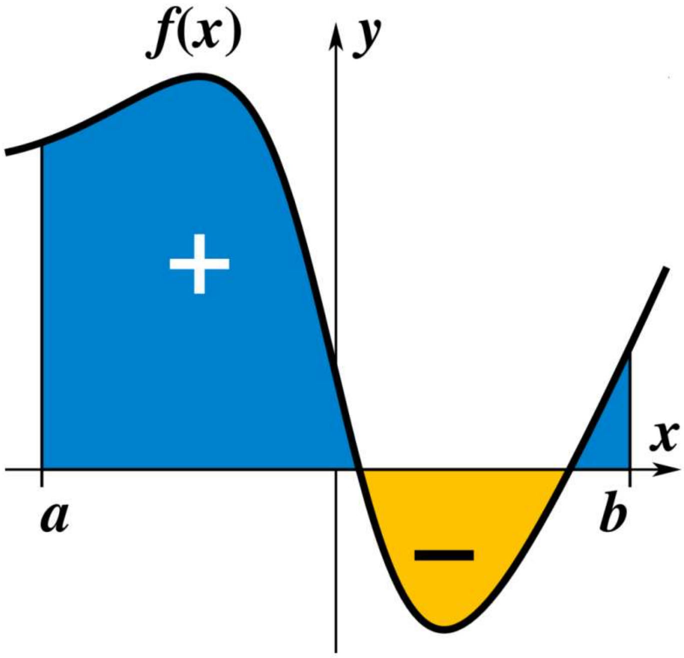
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques du semestre 2

Chapitre 4 : Calcul intégral



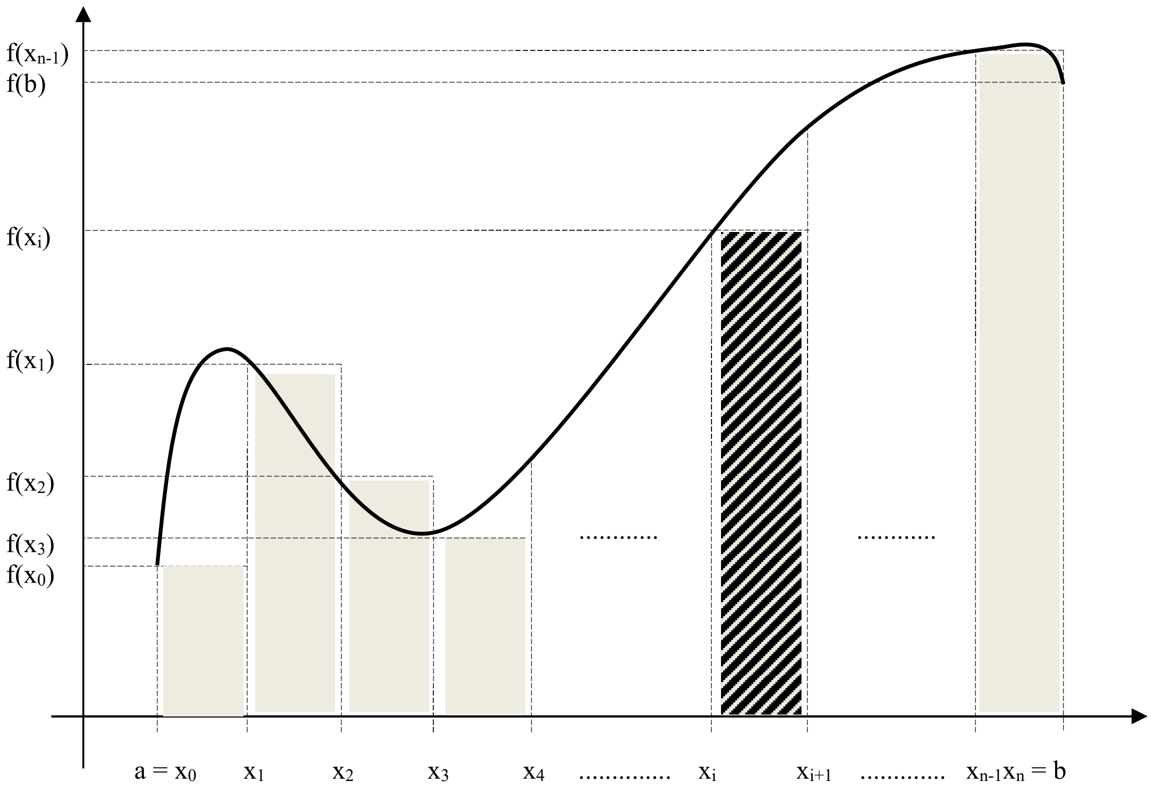
Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Table des matières du chapitre 4

Partie A : Définitions, propriétés et calculs de base

I. Généralités

1) Sommes de Riemann



Soit f, une fonction définie sur un intervalle [a,b]. On divise l'intervalle [a,b] en n sous intervalles de même longueur h, on a alors : $h = \frac{b-a}{n}$

On note $[x_0,x_1]$; $[x_1,x_2]$; $[x_2,x_3]$; $[x_3,x_4]$; … ;$[x_i,x_{i+1}]$;… ;$[x_{n-1},x_n]$, ces n intervalles, on a alors :

$x_0 = a$; $x_1 = a+h$; $x_2 = a+2h$; ... ; $x_i = a+ih$;…$x_{n-1} = a+(n-1)h$; $x_n = a+nh$

$h.f(x_i)$ est l'aire algébrique du rectangle hachuré.
Donc $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i)$ est l'aire algébrique de tous les rectangles.
Si n, le nombre de sous-intervalle tend vers l'infini, alors h tend vers 0.
On dit que la fonction f est intégrable sur [a,b] lorsque $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe et est finie, on note alors : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} S_n$.

