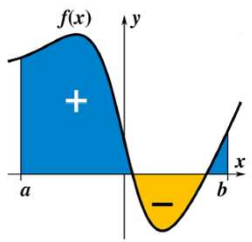
Poursuites d’études 2 : Les Intégrales généralisées – Partie 1/3

- Consignes à suivre pour les TD à distance :

UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques du semestre 2
Chapitre 4 : Calcul intégral

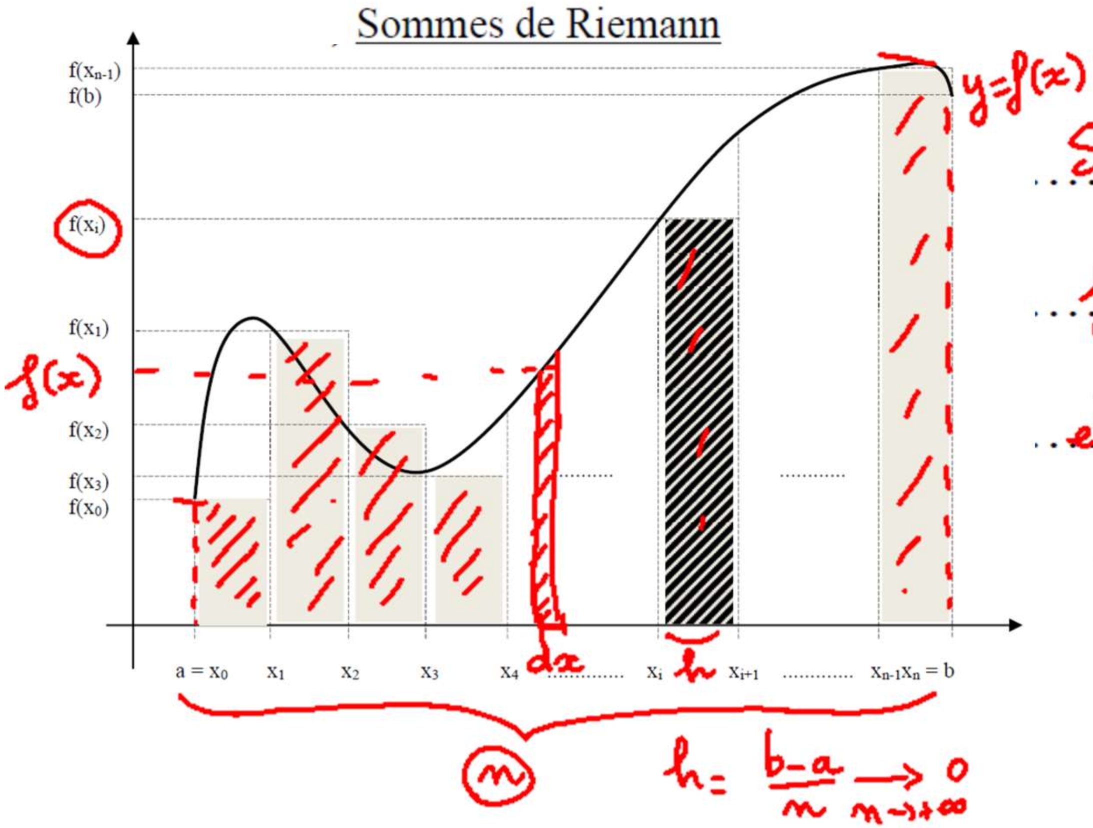


- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance :

- Rappels, définitions, exemples,
- Intégrales de Riemann
- Exercices.

Rappel sur la définition d'une intégrale sur un intervalle fermé de l'ensemble des réels.



Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} h . f(x_i)$ existe et est finie alors f est intégrable sur $[a,b]$

et on note :

somme continue — somme discrète

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} h . f(x_i)}$$

$x \in [a,b]$

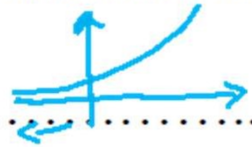
Théorème

Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]

$$\int_0^{\boxed{\infty}} e^{-3t}dt \ ; \ \int_{\boxed{-\infty}}^{0} e^{2t}dt \ ; \ \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}dt \ ; \ \int_0^1 \frac{1}{t^3}dt \ ; \ \int_1^2 \frac{1}{(2-t)^4}dt \ ;$$

$t \longmapsto e^{-3t} \in C^0(\mathbb{R})$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\int_0^x e^{-3t}dt = \left[\frac{e^{-3t}}{-3}\right]_0^x = -\frac{1}{3}\left(e^{-3x} - e^0\right) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3x}\right)$$



$$\int_0^\infty e^{-3t}dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-3t}dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{-3x}}\right) = \frac{1}{3}$$

$\int_0^\infty e^{-3t}dt = \frac{1}{3}$ elle converge vers $\frac{1}{3}$.

