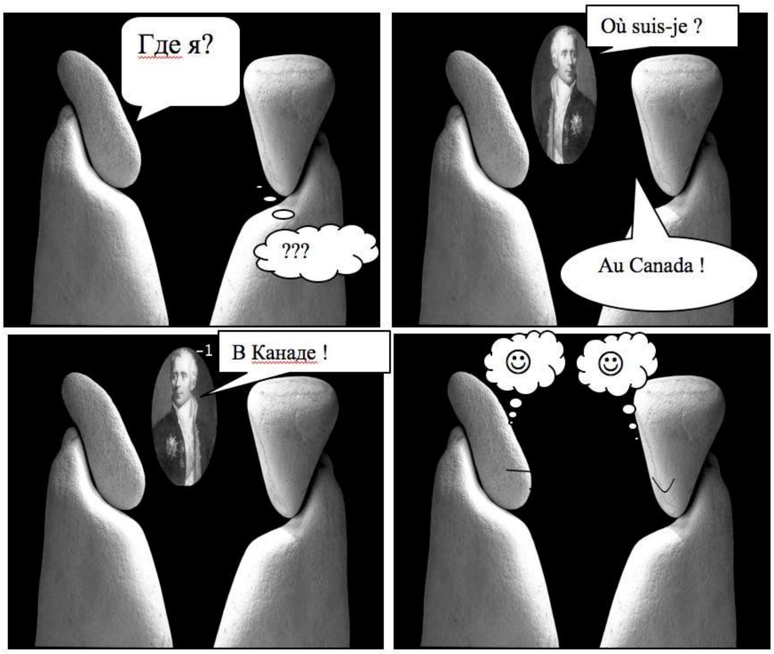
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 2 : Décomposition d'une fraction réelle en somme d'éléments simples et applications



Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Table des matières

Partie A : Pré requis - Factorisation d'un polynôme

I. Généralités

1) Définitions

- ✓ Soit z, une variable réelle ou complexe ; n, un entier naturel ; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réelles ou complexes.
  On appelle polynôme, toute fonction P définie par :
  $$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$
  On note aussi : $$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
- ✓ a_k est appelé coefficient de z^k
- ✓ $a_k z^k$ est appelé monôme de degré k
- ✓ On appelle degré du polynôme P et on note deg(P) le plus haut degré des monômes de P. Dans les notations précédentes deg(P)=n.
- ✓ Si deg(P)=0, alors $P(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
  P est alors appelé polynôme constant, et deg(P) = 0
- ✓ $\boxed{P(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0}$. Le polynôme P est alors appelé polynôme nul et on note : $P \equiv 0$, et deg(P) = $-\infty$ par convention.
- ✓ Les solutions de l'équation P(z) = 0 sont appelées racines, ou zéros du polynôme P.
- ✓ On note $\mathbb{R}$ [X] l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
  On note $\mathbb{C}$ [X] l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

2) Exemple

$$P(x) = x^5 - 3x^8 + x\sqrt{2} - 5 + 3x^7$$

« P est un polynôme à coefficients réels » se note : ……………………………………………

« Le degré de P est ….. », se note : ………………………………………………………...

Quel est le monôme de degré 7 ? ……………………………………………………

Quel est le coefficient de x^2 ? ……………………………………………………..

Ordonner P suivant les puissances croissantes :

…………………………………………………………………………………………………...

3) Opérations

Soit : $\mathbf{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. deg(P)=n

et : $\mathbf{Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k}$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$. deg(Q)=m.

- ✓ Egalité

$$\boxed{\mathbf{P \equiv Q \Leftrightarrow P(z) = Q(z)\ \ \forall z \in \mathbb{C} \ \ \Leftrightarrow \begin{cases} deg(P) = deg(Q) = n \\ a_k = b_k \ \ \forall\ 0 \le k \le n \end{cases}}.}$$

- ✓ Addition

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1).z + (a_2 + b_2).z^2 + ... + (a_k + b_k)z^k + ...$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(P+Q)(z) = \sum_{k=0}^{max(n,m)} (a_k + b_k) z^k} \\ \mathbf{deg(P+Q) = max\big(deg(P), deg(Q)\big)} \end{array}}$$

- ✓ Multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{\lambda.P(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda.a_k z^k} \\ \mathbf{deg(\lambda.P) = deg(P)} \end{array}}$$

- ✓ Multiplication par un polynôme

$(PQ)(z) = P(z).Q(z)$

$$= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m\right)$$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(PQ)(z) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right).z^k} \\ \mathbf{deg(P.Q) = deg(P) + deg(Q)} \end{array}}$$

4) Exemples

✓ $P(z) = 4.(z-1).(z+1).(z-j)$

deg(P) = ……………………………………………………………………………………

Développer P : P(z) = ……………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Quelles sont les racines (ou zéros) de P ? ………………………………………………

Le polynôme P est élément de quel ensemble ? ………………………………………...

