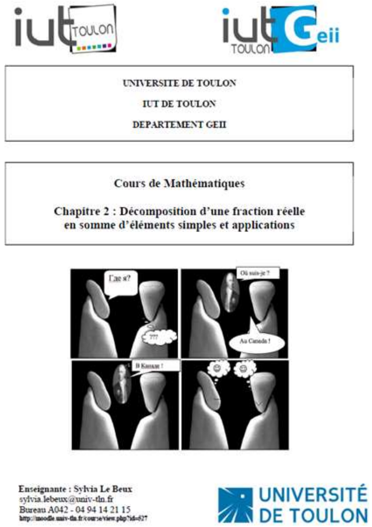
Sem 50 : TD Chapitre 2 – Synthèse et Exercices sur la factorisation de polynômes – Supplément pour les poursuites d'études

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :


UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 2 : Décomposition d'une fraction réelle en somme d'éléments simples et applications

Enseignante : Sylvia Le Beux

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> :

- Exercice 5 page 31
- Racines nième d'un nombre complexe page 38
- Factorisation de $Z^5 - 1$ page 16

Exercice 5 Factoriser le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x - 2j$ (on cherchera d'abord une racine évidente, puis on effectuera une division euclidienne)

Chapitre 2 page 31

$P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$: $P \in \mathbb{C}[X]$ et $P \notin \mathbb{R}[X]$

$P(j) = \underbrace{j^3}_{j^2 \cdot j} + 3j - 2j = -j + 3j - 2j = 0$

$P'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow P'(j) = 3j^2 + 3 = 0$

$P''(x) = 6X \Rightarrow P''(j) \neq 0$

j est racine double de P. P est divisible par $(X - j)^2$

$(X-j)^2 = X^2 - 2jX + j^2 = X^2 - 2jX - 1$

$$\begin{array}{l|l} X^3 + 3X - 2j & X^2 - 2jX - 1 \\ \cline{2-2} -(X^3 - 2jX^2 - X) & X + 2j \\ \cline{1-1} 2jX^2 + 4X - 2j & \\ -(2jX^2 + 4X - 2j) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x) = (X-j)^2 \cdot (X+2j)$

j racine double et $-2j$ racine simple.

Partie F : Pour aller plus loin : racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Chapitre 2 page 38

✓ <u>Rappel</u> Racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif : ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit $x \geq 0$, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ de x et on note $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$, le nombre réel y tel que $y^n = x$.

Remarques : pour n=2, on parle de racine carré, et pour n=3 de racine cubique.

Exemple : racine cinquième de 32 : $\sqrt[5]{32} = y$ tel que $y^5 = 32 = 2^5$

Donc $\sqrt[5]{32} = 2$

• racine cubique de 125 ?

Remarque : $y^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(x^{1/n}\right)^n = x^1$

✓ **<u>Définition</u> Soit z un nombre complexe et n, un entier naturel n>1. On appelle racines $n^{ième}$ de z les nombres complexes y tels que $y^n = z$**

Remarque : le symbole $\sqrt[n]{\ }$ n'est plus utilisé lorsque le nombre sous le radical est complexe.

Chapitre 2 page 38

<u>Théorème</u> Soit z, un nombre complexe non nul, et n, un entier naturel n>1.
z admet exactement n racines $n^{ième}$, ce sont les solutions de l'équation $y^n = z$, que l'on peut résoudre en écrivant y et z sous forme exponentielle.

✓ <u>Exemples</u>

Déterminer les racines carrés de -1 dans l'ensemble des complexes :

On résout $y^2 = -1 \iff y^2 = j^2 \iff y = j$ ou $-j$

les racines carrées de -1 sont j et $-j$

Déterminer et représenter graphiquement les racines cubiques de 1 dans l'ensemble des complexes :

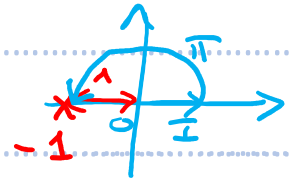
Déterminer et représenter graphiquement les racines cubiques de 1 dans l'ensemble des complexes :

On résout $\boxed{y^3 = -1 \quad (E)}$ a 3 solutions dans $\mathbb{C}$

Chapitre 2 page 39

On pose $y = \rho . e^{j\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta = \arg(y)$

$-1 = 1 . e^{j\pi}$



(E) devient : $\left(\rho . e^{j\theta}\right)^3 = 1 . e^{j\pi}$

$$\rho^3 . e^{3j\theta} = 1 . e^{j\pi}$$

$$(ab)^3 = a^3 b^3$$

$$\iff \begin{cases} \rho^3 = 1 \ ; \ \rho > 0 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$.

$$(E) \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont :

$$z_k = 1 . e^{j\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

une infinité ?