$t \longmapsto e^{2t} \in C^0(\mathbb{R})$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 e^{2t}dt = \dots$$

On dit qu'une fonction est localement intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, lorsqu'elle est intégrable sur tout intervalle fermé de I.

Page 24 du chapitre 4

Chapitre 4 : Calcul intégral

Partie E : Intégrales généralisées

I. Généralités

1) Intégrale généralisée ou impropre

Définition On appelle intégrale généralisée ou impropre, toute intégrale de la forme :

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ où f est localement intégrable sur $[a,+\infty[$

ou bien $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ où f est localement intégrable sur $]-\infty,a]$

ou bien $\int_a^{b} f(x)dx$ où f est localement intégrable sur $[a,b[$

ou bien $\int_a^{b} f(x)dx$ où f est localement intégrable sur $]a,b]$

<u>Exemples</u> Les intégrales suivantes sont généralisées :

✓ $\int_0^{\boxed{\infty}} e^{-3t}dt$; $\int_{\boxed{-\infty}}^0 e^{2t}dt$; $\int_1^{\boxed{\infty}} \frac{1}{t^2}dt$; $\int_{\boxed{0}}^1 \frac{1}{t^3}dt$; $\int_1^{\boxed{2}} \frac{1}{(2-t)^4}dt$;

* $\int_x^0 e^{2t}dt = \frac{1}{2}\left[e^{2t}\right]_x^0 = \frac{1}{2}\left(1-e^{2x}\right)$

$\int_{-\infty}^0 e^{2t}dt = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(1-e^{2x}\right) = \frac{1}{2}$

* $t \longmapsto \frac{1}{t^2} \in C^0(\mathbb{R}^*)$ et est localement intégrable $[1;+\infty[$.

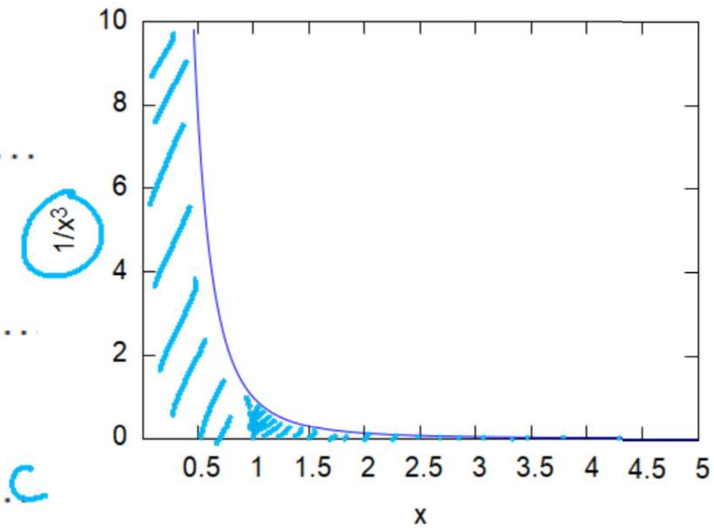
$\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$; $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

* $t \longmapsto \frac{1}{t^3} \in C^0(]0;1])$, est localement intégrable sur $]0;1]$.

* $t \longmapsto \frac{1}{(2-t)^4} \in C^0([1;2[)$

✓ $\displaystyle\int_0^{\boxed{+\infty}} \frac{1}{(t-1)^2}\,dt = \int_0^{\boxed{1}} \frac{dt}{(t-1)^2} + \int_{\boxed{1}}^{\boxed{+\infty}} \frac{dt}{(t-1)^2} = \int_0^{\boxed{1}} \frac{dt}{(t-1)^2} + \int_{\boxed{1}}^{2} \frac{dt}{(t-1)^2} + \int_2^{\boxed{+\infty}} \frac{dt}{(t-1)^2}$