- **Conséquence : La valeur de $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} S_n$ est donc l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation x=a et x=b .**
- **Théorème : Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]**

2) Exemple

a) Pré-requis 1 : Somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q\neq 1$.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

b) Pré-requis 2 : Limite à connaître : $\lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

c) A l'aide de la définition de l'intégrale ci-dessus, calculer $I = \int_0^1 e^x dx$

$a = 0$; $b = 1$; $h = 1/n$; $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1/n$; $x_2 = 2/n$; … ; $x_i = i/n$; …. ; $x_n = 1$.

Aire algébrique de tous les rectangles : $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}.e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}.\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$

Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$, on applique donc la formule du a)

$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$, et on obtient : $S_n = \frac{1}{n}.\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i = \frac{1}{n}.\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

Calculons alors $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)$, ce qui donne la forme indéterminée « $0\times\infty$ ».

Pour lever cette indéterminée, on pose le changement de variable $X = \frac{1}{n}$, et on utilise le b).

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{X\to 0}\left(X.\frac{1-e}{1-e^X}\right) = (1-e).\lim_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right)$$

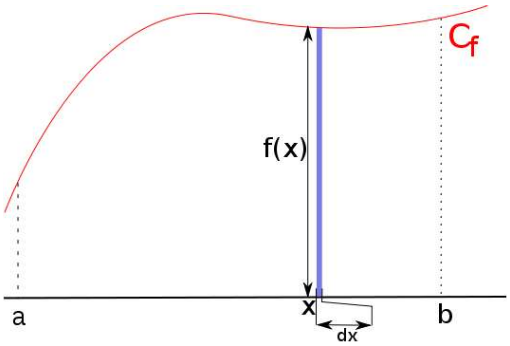
Comme $\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X} = 1$, alors $\lim_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right) = -\frac{1}{\lim_{X\to 0}\left(\frac{1-e^X}{X}\right)} = -1$,

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} S_n == (1-e).\lim_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right) = e-1$, il s'agit donc d'une limite finie.

La fonction exponentielle est donc intégrable sur [0 ;1], et : $\int_0^1 e^t dt = \lim_{n\to\infty} S_n = e-1$.

3) Remarques :

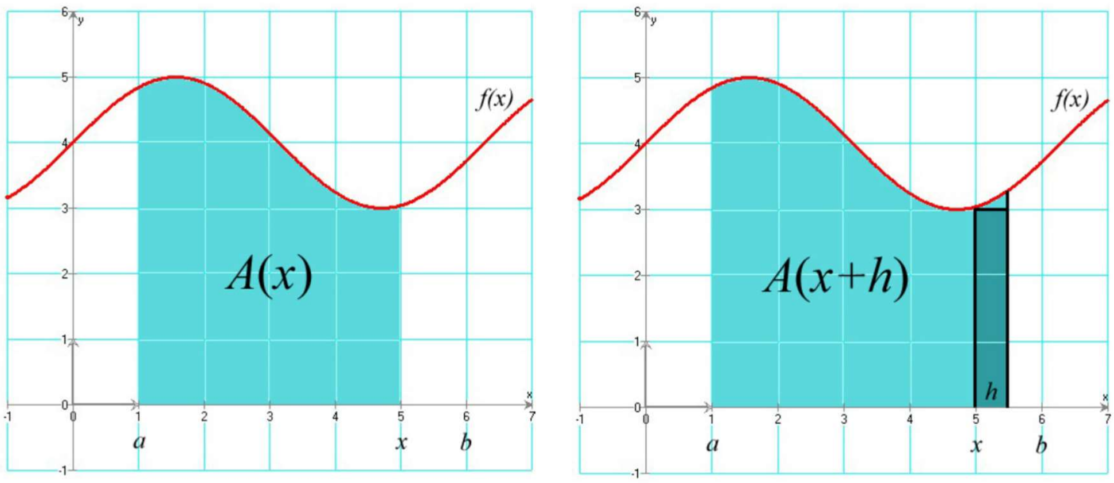
✓ Notation de l'intégrale : Il ne faut pas oublier dx !!!



dx est une variation infinitésimale de x.
f(x)dx est donc l'aire algébrique infinitésimale du rectangle de côtés f(x) et dx.
$\int_a^b f(x)dx$ est la somme continue des aires algébriques de ces rectangles lorsque x parcourt l'intervalle [a,b]
$\int_a^b f(x)dx$ est donc l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation x=a et x=b.