✓ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$
Déterminer le polynôme Q tel que : $P(x) = (x-1).Q(x)$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

II. Polynômes de degré 2

1) Racines d'un polynôme de degré 2

✓ Exemple $Q(x) = x^2 - 2x + 2$; $Q \in \mathbb{R}[X]$
Al'aide des formules apprises en terminale, déterminer les racines de Q, puis factoriser Q :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

....

……………………………………………………………………………………...

On remarque que les racines de P sont ……………………………………………

En reprenant le deuxième exemple du paragraphe I.4), factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$:

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$? $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$
P(z) =…………………………………………………………………………………

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$?
$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 =$……………………………………………………………

✓ Que se passe-t-il si P est un polynôme à coefficients non tous réels ? $P \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{R}[X]$

Soit $P(z) = a.z^2 + b.z + c$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Factorisons P :

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

✓ Généralisation Racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes.

Les racines du polynôme $P(z) = a.z^2 + b.z + c$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ sont :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \\ z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \end{cases} \quad \text{où} \quad \delta^2 = b^2 - 4.a.c$$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}$ est alors : $P(z) = a.(z - z_1)(z - z_2)$

2) Exemples

- ✓ Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = 4.z^2 + 4.z + 1 - 2j \ ; \ P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

- ✓ Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = 2.z^2 + z + 1 + 3j \ ; \ P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

3) Résultats à connaître

Résultat 1 Relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme de degré 2 :

Soit $P(z) = z^2 - s.z + p \in \mathbb{C}[X]$. Soit α et β les racines de P.   **Alors : $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha.\beta$**

- ✓ Démonstration

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

- ✓ Exercice Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \alpha + \beta = -5 \\ \alpha.\beta = 5 \end{cases}$.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

- ✓ Remarque : Si $P(z) = az^2 + b.z + c$ avec $a \neq 0$, alors :

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

Résultat 2 Polynôme à racines complexes conjuguées

Soit P un polynôme de degré 2, possédant une racine complexe non réelle α .   **P est un polynôme à coefficients réels si et seulement si sa deuxième racine β est le conjugué de α . Autrement dit : $P \in \mathbb{R}[X] \Leftrightarrow \beta = \alpha^*$ (ou $\overline{\alpha}$ en notation mathématique)**

✓ Démonstration

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

✓ Exercice extrait des banques d'épreuve IUT/BTS session 2000
Le polynôme suivant : $P(z) = z^2 + (3 - 3i).z + 4i$ a ses racines complexes conjuguées entre elles. Vrai ou Faux ?

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

III. Division euclidienne de polynômes

1) Rappel : division euclidienne dans $\mathbb{R}$: effectuer la division de 165 par 6 :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

2) Exemple de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $A(x) = x - 2x^2 + x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + 2$
Effectuer la division euclidienne de A par B, c'est effectuer la division de A par B en ordonnant A et B suivant les puissances décroissantes.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

3) Définition / Théorème

Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes tels que : $B \neq 0$ et $\deg(A) \geq \deg(B)$.
Il existe alors un unique couple de polynômes (Q,R) vérifiant : $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$.
On dit alors que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
La division euclidienne de A par B est aussi appelée division de A par B suivant les puissances décroissantes.

- ✓ Remarque Si R=0, alors A=BQ. On dit alors que le polynôme A est factorisable par B, ou que B divise A, ou encore que A est divisible par B.

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

IV. Conséquences de la division euclidienne sur la factorisation d'un polynôme

Soit P, un polynôme de degré quelconque, à coefficients complexes.

a) $\mathbf{P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists!\ Q \in \mathbb{C}[X]\ /\ P(x) = (x - \alpha).Q(x)}$
α est une racine de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par (x- α)

b) $\mathbf{P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_k) = 0 \ \Leftrightarrow \ \exists!\ Q \in \mathbb{C}[X]\ /\ P(x) = (x - \alpha_1).(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)Q(x)}$
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x - \alpha_1).(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)$

✓ Démonstration de a)

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ Exemple 1 Chercher une racine évidente du polynôme P, défini par :
$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Puis le factoriser (l'écrire comme produit de polynômes de plus bas degré possible)

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

✓ <u>Exemple 2</u> Soit le polynôme : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10$. Chercher trois racines évidentes de P, puis déterminer la quatrième. Quelle est alors la factorisation de P ?

