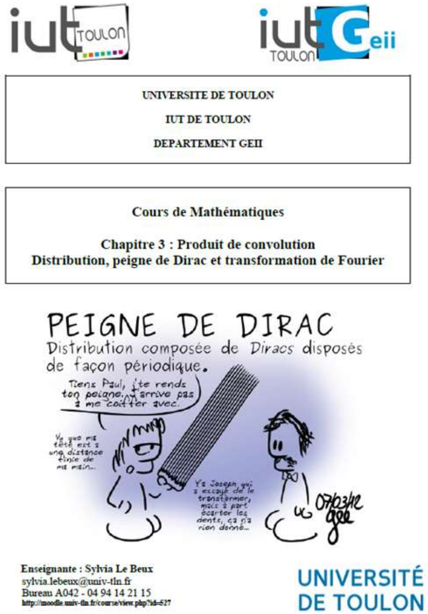
Produit de convolution

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :



UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Produit de convolution
Distribution, peigne de Dirac et transformation de Fourier

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !

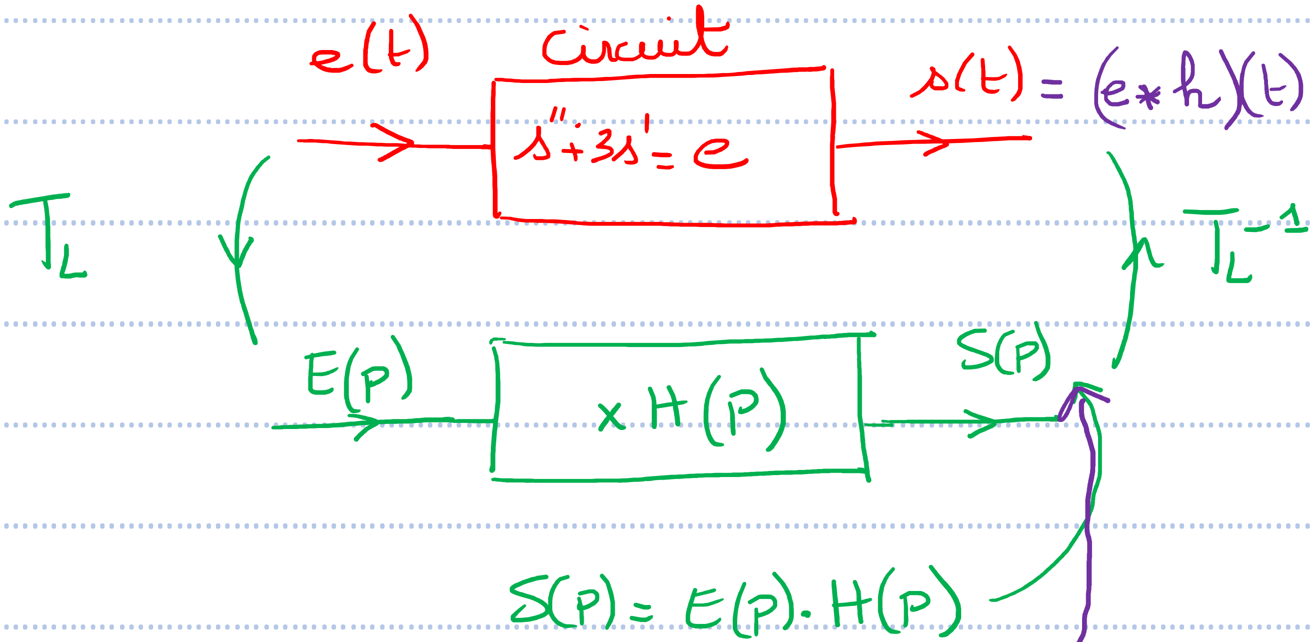
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…

- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.

- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> :

- Définition, propriétés et exercices.



$$T_L\left((f\cdot g)(t)\right) = T_L(f) * T_L(g)$$

$$T_L(f\cdot g) = F * G$$

$$\boxed{T_L^{-1}(F\cdot G) = f * g}$$

Partie 1 : Produit de convolution - Distribution de Dirac

Chapitre 3 page 3

I. Produit de convolution

1) Définition

Soit f et g, deux fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution de f par g, la fonction notée : $f * g$, définie par l'intégrale suivante :

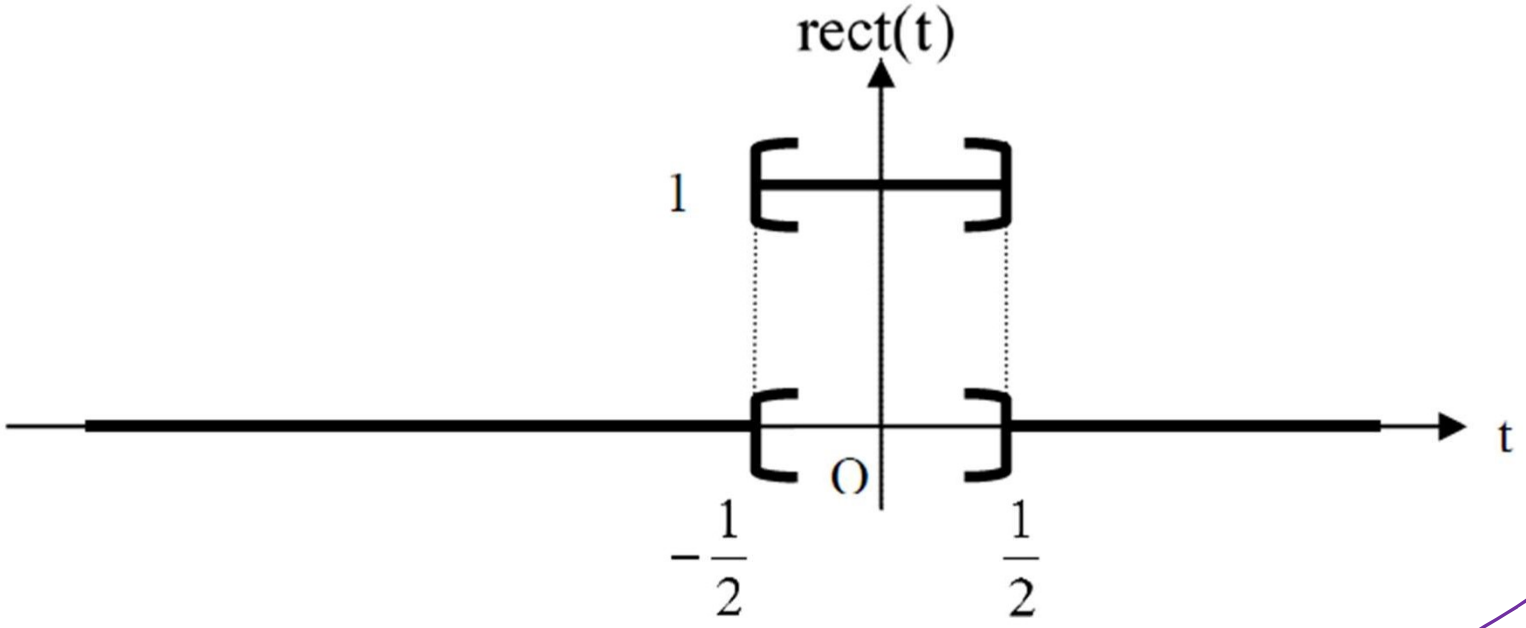
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du .$$

u variable d'intégration

On peut aussi noter : $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$

Exemples

✓ Déterminer le produit de convolution suivant : $\underbrace{\mathrm{rect}(t)}_{f(t)} * \underbrace{e^{-t}}_{g(t)}$, où $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| \le \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$



$$(\mathbf{f} * \mathbf{g})(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u})\mathbf{g}(\mathbf{t}-\mathbf{u})\mathbf{du}. = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{rect}(u)}_{=0 \text{ sauf sur } [-1/2;1/2]} . e^{-(t-u)} du = \int_{-\infty}^{-1/2} 0 . du + \int_{-1/2}^{1/2} 1 . e^{-(t-u)} . du + \int_{1/2}^{+\infty} 0 \, du$$

0

$$\mathrm{rect}(t) * e^{-t} = \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{e^{-(t-u)}}_{e^{-t+u} = \underbrace{e^{-t}}_{cte\ \%\ u} \cdot e^{u}} du = e^{-t} \cdot \int_{-1/2}^{1/2} e^{u} du$$

$$= e^{-t} \left[e^{u} \right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= e^{-t} \cdot \left(e^{1/2} - e^{-1/2} \right)$$