✓ Calcul d'une l'intégrale : Soit f, une fonction continue sur [a,b]. Calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la définition page 3 est trop long et fastidieux, recherchons une autre méthode.
Notons A(x) l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par a et x. A(a) = 0 et $A(b) = \int_a^b f(x)dx$
Supposons que x augmente de h, l'aire du domaine devient alors A(x+h).
Lorsque h est suffisamment petit, alors l'aire A(x+h) - A(x) est approximativement égale à l'aire du rectangle de côtés h et f(x) : $A(x+h) - A(x) \approx h.f(x)$
En divisant par h, on obtient : $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x)$

Ainsi : $\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$.
On reconnaît la définition de la dérivée de A en x, d'où l'égalité : $A'(x) = f(x)$



4) Fonctions primitives

> **Théorème Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$.**

Remarque Si G(x)=F(x)+Cte, alors G'(x) = F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$. G est donc aussi une primitive de f sur [a,b].
Reprenons notre calcul d'intégrale : Puisque $A'(x) = f(x)$, alors A est une primitive de f et A(x) = F(x) + Cte.
Comme A(a) = F(a) + Cte = 0, alors Cte = A(a) - F(a).
D'où le résultat suivant : A(b) = F(b) - F(a). Nous venons de montrer que $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$

Avant de calculer quelques intégrales, entraînons-nous à rechercher des primitives de fonctions usuelles.

Notation **on notera : $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :**

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

Exemples Compléter en s'aidant du tableau des primitives.

$I(x) = \int x^3\sqrt{x}\,dx$ ....

....

$J(x) = \int 3.\cos(3x-1)\,dx$ ....

....

$K(x) = \int 2.(2x+5)^{10}dx$ ....

....

$Q(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx$ ....

$L(x) = \int \frac{3x^2-1}{x^3-x+10}dx$ ....

....

$M(x) = \int 5.e^{5x}dx$ ....

....

$N(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ....

....

$P(x) = \int \frac{1}{(x+3)^2}dx$ ....

....

Tableau des Primitives

$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \; ; \; \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \; ; \; \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$	$\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\|x\|) + cte$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(\|U\|) + cte$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2} dx = -\frac{1}{U} + cte$
$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$
$\int (1+\tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1+\tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \arcsin(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}.dx = \arcsin(U) + cte$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \arccos(x) + cte$	$\int \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}.dx = \arccos(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$
$\int ch(x).dx = sh(x) + cte$	$\int U'.ch(U).dx = sh(U) + cte$
$\int sh(x).dx = ch(x) + cte$	$\int U'.sh(U).dx = ch(U) + cte$
$\int \frac{1}{ch^2(x)}.dx = th(x) + cte$	$\int \frac{U'}{ch^2(U)}.dx = th(U) + cte$
$\int (1-th^2(x)).dx = th(x) + cte$	$\int U'.(1-th^2(U)).dx = th(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.dx = \arg ch(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{U^2-1}}.dx = \arg ch(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.dx = \arg sh(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{U^2+1}}.dx = \arg sh(U) + cte$
$\int \frac{1}{1-x^2}.dx = \arg th(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1-U^2}.dx = \arg th(U) + cte$

5) Calcul d'intégrales à l'aide des primitives

Théorème : Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples et applications

- ✓ Compléter :

$I = \int_0^1 e^t dt =$ ....

$J = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx =$ ....

....

- ✓ Calculer la valeur moyenne d'un courant alternatif de la forme : $i(t) = \sin(\omega t)$

La valeur moyenne d'un signal f, T-périodique est égale à : $m = \frac{1}{T} . \int_0^T f(x)dx$

....

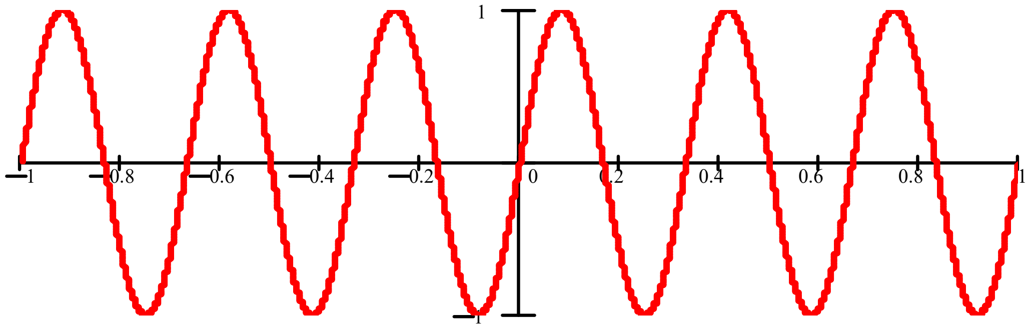
....

....

....

....

Etait-ce prévisible ?



II. Propriétés

1) Linéarité

Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

Exemples et applications

- ✓ $I = \int_{-1}^{1} (3x^7 + 2x^6 - 1)dx =$ ……………………………………………………………………

………

$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx =$ ……………………………………………………………………………

………

$L(x) = \int (5.\cos(2x) - e^{5x} + 9)dx =$ ………………………………………………………………

………

………

- ✓ Application

Déterminer la valeur efficace d'une tension sinusoïdale u, définie par : $u = U_m.\sin(\omega t + \varphi)$

La valeur efficace d'un signal f, T-périodique est égale à : $\mathbf{U_{eff}^2 = \frac{1}{T}.\int_0^T f^2(x)dx}$

………

………

………

………

………

………

2) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple Signal défini par morceaux : $f(x) = \begin{cases} x \ si \ 0 \leq x < 1 \\ -x + 4 \ \ si \ \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\int_0^2 f(x)dx =$ …………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… ……………………………………………	