$Z_k = e^{j\left(\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}\right)}$; $k \in \mathbb{Z}$.

$Z_0 = e^{j\pi/3}$

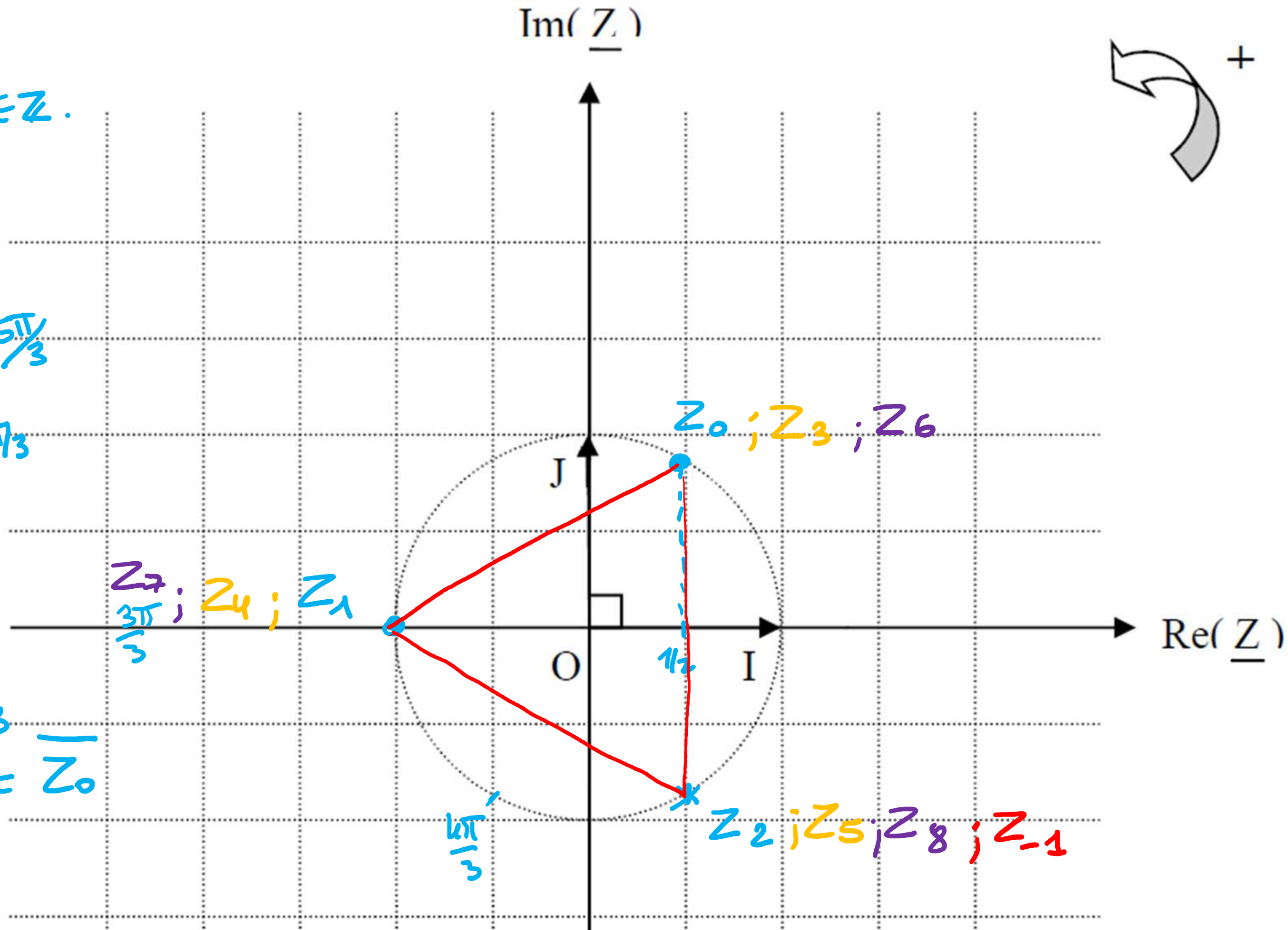
$Z_1 = e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{j\pi}$

$Z_2 = e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{j5\pi/3}$

$Z_3 = e^{j\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)} = e^{j\pi/3}$

$Z_4 = e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}\right)} = e^{j\pi}$

$Z_{-1} = e^{j\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{-j\pi/3} = \overline{Z_0}$



Chapitre 2 page 39

Conclusion : les racines cubiques de -1 sont donc : Z_{-1}, Z_0, Z_1

$e^{-j\pi/3}$; $e^{j\pi/3}$; $e^{j\pi} = -1$

✓ Exemple 2 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^5 - 1$.