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

c) $\mathbf{P(\alpha) = P'(\alpha) = 0}$ **et** $\mathbf{P''(\alpha_k) \neq 0 \Leftrightarrow \exists ! \, Q \in \mathbb{C}[X] \;/\; P(x) = (x-\alpha)^2.Q(x)}$
α est une racine de P et P′ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^2$
On dit alors que α est une racine double de P (ou est de multiplicité 2).

d) $\mathbf{P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0}$ **et** $\mathbf{P^{(3)}(\alpha_k) \neq 0 \Leftrightarrow \exists ! \, Q \in \mathbb{C}[X] \;/\; P(x) = (x-\alpha)^3.Q(x)}$
α est une racine de P, P′ et P″ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^3$
On dit alors que α est une racine triple de P (ou est de multiplicité 3).

e) <u>Généralisation</u>

$$\mathbf{P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = P^{(3)}(\alpha) = ... = P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(k+1)}(\alpha) \neq 0}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathbf{\exists ! \, Q \in \mathbb{C}[X] \;/\; P(x) = (x-\alpha)^{k+1}.Q(x)}$$

On dit alors que α est une racine multiple de P d'ordre (ou de multiplicité) k+1.

✓ Démonstration pour k=1.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

✓ Exemple Déterminer une racine évidente multiple du polynôme P suivant, puis le factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………

V. Factorisation d'un polynôme

1) Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}$

✓ Définition

Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}$, c'est l'écrire comme produit de polynômes à coefficients complexes et de plus bas degré possible.

✓ Théorème de D'Alembert

Soit P, un polynôme de degré n : $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$.
P possède alors n racines dans l'ensemble $\mathbb{C}$: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ distinctes ou non. On peut alors factoriser P : $P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n)$
P est donc factorisable en n polynômes de degré 1 .

✓ Méthodes

- Chercher une ou plusieurs racines évidentes parmi : 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; j ; -j ;… avec éventuellement leur multiplicité. Puis effectuer une division euclidienne.
- Penser aux identités remarquables :

....

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

- Ou bien résoudre P(z)=0, puis factoriser.

✓ Exemple 1 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 1$.

....

…………………………………………………………………………………………..

✓ Exemple 2 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^5 - 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}$

✓ Définition

Factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}$, c'est l'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels et de plus bas degré possible.

✓ Théorème de D'Alembert

Soit P, un polynôme de degré n à coefficients réels :
$\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}$.
P est factorisable dans $\mathbb{R}$
- en polynômes de degré 1 à racine réelle : (x-a) avec $a \in \mathbb{R}$
- en polynômes de degré 2 à racines complexes conjuguées.

✓ <u>Exemple 1</u> Factoriser le polynôme P suivant dans $\mathbb{R}$: $P(x) = x^4 - 1$

……………………………………………………………………………………………...

....

✓ <u>Méthode</u> On factorise d'abord P dans $\mathbb{C}$, puis on multiplie les paires de polynômes de degré 1 à racines complexes conjuguées.

En effet : $P(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) =$ ……………………………………………………

....

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

✓ <u>Exemple 2</u> Factoriser le polynôme P suivant dans $\mathbb{R}$: $P(x) = x^5 - 1$

……………………………………………………………………………………………...

....

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

....

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

Partie B : Décomposition d'une fraction en somme d'éléments simples

I. Définitions

1) Fraction rationnelle

On appelle fraction rationnelle toute fonction de la forme $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont deux polynômes et $B \neq 0$.
Dans toute cette partie, on supposera que A et B sont à coefficients réels.

Exemple

$F(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - x - 2}$ …………………………………………………………………...

Ensemble de définition de F : ………………………………………………………

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

2) Fraction rationnelle irréductible

Une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ est dite irréductible lorsque les polynômes A et B n'ont pas de facteurs communs, ou bien lorsque les polynômes A et B n'ont aucune racine commune.

Exemple

$F(x) = \dfrac{x^4 - 1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$.

Montrer que la fraction F est réductible, puis la réduire.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

3) Pôles d'une fraction irréductible

On appelle pôles d'une fraction irréductible $F = \dfrac{A}{B}$, les racines de son dénominateur B.

Exemple $F(x) = \dfrac{x}{(x-1)^3(x+2)(x-j)^2(x+j)^2} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$. Montrer que F est irréductible, puis déterminer ses pôles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

4) Partie entière d'une fraction irréductible

Soit $F = \dfrac{A}{B}$, une fraction irréductible. Deux cas de figure se présentent :

- Soit deg(A) ≥ deg(B), on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(Q) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Q est appelé partie entière de F.

- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.

Exemple Soit $F(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x+2}$. Montrer que F est irréductible, déterminer ses pôles, puis son éventuelle partie entière.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………

II. Décomposition d'une fraction à pôles tous réels

1) Introduction

✓ Exemple $F(x)=\dfrac{x^4-x^3+2x^2-3x+2}{x(x-1)^2}=x+1+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x}$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Définition / Théorème On appelle élément simple de 1ère espèce toute fraction de la forme : $\dfrac{a}{(x-\alpha)^n}$.