Cas particulier $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt =$ …………………………………… ……………………

Donc : $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

3) Inégalités

Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b]$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Application Donner un encadrement de l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Partie B : Méthodes de calcul

I. Intégration par parties

1) La formule

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' sont continues sur [a,b].
On a alors : $\int_a^b \mathbf{u(t).v'(t)dt} = [\mathbf{u(t).v(t)}]_a^b - \int_a^b \mathbf{u'(t).v(t)dt}$

Démonstration

$[u(t).v(t)]' =$……………………………………………………………………………………………

$\int_a^b [u(t).v(t)]' \, dt =$……………………………………………………………………………………

………

Donc : $\int_a^b u(t).v'(t)dt =$……………………………………………………………………………

2) Remarques 1° Cette formule s'applique lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de fonctions qui n'est pas de la forme U'.f '(U) (voir les formules de la colonne droite du tableau p.7), et à condition que $\int_a^b u'(t).v(t)dt$ soit plus facile à calculer que $\int_a^b u(t).v'(t)dt$. C'est le cas, en particulier pour le produit :

- d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus, cosinus ou exponentielle (alors u est le polynôme)
- d'une fonction polynôme et d'une fonction logarithme (alors u est le logarithme)
- d'une fonction exponentielle et d'une fonction sinus ou cosinus (alors on peut choisir indifféremment l'une des deux fonctions pour u)

2° Il faut parfois répéter plusieurs fois l'intégration par parties.

3) Exemples Calculer les intégrales suivantes :

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t) \, dt$……………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

………

………

$L(t) = \int (t^5 - 3t + 2).\ln(t)\,dt$ = ……………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$J(t) = \int \ln(t)dt$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$K = \int_0^3 (x-3)^2.e^{5x}dx$……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

II. Changement de variables

1) La formule

Soit f, une fonction continue sur [a,b]. Soit $I = \int_a^b f(x)dx$.

On pose $x = \varphi(t)$, où φ est une fonction telle que : $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, φ est bijective et dérivable sur $[\alpha,\beta]$ si φ est croissante (et $[\beta,\alpha]$ sinon).

On a alors : $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)dt$, et :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

2) Exemples

Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, en utilisant le changement de variable : $x = \sin(t)$

………

………

………

………

………

………

………

Calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, en utilisant le changement de variable : $t = \sqrt{x}$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. Intégrale de fonctions paires / impaires, périodiques

1) Intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en 0

Soit f, une fonction paire et continue sur [-a,a]. On a alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{2.}\int_{0}^{a} \mathbf{f(x)dx}$.

Rappel fonction paire

Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite paire lorsque : $\forall x \in D \;\; f(-x) = f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On étudie alors f sur $D \cap \mathbb{R}_+$

Démonstration

	$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx =$ ………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… ………………………………………………… …………………………………………………

Exemple $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx =$…………………………………………………………………………………………

……

2) Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0

Soit f, une fonction impaire et continue sur [-a,a]. On a alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Rappel fonction impaire

Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite impaire lorsque : $\forall x \in D\ \ f(-x) = -f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère. On étudie alors f sur $D \cap \mathbb{R}_+$

Démonstration

	$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx =$ ………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ……………………………………………… ………………………………………………

Exemple $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t).\sin^4(t)dt =$……………………………………………………………………..........................

………..................................

………...............................

3) Intégrale d'une fonction périodique sur un période

Soit f, une fonction T-périodique, continue sur tout intervalle [a,a+T]. On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Rappel fonction périodique

Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite périodique lorsqu'il existe un réel T>0, le plus petit possible tel que : $\forall x \in D \ f(x+T) = f(x)$. Sa représentation graphique est obtenue par translation on étudie f sur un intervalle de longueur T.

Démonstration

	$\int_a^{a+T} f(x)dx =$ ……………………………………
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….
	……………………………………………….

Exemple $\int_0^{2\pi} \cos^2(t).\sin^3(t)dt =$…………………………………………………………………..........................

………………………………………………………………………………………………….........................

………………………………………………………………………………………………….........................

………………………………………………………………………………………………….........................

………………………………………………………………………………………………….........................

IV. Intégrale d'une fraction rationnelle

1) Introduction et Définitions

Une fraction rationnelle est une fonction f, définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont des polynômes à coefficients réels. f est alors continue sur $\mathbb{R}$ privé des racines du polynôme B.
On appelle pôles de la fraction f, les racines de son dénominateur B.

Quelques formules nous permettent d'intégrer certaines fractions rationnelles :

$$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(|U|) + cte \;;\; \int \frac{U'}{1+U^2} .dx = \arctan(U) + cte \;;\; \int \frac{U'}{U^n} dx = -\frac{1}{(n-1)U^{n-1}} + cte.$$

Par exemple :

$$\int \frac{5x^4 - 6x^2 + 8}{x^5 - 2x^3 + 8x - 1} dx = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$\int \frac{dx}{(x-3)^7} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Que faire lorsqu'aucune des formules ne peut être appliquée ? La seule solution consiste à **décomposer en somme d'éléments simples** la fraction rationnelle.