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{rect}(t) * e^{-t} = 2 e^{-t} \cdot \mathrm{sh}(1/2) = 2\, \mathrm{sh}(1/2) \cdot e^{-t}$$

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

2) <u>Propriétés</u> Les fonctions f, g, g_1, g_2, h sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \text{ 1. } f * g = g * f \qquad \text{commutativité}$$

$$\text{2. } f * (g_1 + \lambda . g_2) = f * g_1 + \lambda . f * g_2 \qquad \text{distributivité}$$

$$\text{3. } (f_1 + \lambda f_2) * g = f_1 * g + \lambda . f_2 * g$$

$$\text{4. } (f * g) * h = f * (g * h) \qquad \text{associativité}$$

$$\text{5. } (f * g)' = f' * g + f * g' \qquad \text{dérivabilité}$$

Dém :

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) . g(t-u)\, du$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} u^2 du = \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} v^2 dv}$$

$$(g*f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) . f(\underbrace{t-u}_{v})\, du$$

On pose $v = t-u \iff u = t - v$

$$\frac{dv}{du} = (t-u)'_u = -1$$

$$dv = -du$$

$$(g*f)(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} g(t-v) . f(v) . (-dv) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) . g(t-v)\, dv$$

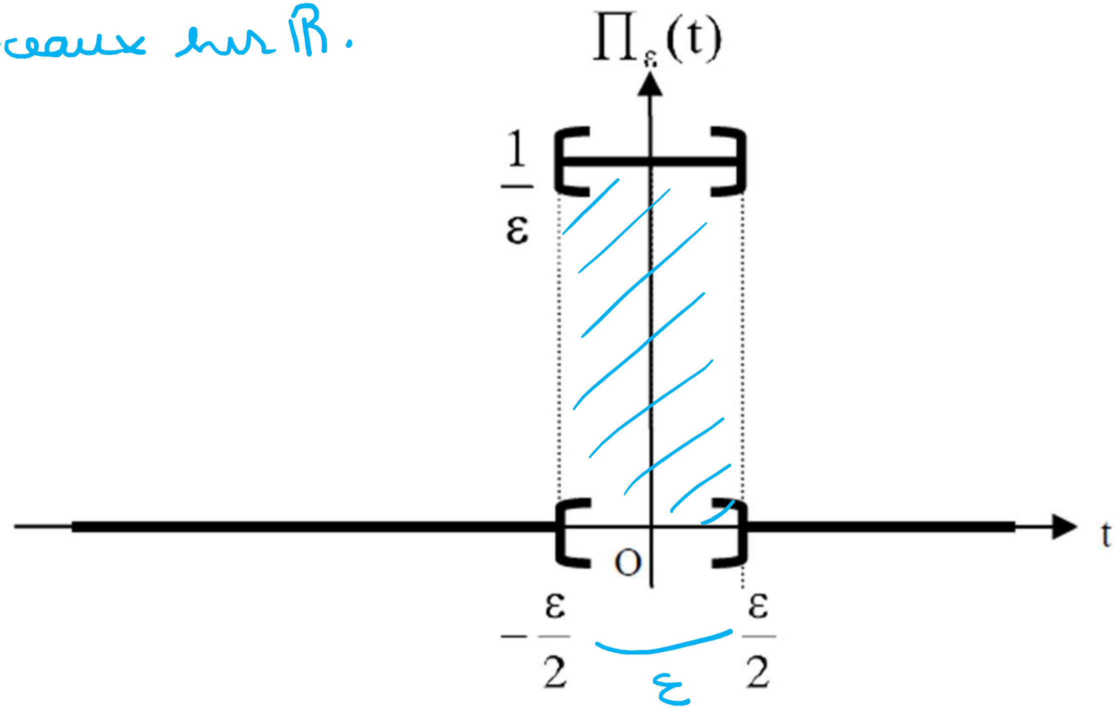
$$\begin{cases} u \to -\infty \iff v = t-u \to +\infty \\ u \to +\infty \iff v = t-u \to -\infty \end{cases}$$

3) Exemples

✓ Convolution par une porte de largeur ε

f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ si } |t| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



On remarque que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(t)dt = \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} = 1$

$$(f * \Pi_\varepsilon)(t) = \Pi_\varepsilon(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(u).f(t-u)\,du = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \tfrac{1}{\varepsilon} f(t-u)\,du$$

$$\Pi_\varepsilon(t) * f(t) = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} f(t-u)\, du$$