2) 1er cas : $F(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ est une fraction à pôles réels simples

✓ Exemple : $F(x)=\dfrac{x^3+3x-1}{x^4-5x^2+4}=\dfrac{x^3+3x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$.

Décomposer F en somme d'éléments simples.

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..

✓ A retenir

Soit F, une fraction irréductible, sans partie entière, à pôles simples : $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$

On a alors : $\mathbf{F(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)}}$ **avec** $\begin{cases} \mathbf{deg(P) < n} \\ \mathbf{P(\alpha_i) \neq 0 \ \ \forall\, 1 \leq i \leq n} \end{cases}$

Et F se décompose en somme d'éléments simples :

$\mathbf{F(x) = \dfrac{a_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{a_2}{x-\alpha_2} + ... + \dfrac{a_n}{x-\alpha_n}}$ **avec** $\mathbf{a_i = \left[(x-\alpha_i)F(x)\right]_{x=\alpha_i} \ \ \forall 1 \leq i \leq n}$ **.**

3) 2ème cas : F est une fraction à pôles réels multiples

✓ Exemple $F(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 6x - 5}{(x+1)(x-1)^3}$.

Décomposer F en somme d'éléments simples.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..

- ✓ Remarque Pour déterminer a_1 et a_2, nous avons remplacé x par deux valeurs différentes. Il arrive que les équations obtenues soient compliquées, dans ce cas, nous pouvons aussi calculer la limite : $\lim_{x\to\infty} x.F(x)$, qui nous donne une équation plus simple à résoudre.

- ✓ Rappel $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$

- ✓ Exemple reprendre l'exemple précédente, et déterminer a_1 et a_2 en remplaçant x par 0 et en calculant $\lim_{x\to\infty} x.F(x)$.

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..

✓ A retenir

Soit F, une fraction irréductible, sans partie entière. Si F possède un pôle α de multiplicité m, alors :

On a alors : $F(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^m Q(x)}$.

Et F se décompose en somme d'éléments simples :

$$F(x) = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(x-\alpha)^m} + \ldots \quad \text{avec} \quad a_m = \left[(x-\alpha)^m F(x)\right]_{x=\alpha_i} .$$

Pour déterminer les autres coefficients a_1, a_2, …, a_{m-1} on remplace x par m-2 valeurs distinctes et on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} x.F(x)$, on obtient ainsi un système de m-1 équations linéaires à m-1 inconnues à résoudre.

✓ Exercice Décomposer en somme d'éléments simples la fraction suivante, puis en déduire sa transformée de Laplace inverse (tableau p.)

$$G(s) = \frac{1}{s^2(RCs+\ )}$$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

III. Décomposition d'une fraction à pôles complexes non tous réels

1) Introduction : On décompose F en somme d'éléments simples dans $\mathbb{C}$, puis on additionne les éléments simples conjugués afin d'obtenir la décomposition en somme d'éléments simples dans $\mathbb{R}$

✓ Exemple $F(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)(x-j)(x+j)} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{-1+\frac{1}{2}j}{x-j} + \dfrac{-1-\frac{1}{2}j}{x+j}$

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

Définition / Théorème On appelle élément simple de 2ème espèce toute fraction de la forme : $\dfrac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n}$ où a, b, c et d sont des réels.
Dans $\mathbb{R}$, toute fraction se décompose en somme d'éléments simples de 1ère espèce ou de 2ème espèce.
Dans $\mathbb{C}$, toute fraction se décompose en somme d'éléments simples de 1ère espèce uniquement.

2) Méthode pour décomposer une fraction F directement dans $\mathbb{R}$, sans passer par la décomposition dans $\mathbb{C}$

✓ Exemple $F(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

✓ A retenir

Soit F, une fraction irréductible, sans partie entière, telle que :
$F(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+ax+b)^m Q(x)}$ **où** α **et** $\bar{\alpha}$ **sont les racines conjuguées du polynôme** x^2+ax+b **.**
Alors F se décompose en somme d'éléments simples :
$F(x) = \dfrac{c_1x+d_1}{x^2+ax+b} + \dfrac{c_2x+d_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \dfrac{c_mx+d_m}{(x^2+ax+b)^m} + \ldots$ **et :**
$c_m\alpha + d_m = \left[(x^2+ax+b)^m F(x)\right]_{x=\alpha}$
Pour déterminer les autres coefficients on remplace x par 2m-3 valeurs distinctes et on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} x.F(x)$**, on obtient ainsi un système de 2m-2 équations linéaires à 2m-2 inconnues à résoudre.**

IV. Astuces pour calculer les coefficients d'une décomposition en somme d'éléments simples

1) La fraction à décomposer est paire ou impaire :

✓ Rappel On dit que F est paire lorsque F(-x)=F(x) $\forall x$.
On dit que F est impaire lorsque F(-x)=-F(x) $\forall x$.