Décomposer une fraction rationnelle f, définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, en somme d'éléments simples, consiste à l'écrire comme somme de fractions les plus simples possibles.
Il existe deux types d'élément simple :

- **les élements simples de première espèce : $\frac{a}{x-x_0}, \frac{a}{(x-x_0)^n}$**
- **les éléments simples de seconde espèce : $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}, \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$**

où le polynôme $x^2 + cx + d$ est à racines complexes conjuguées.

2) La décomposition en somme d'éléments simples par l'exemple

Exemple 1 Déterminer : $L(x) = \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$f(x) = \frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$, sur $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$. (-1 et 2 sont les pôles simples de f)

En fait : $$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}}$$

Eléments simples de « première espèce »

« On décompose en somme d'éléments simples »

« On réduit au même dénominateur »

Pour calculer les coefficients a et b, il existe plusieurs méthodes :

- ou bien réduire au même dénominateur :
  $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}$, puis identifier avec $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ (ce qui peut être long et pénible !)

- ou encore, plus rapide (et peut même se calculer de tête) avec les formules suivantes :
  $\boldsymbol{a} = [(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{1}} = \left[\frac{1}{x-2}\right]_{x=-1} = -\frac{1}{3}$ et de même : $\boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{2}} = \frac{1}{3}$

  En effet, pour le calcul de a, en multipliant la fraction par (x+1), on isole a :
  $$(x+1)f(x) = \frac{1}{(x-2)} = a + \frac{b(x+1)}{x-2}$$
  puis en posant x = -1, on élimine b d'où le résultat suivant : $0 = \frac{1}{(-1-2)} = a + 0$

  En résumé, on retiendra que $\boldsymbol{a} = [(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{1}}$

Ainsi : $L(x) = \int \frac{dx}{x^2-x-2} = -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + \text{Cte} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \text{Cte}$

Exemple 2 Déterminer : $M(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}$, sur $\mathbb{R} - \{3\}$. (remarque : x^2+1 est à racines complexes i et –i)

$$\text{En fait : } \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{2x+1}}{\boldsymbol{(x^2+1)(x-3)}} = \frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{x^2+1}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{x-3}}$$

Eléments simples de « seconde espèce » et de « première espèce »

- Calcul de c : $\boldsymbol{c} = [(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{3}} = \left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right]_{x=3} = \frac{7}{10}$
- Pour calculer les coefficients a et b, il existe plusieurs méthodes :

Méthode 1 : $\boldsymbol{ai+b} = [(\boldsymbol{x^2+1})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{i}}$	Méthode 2 : **(a,b) est la solution du système contenant les 2 équations f(0) et** $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{xf(x)}$
En effet, en multipliant la fraction par (x²+1), on isole a et b : $(x^2+1)f(x) = \frac{2x+1}{x-3} = ax+b+\frac{c(x^2+1)}{x-3}$ puis en posant x = i, on élimine c d'où le résultat suivant : $\frac{2i+1}{i-3} = ai+b$ $\Leftrightarrow ai+b = \frac{(2i+1)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)}$ $\Leftrightarrow ai+b = -\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{10} \\ a = -\frac{7}{10} \end{cases}$ Remarque : cette méthode est utilisée lorsque les racines complexes sont simples (i et –i, ou 2i et -2i…). Et que d'autres coefficients sont à calculer à l'aide de la méthode 2 (voir exemple 3)	$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{-3} = b + \frac{c}{-3} \\ \lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2}{x^2}+\frac{cx}{x}\right) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{10} \\ a+c=0 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{10} \end{cases}$ Remarque : cette méthode est utilisée lorsque les racines complexes sont trop compliquées.

$$M(x) = \int\frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx = -\frac{1}{10}\int\frac{7x+1}{x^2+1}dx + \frac{7}{10}\int\frac{dx}{x-3} = -\frac{7}{20}\ln(x^2+1) - \frac{1}{10}\arctan(x) + \frac{7}{10}\ln|x-3| + \text{Cte}$$

Exemple 3 Déterminer : $N(x) = \int \frac{x^2+x}{(x-2)(x+1)^4}dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)^4} = \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}, \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1; 2\}.$$

Remarques : -1 est un **pôle triple de f** ou de multiplicité 3 et on a **réduit la fraction**, car A et B possédait un facteur commun : x+1.

$$\text{En fait : } \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x-2)(x+1)^3}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{(x+1)^3}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{(x+1)^2}} + \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{x+1}}$$

- Calcul de a : $\boldsymbol{a} = [(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{2}} = \left[\frac{x}{(x+1)^3}\right]_{x=2} = \frac{2}{27}$

Eléments simples de « première espèce »

- Calcul de b : $\boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{x+1})^3\boldsymbol{f(x)}]_{x=-1} = \left[\frac{x}{x-2}\right]_{x=-1} = \frac{1}{3}$
- Calcul de c et d : la méthode précédente ne fonctionne plus.
  En effet, $[(x+1)^2 f(x)]_{x=-1} = \left[\frac{x}{(x-2)(x+1)}\right]_{x=-1}$ = division par zéro ! On applique alors la méthode 2 (voir exemple précédent)

$$\begin{cases} f(0) = 0 = \dfrac{a}{-2} + b + c + d \\ \lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax}{x} + \dfrac{bx}{x^3} + \dfrac{cx}{x^2} + \dfrac{dx}{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = \dfrac{8}{27} \\ a + d = 0 \Leftrightarrow d = -\dfrac{2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{2}{9} \\ d = -\dfrac{2}{27} \end{cases}$$

$$N(x) = \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}dx = \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$N(x) = \frac{2}{27} ln|x-2| - \frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{(x+1)} - \frac{2}{27} ln|x+1| + Cte$$

<u>Remarque</u> : Si -1 avait été un pôle de multiplicité supérieur à 3, exigeant plus de deux équations, on aurait pu utiliser la méthode de la division suivant les puissances croissantes (voie exercices).