On pose $v = t-u \iff u = t-v$

$$\frac{dv}{du} = -1 \iff du = -dv$$

$u = -\varepsilon/2 \iff v = t+\varepsilon/2$

$u = \varepsilon/2 \iff v = t-\varepsilon/2$

$$= \int_{t+\varepsilon/2}^{t-\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} f(v)\,(-dv)$$

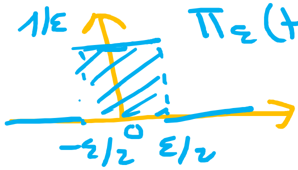
$$\boxed{(\Pi_\varepsilon * f)(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon/2}^{t+\varepsilon/2} f(v)\,dv} = \text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [t-\varepsilon/2 ; t+\varepsilon/2]$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [a,b]$$

f : T-périodique : $\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(t)dt = 1$

$\varepsilon \to 0$



$\Pi_\varepsilon(t)$.

Chapitre 3 page 5

II. Impulsion ou distribution de Dirac

1) Définition

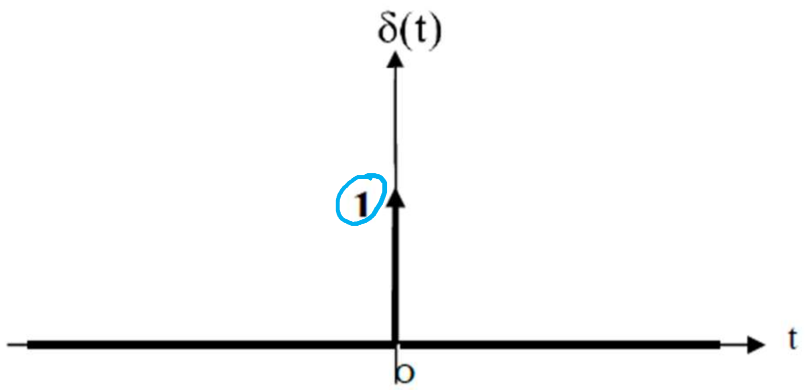
On appelle impulsion de Dirac : $\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon(t)$ où $\varepsilon > 0$

$\varepsilon \to 0$

On définit parfois δ abusivement par : $\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \text{, et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$

δ n'est pas une fonction, c'est une distribution, c'est pourquoi on l'appelle aussi distribution de Dirac.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(x)dx = 1$, par convention, on note donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$, et par convention sa représentation graphique est :



2) <u>Produit de convolution par une impulsion de Dirac</u>

On admet que : $(f * \delta)(t) = \left(f * \lim_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon\right)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} (f * \Pi_\varepsilon)(t)$

On suppose que f est continue et on note F, une fonction primitive de f, alors :

$(f * \Pi_\varepsilon)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{t-\varepsilon/2}^{t+\varepsilon/2} f(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[F(t)\right]_{t-\varepsilon/2}^{t+\varepsilon/2} = \frac{1}{\varepsilon}\left(F(t+\varepsilon/2) - F(t-\varepsilon/2)\right)$

$(f * \Pi_\varepsilon)(t) = \frac{F(t+\varepsilon/2) - F(t-\varepsilon/2)}{\varepsilon}$

$(f * \delta)(t) \overset{\text{admis}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t+\varepsilon/2) - F(t-\varepsilon/2)}{\varepsilon}$