✓ Exemple $F(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2-1)}$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………...

2) Division suivant les puissances croissantes, lorsque F possède un pôle multiple

✓ Exemple $F(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^5(x+1)}$

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

Notes

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

Partie C : Résumé de cours par l'exemple

Exemple 1 **f est une fraction irréductible à pôles simples (son dénominateur a des racines simples)**

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

Eléments simples de « première espèce »

Calcul de a et b : $a = [(x+1)f(x)]_{x=-1} = \left[\frac{1}{x-2}\right]_{x=-1} = -\frac{1}{3}$ et de même : $b = [(x-2)f(x)]_{x=2} = \frac{1}{3}$

Ainsi : $f(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-2}$

Exemple 2 **f , fraction irréductible, possède deux pôles complexes conjugués**

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-3}$$

(remarque : x^2+1 est à racines complexes i et –i)

Eléments simples de « seconde espèce » et de « première espèce »

- Calcul de c : $c = [(x-3)f(x)]_{x=3} = \left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right]_{x=3} = \frac{7}{10}$
- Pour calculer les coefficients a et b, il existe plusieurs méthodes :

Méthode 1 : $ai + b = [(x^2+1)f(x)]_{x=i}$	Méthode 2 : **(a,b) est la solution du système contenant les 2 équations f(0) et $\lim_{x\to\infty} xf(x)$**
En effet, en multipliant la fraction par (x^2+1), on isole a et b : $(x^2+1)f(x) = \frac{2x+1}{x-3} = ax+b + \frac{c(x^2+1)}{x-3}$ puis en posant x = i, on élimine c d'où le résultat suivant : $\frac{2i+1}{i-3} = a\,i+b$ $\Leftrightarrow ai+b = \frac{(2i+1)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)}$ $\Leftrightarrow ai+b = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{10} \\ a = -\frac{7}{10} \end{cases}$ Remarque : cette méthode est utilisée lorsque **les racines complexes sont simples** (i et –i, ou 2i et -2i…). Et que d'autres coefficients sont à calculer à l'aide de la méthode 2 (voir exemple 3)	$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{-3} = b + \frac{c}{-3} \\ \lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2}{x^2} + \frac{cx}{x}\right) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{10} \\ a+c = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{10} \end{cases}$ Remarque : cette méthode est utilisée lorsque **les racines complexes sont trop compliquées**.

Ainsi : $f(x) = -\frac{1}{10}\frac{7x+1}{x^2+1} + \frac{7}{10}\frac{1}{x-3}$

Exemple 3 **f est réductible et possède un pôle multiple**

$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)^4} = \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}$, sur $\mathbb{R} - \{-1;2\}$.

Remarques : -1 est un **pôle triple de f** ou de multiplicité 3 et on a **réduit la fraction**, car **A et B ont une racine commune** : -1 (ou un facteur commun : x+1)

En fait : $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x+1)^3} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{x+1}$

Eléments simples de « première espèce »

- Calcul de a : $a = [(x-2)f(x)]_{x=2} = \left[\frac{x}{(x+1)^3}\right]_{x=2} = \frac{2}{27}$

- Calcul de b : $\boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{x=-1} = \left[\frac{x}{x-2}\right]_{x=-1} = \frac{1}{3}$
- Calcul de c et d : la méthode précédente ne fonctionne plus.
  En effet, $[(x+1)^2 f(x)]_{x=-1} = \left[\frac{x}{(x-2)(x+1)}\right]_{x=-1}$ = division par zéro ! On applique alors la méthode 2 (voir exemple précédent)

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = 0 = \dfrac{a}{-2} + b + c + d \\ \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{x f}(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax}{x} + \dfrac{bx}{x^3} + \dfrac{cx}{x^2} + \dfrac{dx}{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = \dfrac{8}{27} \\ a + d = 0 \Leftrightarrow d = -\dfrac{2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{2}{9} \\ d = -\dfrac{2}{27} \end{cases}$$

Remarque : Si -1 avait été un pôle de multiplicité supérieur à 3, exigeant plus de deux équations, on aurait pu utiliser la méthode de la division suivant les puissances croissantes.