<u>Exemple 4</u> Déterminer $Z(x) = \int \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2}dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = \frac{x^4-4x^2-x+3}{(x+1)(x-2)}, \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1; 2\}.$$

Attention !!! Ici le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, cette fraction possède donc une partie entière !! Pour la déterminer, il faut effectuer la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes)

$$\begin{array}{r|l} A(x) = x^4 - 4x^2 - x + 3 & x^2 - x - 2 = B(x) \\ \cline{2-2} -(x^4 - x^3 - 2x^2) & x^2 + x - 1 = Q(x) \\ \cline{1-1} x^3 - 2x^2 - x + 3 & \\ -(x^3 - x^2 - 2x) & \\ \cline{1-1} -x^2 + x + 3 & \\ -(x^2 + x + 2) & \\ \cline{1-1} R(x) = 1 & \end{array}$$

A = BQ+R

$$\boldsymbol{f = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = \underbrace{Q}_{\text{Partie entière de la fraction f}} + \frac{R}{B}}$$

Ainsi $f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = x^2 + x - 1 + \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

Et $Z(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + Cte$ (voir exemple 1)

3) <u>Synthèse</u>

Pour décomposer une fraction rationnelle f, définie par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}}$, en somme d'éléments simples, il faut procéder en plusieurs étapes :

1) Réduire la fraction si A et B ont un facteur commun,
2) Déterminer et mettre de côté la partie entière si deg(A)≥ $\boldsymbol{deg(B)}$,
3) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples et calculer les coefficients. $\boldsymbol{f = Q + \frac{R}{B}}$ avec $\boldsymbol{g = \frac{R}{B}}$ et :

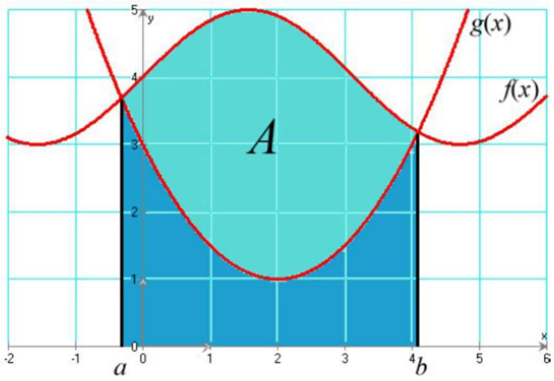
$$\boldsymbol{g(x) = \frac{R(x)}{(x-x_0)^n(x^2+dx+k)^p \ldots}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{a_n}{(x-x_0)^n} + \frac{a_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x-x_0} + \frac{b_px+c_p}{(x^2+dx+k)^p} + \frac{b_{p-1}x+c_{p-1}}{(x^2+dx+k)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1x+c_1}{x^2+dx+k} + \cdots}$$

où le polynôme $\boldsymbol{x^2+dx+k}$ est à racines complexes conjuguées $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\overline{\alpha}}$

$\boldsymbol{a_n = [(x-x_0)^n g(x)]_{x=x_0}}$; $\boldsymbol{b_p\alpha + c_p = [(x^2+dx+k)^p g(x)]_{x=\alpha}}$ etc… Pour obtenir les autres coefficients, on pourra remplacer x par autant de valeurs à déterminer et résoudre le système. L'équation $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)}$ est très intéressante, puisqu'elle est toujours simple à résoudre.

Partie C : Applications

I. Aire entre deux courbes



Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] telles que : $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. L'aire A, du domaine délimité entre les deux courbes est alors donnée par :

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Exemple

Soit f et g définies sur [0 ;1] par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Déterminer A, l'aire du domaine délimité entre les courbes représentant f et g sur l'intervalle [0 ;1]

…………………………………………………………………….

…………………………………………………………………….

…………………………………………………………………….

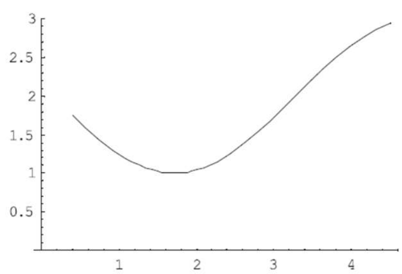
…………………………………………………………………….

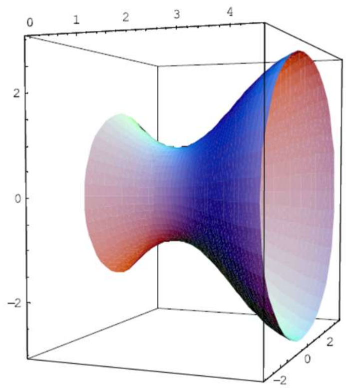
…………………………………………………………………....