Chapitre 2 page 16

Méth 1

$p(1) = 1^5 - 1 = 0$. 1 est racine simple de p. p est divisible par $z-1$.

$$
\begin{array}{r|l}
A = z^5 - 1 & z - 1 = B \\
\hline
-(z^5 - z^4) & z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = Q \\
\hline
z^4 - 1 & \\
-(z^4 - z^3) & \\
\hline
z^3 - 1 & \\
-(z^3 - z^2) & \\
\hline
z^2 - 1 & \\
-(z^2 - z) & \\
\hline
z - 1 & \\
-(z - 1) & \\
\hline
R = 0 &
\end{array}
$$

$p(z) = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

– Abandon –

Méth 2 On résout $z^5 - 1 = 0 \iff z^5 = 1$

On cherche les racines cinquièmes de 1
de l'unité.

On résout $z^{5} = 1$ (E) a 5 solutions dans $\mathbb{C}$.

On pose $z = \rho . e^{j\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta = \arg(z)$.

$1 = 1. e^{j.0}$

(E) devient alors : $(\rho . e^{j\theta})^5 = 1. e^{j.0}$

$$\rho^5 . e^{5j\theta} = 1. e^{j.0} \iff \begin{cases} \rho^5 = 1 \\ 5\theta = 0 + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{5} ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$Z_k = e^{2kj\pi/5} ; k \in \mathbb{Z}$.

$Z_0 = 1 ; Z_1 = e^{2j\pi/5} ; Z_2 = e^{4j\pi/5} ; Z_{-1} = e^{-2j\pi/5} ; Z_{-2} = e^{-4j\pi/5}$ sont les racines cinquièmes de l'unité.

$$P(z) = z^5 - 1 = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_{-1})(z - z_{-2})$$

la Factorisation dans $\mathbb{C}$ de P est donc:

$$z^5 - 1 = (z-1)\left(z - e^{2j\pi/5}\right)\left(z - e^{4j\pi/5}\right)\left(z - e^{-2j\pi/5}\right)\left(z - e^{-4j\pi/5}\right)$$

la Factorisation dans $\mathbb{R}$ est :

Méth 2

$$\left(z - e^{2j\pi/5}\right)\left(z - e^{-2j\pi/5}\right) = z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1$$

$$\left(z - e^{4j\pi/5}\right)\left(z - e^{-4j\pi/5}\right) = z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1$$

$$P(z) = (z-1)\boxed{\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)}$$

est la factorisation de p dans $\mathbb{R}$.

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$?

Méth 1 $\quad P(z) = (z-1)\boxed{\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right)}$

$$\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)$$

$$= z^4 - 2z^3\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + z^2 - 2z^3\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4z^2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + z^2$$
$$- 2z\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1$$

$$= z^4 - 2z^3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) + 2z^2\left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) - 2z\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) + 1$$

On identifie avec :

$= z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ et on obtient : $\begin{cases} \underbrace{\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}}_{\alpha + \beta} = -\frac{1}{2} & = -1/2 \\ \underbrace{\cos\frac{2\pi}{5} \times \cos\frac{4\pi}{5}}_{\alpha \times \beta} = -\frac{1}{4} & = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$$p(X) = X^2 - sX + p = 0$$

$s = \alpha + \beta$ $\quad p = \alpha + \beta$ où $p(\alpha) = p(\beta) = 0$

On résout alors :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

α et β sont donc solution de $X^2 - sX + p = 0$

$$X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4X^2 + 2X - 1 = 0$$

$\Delta = 4 + 16 = 20$ donc

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-2+\sqrt{20}}{8} = \dfrac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0 \text{ car } \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \\ X_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) < 0 \end{cases}$$

car $\dfrac{4\pi}{5} > \dfrac{4\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2}$