Ainsi : $f(x) = \frac{2}{27}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{27}\frac{1}{x+1}$

Exemple 4 f est une fraction irréductible avec une partie entière

$f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = \frac{x^4-4x^2-x+3}{(x+1)(x-2)} = \frac{A(x)}{B(x)}$, attention **deg(A)≥ $\mathbf{deg}(\boldsymbol{B})$,**

f possède donc une **partie entière** !! Pour la déterminer, il faut effectuer la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes)

$$\begin{array}{r|l} A(x) = x^4 - 4x^2 - x + 3 & x^2 - x - 2 = B(x) \\ \cline{2-2} -(x^4 - x^3 - 2x^2) & x^2 + x - 1 = Q(x) \\ \hline x^3 - 2x^2 - x + 3 & \\ -(x^3 - x^2 - 2x) & \\ \hline -x^2 + x + 3 & \\ -(x^2 + x + 2) & \\ \hline R(x)=1 & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = x^2 + x - 1 + \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

A = BQ+R

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{BQ}+\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{Q} + \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{B}}$$

Partie entière de la fraction f

Synthèse

Pour décomposer une fraction rationnelle f dans ℝ, définie par : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{A(x)}{B(x)}$, en somme d'éléments simples, il faut procéder en plusieurs étapes :

1) Réduire la fraction si A et B ont un facteur commun,

2) Déterminer et mettre de côté, s'il il y en a une, la partie entière (si deg(A)≥ $\mathbf{deg}(\boldsymbol{B})$)

3) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de la fraction g, irréductible et sans partie entière obtenue, puis calculer les coefficients :

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{k})^{\boldsymbol{p}}\ldots}$$
$$= \frac{\boldsymbol{a_n}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{n}}} + \frac{\boldsymbol{a_{n-1}}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{n-1}}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}} + \frac{\boldsymbol{b_p x}+\boldsymbol{c_p}}{(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{k})^{\boldsymbol{p}}} + \frac{\boldsymbol{b_{p-1}x}+\boldsymbol{c_{p-1}}}{(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{k})^{\boldsymbol{p-1}}} + \cdots$$
$$+ \frac{\boldsymbol{b_1 x}+\boldsymbol{c_1}}{\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{k}} + \cdots$$

où le polynôme $\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{k}$ est à racines complexes conjuguées $\boldsymbol{\alpha}$ et $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$

$\boldsymbol{a_n} = [(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]_{x=x_0}$; $\boldsymbol{b_p\alpha}+\boldsymbol{c_p} = [(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{k})^{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]_{x=\alpha}$ etc… Pour obtenir les autres coefficients, on pourra remplacer x par autant de valeurs à déterminer et résoudre le système. L'équation $\lim\limits_{x\to\infty}\boldsymbol{xf}(\boldsymbol{x})$ est très intéressante, puisqu'elle est toujours simple à résoudre.

Partie D : Exercices

Exercice 1 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :
$P(x) = x^2 - 9$; $P(x) = x^2 + 9$; $P(x) = 4x^2 - 25$; $P(x) = 9x^2 - 6x + 1$;
$P(x) = (x+1)^2 - 16$; $P(x) = 3(x-2)^2 + 5$
$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Exercice 2 Effectuer la division euclidienne de A par B où :
1) $A(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ et $B(x) = x - 2$
2) $A(x) = x - 2$ et $B(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$
3) $A(x) = x^3 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$

Exercice 3 Chercher une racine évidente, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$

Exercice 4 Chercher une racine évidente multiple, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20$

Exercice 5 Factoriser le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x - 2j$ (on cherchera d'abord une racine évidente, puis on effectuera une division euclidienne)

Exercice 6 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$; $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Exercice 7 Décomposer en somme d'éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions ci-dessous en suivant les étapes indiquées ci-après :
Etape 1 : Factoriser le dénominateur dans $\mathbb{C}$; Etape 2 : Déterminer si la fraction est irréductible ; Etape 3 : Calculer la partie entière de la fraction irréductible ;
Etape 4 : Décomposer en sommes d'éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction

$$F(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \qquad G(x) = \frac{2x^4 + x^2 - x^3 - x}{x^3 - x^2 + x - 1} \qquad H(s) = \frac{1}{s.(\tau s + 1)}$$

$$K(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+1)} \qquad L(x) = \frac{10x^2}{x^4 + 3x^2 - 4} \qquad N(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x-2)}$$

$$M(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

Exercice 8 Soit $F(x) = \dfrac{x}{(x-1)^6(2-x)}$

- **a)** Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples de F(x), sans calculer les coefficients $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, B.
- **b)** On pose h=x-1, on remplace dans l'expression de F(x) et dans sa décomposition : x-1 par h, on obtient alors G(h).
- **c)** On multiplie G(h) par h^6, effectuer alors une division en puissances croissantes pour obtenir les coefficients $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, B.
- **d)** Ecrire la décomposition en éléments simples de F(x)

Partie E : Applications

I. Recherche de primitives d'une fraction rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont des polynômes.

1) Formulaire : (U est une fonction définie sur I, un intervalle de ℝ)