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

II. Volume d'un solide de révolution





Soit f, une fonction positive et continue sur [a,b]. Le Volume V du solide généré par la révolution autour de l'axe (Ox) de la portion de courbe d'équation y = f(x) comprise entre x = a et x = b est obtenue par la formule : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Exercices

Calculez le volume des solides générés par la révolution autour de l'axe (Ox) des courbes suivantes et donnez le nom de ces solides

1° y = 4 $-1 \leq x \leq 3$

2° y = 3x $0 \leq x \leq 2$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. Longueur d'une courbe plane

Soit f, une fonction à dérivée continue sur un intervalle [a,b].
La longueur L de la courbe d'équation y = f(x) de a à b est donnée par la formule suivante :

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Exercices

a. Calculez la longueur de la courbe d'équation y = 2x entre les points (1;2) et (2;4) en utilisant la formule ci-dessus, puis vérifier votre réponse à l'aide du théorème de Pythagore.

b. Calculez la longueur de la courbe d'équation y = $x^{\frac{3}{2}} - 1$ de x = 0 à x = 1.

………

………

………

………

………

………

………

………

Partie D : Exercices

Exercice 1 A l'aide de formules usuelles, calculer :

$$I(x)=\int\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2}dx \ ;\ J=\int_1^2\frac{x+2}{x^2+4x+3}dx \ ;\ K=\int_1^e\frac{\ln^4(t)}{t}dt \ ;\ L(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}} \ ;$$

$$M(x)=\int\frac{x+2}{x^2-2x-3}dx \ ;\ N(x)=\int\frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx \ ;\ P=\int_0^1\frac{dx}{x^2-4x+5} \ ;\ Q=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x.dx$$

Exercice 2 A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\pi}(2x+1).\sin(3x).dx \ ;\ J=\int_0^1\arctan x.dx \ ;\ K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x.dx \ ;\ L(x)=\int\frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}dx$$

Exercice 3 A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{(1+\sin(t))^2}dt \ ;\ K=\int_1^e\frac{\ln^3(t)+\ln^2(t)+1}{t}dt \ ;$$

$$L=\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$ (on posera x=tan(t)).

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_{-7\pi}^{7\pi}\cos^2(x)\sin^3(5x).dx \ ;\ J=\int_1^2\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx \ ;\ K(x)=\int(1+\tan^2(x)).\tan^3(x).dx \ ;$$

$$L(x)=\int\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.dx \ ;\ M(x)=\int x^2e^{3x}.dx \ ;\ N=\int_0^1\frac{dt}{e^{-t}+1} \ ;\ P=\int_1^3\frac{x}{x^4+1}dx \ ;$$

$$Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x).\sin^5(x).dx \ ;\ R=\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{e^{3x}}} \ ;\ T(x)=\int\frac{dx}{x^2-6x+13} \ ;$$

$$U(x)=\int\frac{x^4}{x^4+2x^3-2x-1}dx \ ;\ V(t)=\int(t^3+2t+3).\ln(t).dt$$

Partie E : Intégrales généralisées

Rappel Toute fonction f, continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b].

Que se passe-t-il lorsque la fonction f n'est pas continue en b (ou en a) ? ou encore lorsque b= ∞ (ou a=- ∞) ?

I. Généralités

1) Intégrale généralisée ou impropre

Définition On appelle intégrale généralisée ou impropre, toute intégrale de la forme :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$ **où f est continue sur** $[a,+\infty[$

ou bien $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ **où f est continue sur** $]-\infty, a]$

ou bien $\int_a^{b} f(x)dx$ **où f est continue sur** $[a, b[$

ou bien $\int_a^{b} f(x)dx$ **où f est continue sur** $]a, b]$

Exemples Les intégrales suivantes sont généralisées :

- ✓ $\int_0^{\infty} e^{-3t}dt$; $\int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt$; $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}dt$; $\int_0^{1} \frac{1}{t^3}dt$; $\int_1^{2} \frac{1}{(2-t)^4}dt$;
- ✓ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2}dt$ ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- ✓ $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^3}dt$ =……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- ✓ $\int_0^{1} \frac{1}{t^3}dt$ =……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Nature d'une intégrale généralisée

Dans ce paragraphe, on notera toutes les intégrales généralisées de la forme $\int_a^b f(x)dx$, où f est localement intégrable sur $[a, b[$ (ou]a,b]) et $b \in \mathbb{R}$ ou b= ∞ (resp. a $\in \mathbb{R}$ ou a= $-\infty$)

Définition Soit f, une fonction localement intégrable sur $[a;b[$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$).

Si la limite : $\lim\limits_{X \to b} \int_a^X f(t)dt$ existe et est finie, on dit alors que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on note : $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{X \to b} \int_a^X f(t)dt$.

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

Remarques

- ✓ Dans le cas où b est un nombre réel, la limite à déterminer sera alors : $\lim\limits_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$
- ✓ Si f est continue sur]a,b], la limite à déterminer sera alors : $\lim\limits_{X \to a^+} \int_X^b f(t)dt$

Exemples Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

- ✓ $I=\int_0^\infty e^{-t}dt$ ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- ✓ $J=\int_{-\infty}^2 e^{t}dt$ ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- ✓ $K=\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt$

……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

✓ L= $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$

………

………

………

………

………

✓ M= $\int_1^2 \frac{1}{(2-t)^\alpha}dt$

………

………

………

………

………

4) Relation de Chasles

Soit I= $\int_a^b \mathbf{f(t)dt}$ **, une intégrale généralisée en a et b (réels ou infinis), et** $c \in]a,b[$**.**

I converge si et seulement si les intégrales généralisées $\int_a^c \mathbf{f(t)dt}$ **et** $\int_c^b \mathbf{f(t)dt}$ **convergent.**

5) Exercice **:** Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$I = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t.\ln t}$, $J = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ (on pourra effectuer le changement de variable : $t = \frac{1+u}{2}$).