$(f * \delta)(t) = F'(t) = f(t)$

Si g est dérivable en $x_0 \in D_g$

alors $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$

$x = x_0 + h$

ou $\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)$

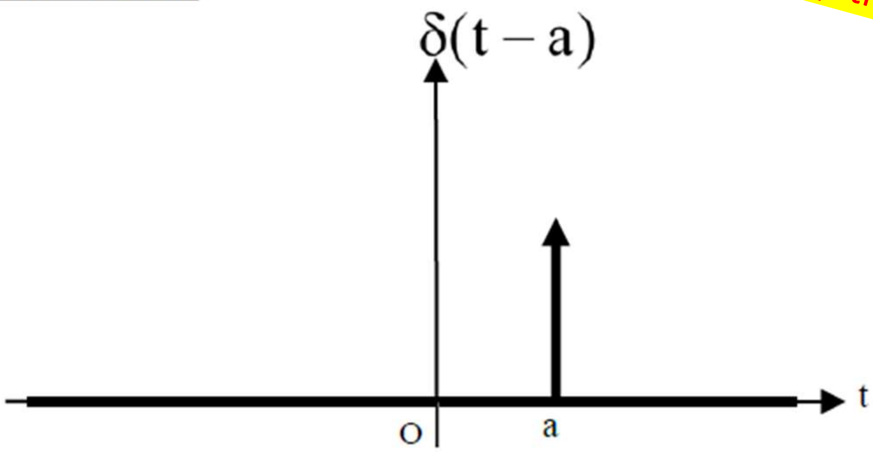
Si f est continue alors : $\boxed{(f * \delta)(t) = f(t)}$

On dit que **l'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution.**

Chapitre 3 page 6

4) Convolution par une impulsion de Dirac décalée de a

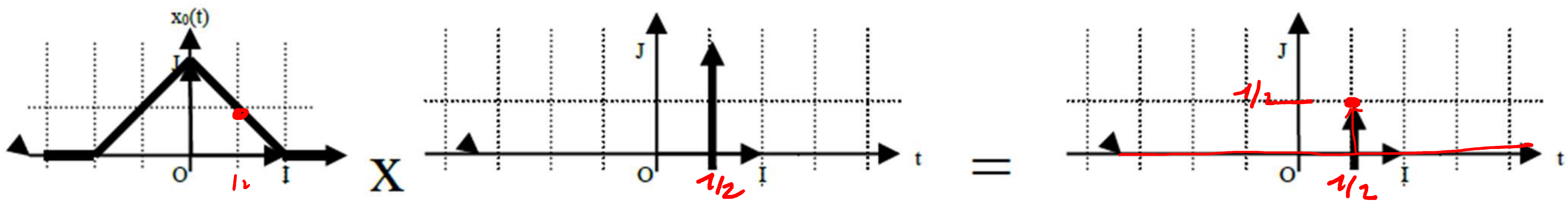
$$\delta(t-a)=\begin{cases}0 \text{ si } t \neq a\\ +\infty \text{ si } t=a\end{cases}$$



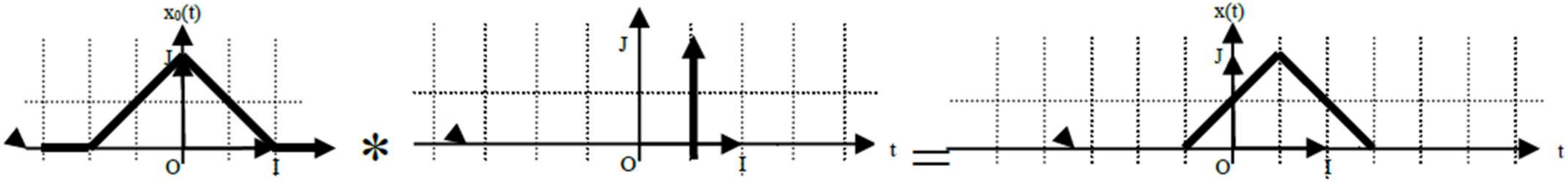
Produit de convolution Si f est continue alors : $\boxed{f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)}$

Attention Ne pas confondre avec le produit classique : $f(t)\times\delta(t-a)=f(a)\times\delta(t-a)$

exemple : $tri(t)\times\delta(t-1/2)=tri(1/2).\delta(t-1/2)$



$$\mathrm{tri}(t) * \delta(t - 1/2) = \mathrm{tri}(t - 1/2)$$



IV. Exercices

Chapitre 3 page 11

Déterminer h(t)=sin(3t)*rect(t), et $e^{-x}.U(x) * x.U(x)$

$$h(t) = \mathrm{rect}(t) * \sin(3t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(u) \cdot \sin(3t - 3u)\, du = \int_{-1/2}^{1/2} \sin(3t - 3u)\, du$$

$$= \left[\frac{-\cos(3t - 3u)}{-3} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{3} \left(\cos\left(3t - \frac{3}{2}\right) - \cos\left(3t + \frac{3}{2}\right) \right) = 2 \sin(3t) \cdot \sin(3/2).$$

$\cos 3t . \cos 3/2 + \sin 3t \sin 3/2 - (\cos \cos - \sin \sin)$