$\int \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{-1}{(\alpha-1).x^{\alpha-1}} + cte$; $\alpha \neq 1$; $x \neq 0$	$\int \frac{U'}{U^{\alpha}} dx = \frac{-1}{(\alpha-1).U^{\alpha-1}} + cte$; $\alpha \neq 1$; $U(x) \neq 0\ \forall x \in I$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x\rvert) + cte$; $x \neq 0$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(\lvert U\rvert) + cte$; $U(x) \neq 0\ \forall x \in I$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$; $x > 0$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$; $U(x) > 0\ \forall x \in I$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + cte$; $x \neq 0$	$\int \frac{U'}{U^2} dx = -\frac{1}{U} + cte$; $U(x) \neq 0\ \forall x \in I$
$\int \frac{1}{1+x^2} .dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2} .dx = \arctan(U) + cte$

Remarques : - La toute première formule vient de la formule puissance : $\int x^n .dx = \frac{x^{n+1}}{\alpha+1} + cte$, en effet :

$$\int \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \int x^{-\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + cte = \frac{x^{-(\alpha-1)}}{-(\alpha-1)} + cte = \frac{-1}{(\alpha-1).x^{\alpha-1}} + cte$$

- La dernière formule vient de la dérivée de la formule : $\tan(\arctan(x)) = x$, en effet :
$(\tan(\arctan(x)))' = (x)' \Leftrightarrow (\tan(\arctan(x)))' = 1$ (1)
Si on pose U(x) = arctan(x), alors :
$(\tan(\arctan(x)))' = (\tan(U(x)))' = U'(x).(1+\tan^2(U(x)) = (\arctan(x))'.(1+\tan^2(\arctan(x)) = (\arctan(x))'.(1+x^2)$,
donc : (1) devient : $(\arctan(x))'.(1+x^2) = 1 \Leftrightarrow (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

2) Exemples de Primitives d'une fraction rationnelle

- ✓ Calculer les primitives suivantes :

$\int \frac{1}{x-1} dx =$.. ; $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx =$..

$\int \frac{2}{2x-3} dx =$.. ; $\int \frac{2}{(2x-3)^5} dx =$..

$\int \frac{1}{5x+1} dx =$.. ; $\int \frac{1}{(5x+1)^7} dx =$..

$\int \frac{x}{x^2+1} dx =$.. ; $\int \frac{1}{x^2+1} dx =$..

$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx =$..

✓ Soit f, une fraction rationnelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x(x-1)^2}$

Calculer $\int f(x)dx$. Aucune formule du tableau précédent ne peut s'appliquer directement. Il faut d'abord écrire f(x) comme somme de fractions simples, appelées "éléments simples".
Comme on le verra en partie C, la décomposition en somme d'éléments simples de f est :
$f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{x}$
Déterminer alors les primitives de la fraction f :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

✓ Même question pour f, définie par : $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2+1}$

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

II. Transformation de Laplace

1) Formulaire

Définition Soit f, une fonction causale (i.e. $f(t) = 0\ \forall t < 0$) , on appelle transformée de Laplace de la fonction f, la fonction F, définie par : F(s)=$\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$
On note : T_L[f(t)]= F(s)=$\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$. Le tableau ci-après :

f, fonction causale	**T_L[f(t)]** ou F(s)
$\delta(t)$	1
U(t) ou 1	$\frac{1}{s}$
$t^n.U(t)$ ou t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos(\omega t).U(t)$ ou $\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).U(t)$ ou $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Si f est dérivable sur $[0, +\infty[$ f '(t)	s.F(s) - f(o)
Si f est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ f "(t)	s^2.F(s) - s.f(o) - f '(0)

2) Résolution d'une équation différentielle à l'aide de la transformation de Laplace

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformation de Laplace :

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2.U(t) \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1 \end{cases}$$

Réponse : $y(t) = (1 - e^{-t} + e^{-2t}).U(t)$
Indications : On pose Y(s), la transformée de Laplace de y(t) ; on applique la transformation de La place à l'équation complète, on obtient alors une équation algébrique d'inconnue Y(s), que l'on résout. Puis, on décompose Y(s) en somme d'éléments simples, et pour finir, on en déduit y(t) la transformée inverse de Y(s).

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

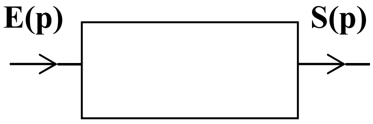
………………………………………………………………………………………...

3) Exemple de problème complet **:** Application de la décomposition en somme d'éléments simples et de la transformation de Laplace à l'étude des systèmes

a) Fonction de transfert d'un circuit

Soit S un circuit (RC, RLC…). Dans un tel circuit, un signal d'entrée e(t) (tension) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi réponse du circuit au signal e(t)).

On dit que le circuit S est linéaire lorsque e(t) et s(t) sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Le circuit est dit d'ordre n lorsque l'équation différentielle est d'ordre n **Le circuit est alors caractérisé par le schéma fonctionnel ci-dessous :**



b) Exemple de circuit du premier ordre Etude du filtre passe-haut.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :
s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t) ; s(0) = e(0) = 0. Soit S(p) =$\mathcal{L}$[s(t)] et E(p) = $\mathcal{L}$[e(t)].

- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).
- ✓ Montrer qu'après disparition du régime transitoire, la réponse de ce circuit à $e(t) = 5\cos(3t)$ est de la forme : $s(t) = 5A\cos[3t + \varphi]$ avec :
  $A = |H(3j)|$ et $\varphi = \text{Arg}(H(3j))$.

  Plus généralement, on admet que : Après disparition du régime transitoire, la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale $\mathbf{e(t) = e_0 \cos(\omega t)}$ est de la forme : $\mathbf{s(t) = e_0 A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]}$ avec :
  $\mathbf{A(\omega) = |H(j\omega)|}$ **et** $\mathbf{\varphi(\omega) = Arg(H(j\omega))}$

  ……………………………………………………………………………………..

  ……………………………………………………………………………………..

Partie F : Pour aller plus loin : racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

✓ Rappel Racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif : ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit $x \geq 0$, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ de x et on note $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$, le nombre réel y tel que $y^n = x$.

Remarques : pour n=2, on parle de racine carré, et pour n=3 de racine cubique.

Exemple : racine cinquième de 32 : ……………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

Remarque : y^n = ………………………………………………………………………

✓ **Définition Soit z un nombre complexe et n, un entier naturel n>1. On appelle racines $n^{\text{ième}}$ de z les nombres complexes y tels que $y^n = z$**

Remarque : le symbole $\sqrt[n]{\;}$ n'est plus utilisé lorsque le nombre sous le radical est complexe.

Théorème Soit z, un nombre complexe non nul, et n, un entier naturel n>1.
z admet exactement n racines $n^{\text{ième}}$, ce sont les solutions de l'équation $y^n = z$, que l'on peut résoudre en écrivant y et z sous forme exponentielle.

✓ Exemples

Déterminer les racines carrés de -1 dans l'ensemble des complexes :

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Déterminer et représenter graphiquement les racines cubiques de 1 dans l'ensemble des complexes :

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

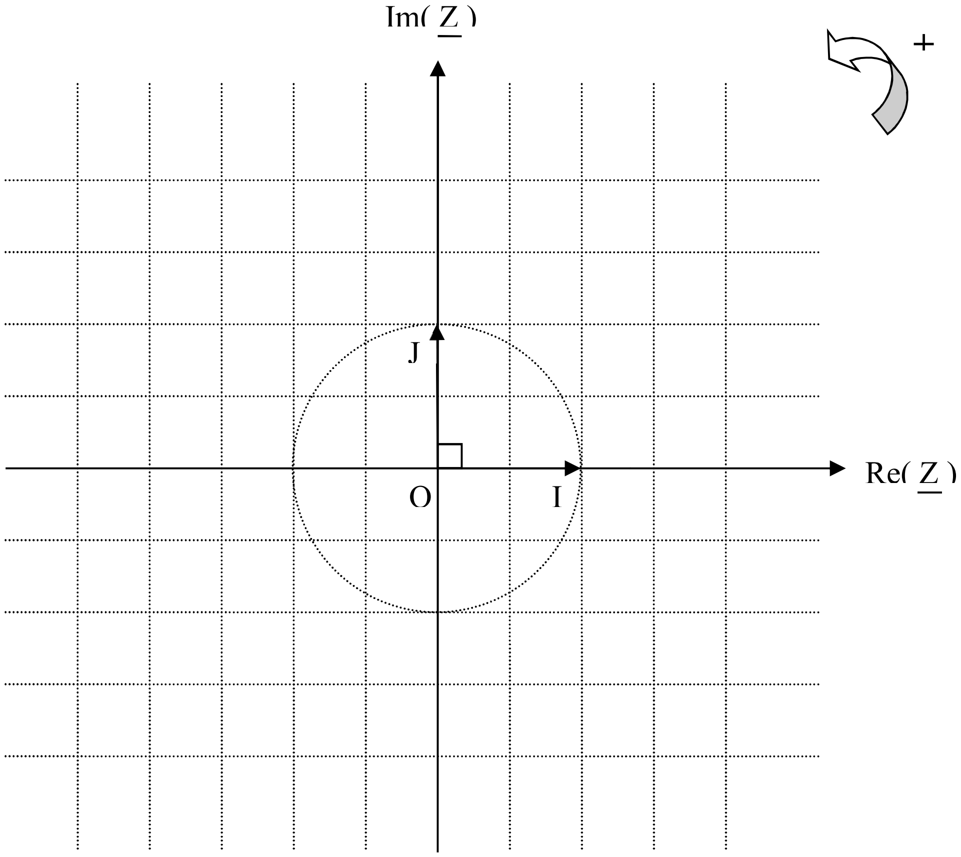
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………


Im(Z)
+
J
O
I
Re(Z)