Notes

Partie E : Intégrales généralisées pour aller plus loin...

II. Intégrales de référence

1) Intégrales exponentielles

Les intégrales $\int_{-\infty}^{a} e^{mt}dt$ et $\int_{a}^{\infty} e^{-mt}dt$ convergent si et seulement si m>0.

2) Intégrales de Riemann

Résultat 1 **Les intégrales de Riemann : $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$**

Résultat 2 **Les intégrales de Riemann : $\int_{0}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$**

Résultat 3 **Les intégrales de Riemann : $\int_{a}^{b} \frac{1}{(b-t)^{\alpha}}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$**

III. Nature de l'intégrale généralisée d'une fonction de signe constant

Dans ce paragraphe, on notera toutes les intégrales généralisées de la forme $\int_{a}^{b} f(x)dx$, où f est localement intégrable sur $[a,b[$ (ou]a,b]) et b $\in \mathbb{R}$ ou b= ∞ (resp. a $\in \mathbb{R}$ ou a= $-\infty$)

1) Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions localement intégrables et positives sur [a ;b[telles que, pour tout x $\in$ [a ;b[:
$0 \le f(x) \le g(x)$.

- Si $\int_{a}^{b} g(t)dt$ converge, alors $\int_{a}^{b} f(t)dt$ converge

- Si $\int_{a}^{b} f(t)dt$ diverge, alors $\int_{a}^{b} g(t)dt$ diverge.

Remarque Pour étudier l'intégrale généralisée $\int_{a}^{b} h(x)dx$ où $h(x) \le 0 \ \ \forall x \in [a,b[$, on pourra appliquer le théorème précédent à l'intégrale généralisée $\int_{a}^{b} -h(x)dx$.

Exemples Déterminer la nature des intégrales suivantes :

✓ K= $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ ……………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

- ✓ $L=\int_{2}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ ……………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

2) Théorème de l'équivalence

Si f et g sont deux fonctions localement intégrables et positives sur [a ;b[telles que : $f(x)\underset{b}{\sim}g(x)$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exemples Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{x+5}{(x^2+1)\sqrt{x}}dx$ ……………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

Remarques

- ✓ Si f est localement intégrable sur [a,b[et si b est un réel fini , on cherchera un équivalent de la fonction f en b^- .
- ✓ Si f est localement intégrable sur]a,b] et si a est un réel fini , on cherchera un équivalent de la fonction f en a^+ .

Conséquences

- ✓ **Si f est localement intégrable sur [a,b[et prolongeable par continuité en b réel fini, alors $f(x)\underset{b^-}{\sim}cte$ et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge.**
- ✓ **Si f est localement intégrable sur]a,b] et prolongeable par continuité en a réel fini, alors $f(x)\underset{a^+}{\sim}cte$ et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge.**

Exemple Déterminer la nature de l'intégrale généralisée suivante : $I=\int_{0}^{1}\frac{\sin(x)}{x}dx$

……………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

IV. Nature de l'intégrale généralisée d'une fonction de signe non constant

Dans ce paragraphe, on notera toutes les intégrales généralisées de la forme $\int_a^b f(x)dx$ où f est continue sur $[a, b[$ (ou]a,b]) et b est soit un réel soit ∞ (resp. a est soit un réel soit $-\infty$)

1) Théorème de la convergence absolue

> **Soit f une fonction localement intégrable sur [a ;b[, si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.**
> **De plus, on a l'inégalité : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.**

Exemples Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

I= $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ ………………………………………………………………………………….. ..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Vocabulaire Lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergent

V. Exercices

Exercice 1 : Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$I = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t.\ln t}$, $J = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ (on pourra effectuer le changement de variable : $t = \frac{1+u}{2}$).

Exercice 2 : A l'aide du théorème de comparaison, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + \cos^2(t)}$; $J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{E(t)}}$ où E est la fonction partie entière ; $K = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$; $L = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^3} dx$;

$M = \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + \ln x} dx$; $N = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x} dx$

Exercice 3 : A l'aide du théorème de l'équivalence, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$I = \int_0^{+\infty} \frac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8 + t^4 + 1)}} dt$; $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$; $K = \int_0^1 \frac{1}{\sin x.\sqrt{\cos x}} dx$; $L = \int_0^2 x^\alpha.(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})dx$

Exercice 4 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt$; $J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$; $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}$; $M = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ (on effectuera une intégration par parties pour la borne infinie) ; $N_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\beta)} dt$ où α et β sont deux réels.

Exercice 5 : Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x).dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x.\sin x).dx$

1) Montrer que l'intégrale I est convergente.
2) Montrer que J=2I.
3) En remarquant que $\cos x.\sin x = \frac{\sin(2x)}{2}$ pour tout réel x , et en effectuant des changements de variable, calculer I.

<u>Notes</u>