✓ $\displaystyle I = \int_1^{\boxed{\infty}} \frac{1}{t^3}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^3}\,dt = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2}\right]_1^x$

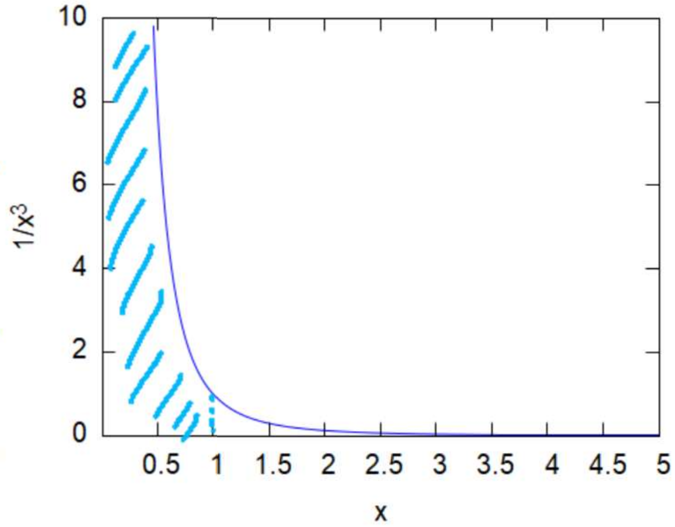


$t \longmapsto \frac{1}{t^3} \in C^0([1;+\infty[)$

$\displaystyle\frac{1}{t^3} = t^{-3} \qquad \int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \Rightarrow \int t^{-3}\,dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{-2t^2} + C$

$\displaystyle I = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{1}{2}$

$$\checkmark J=\int_0^1 \frac{1}{t^3}\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t^3}\,dt = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2}\right]_x^1$$



$$J = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$-\frac{1}{2}\times(1-\infty)$$

$\int_0^1 \frac{1}{t^3}\,dt$ diverge.

2) <u>Nature d'une intégrale généralisée</u>

Dans ce paragraphe, on notera toutes les intégrales généralisées de la forme $\int_a^b f(x)dx$, où f est localement intégrable sur $[a,b[$ (ou]a,b]) et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \infty$ (resp. $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$)

<u>Définition</u> Soit f, une fonction localement intégrable sur $[a;b[$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$).

Si la limite : $\lim\limits_{X \to b} \int_a^X f(t)dt$ existe et est finie, on dit alors que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on note : $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{X \to b} \int_a^X f(t)dt$.

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

<u>Remarques</u>

- ✓ Dans le cas où b est un nombre réel, la limite à déterminer sera alors : $\lim\limits_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$
- ✓ Si f est continue sur]a,b], la limite à déterminer sera alors : $\lim\limits_{X \to a^+} \int_X^b f(t)dt$

Exemples Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

- $I=\int_0^{\boxed{\infty}} e^{-t}dt$ $t \longmapsto e^{-t} \in C^0([0;+\infty[)$

$I = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} -\left[e^{-t}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} -e^{-x}+e^{0} = 1.$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge vers 1.

- $J=\int_{-\infty}^{2} e^{t}dt$ $t \longmapsto e^{t} \in C^0(]-\infty;2])$

$J = \lim_{x\to-\infty} \int_x^2 e^{t}\,dt = \lim_{x\to-\infty} \left[e^{t}\right]_x^2 = \lim_{x\to-\infty} (e^2-e^x) = e^2.$

Donc J converge vers e^2.

✓ $K=\int_1^{\boxed{\infty}} \frac{1}{t^\alpha} dt$ $\boxed{\text{converge si et seulement si } \alpha > 1}$ Intégrale de Riemann.

$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \in C^0([1;+\infty[)$ ... $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est localement intégrable sur $[1;+\infty[$.

$$K = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt}_{k(x)}$$

1° Cas : $\alpha \neq 1$.

$$k(x) = \frac{-1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x$$

$$\int \frac{1}{t^\alpha} dt = \int t^{-\alpha} dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + cte = \frac{1}{(-\alpha+1).t^{\alpha-1}} = \frac{-1}{(\alpha-1).t^{\alpha-1}}$$

$$k(x) = -\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$$

$$K = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha-1>0 \Leftrightarrow \alpha>1 \\ +\infty & \text{si } \alpha-1<0 \Leftrightarrow \alpha<1. \end{cases}$$

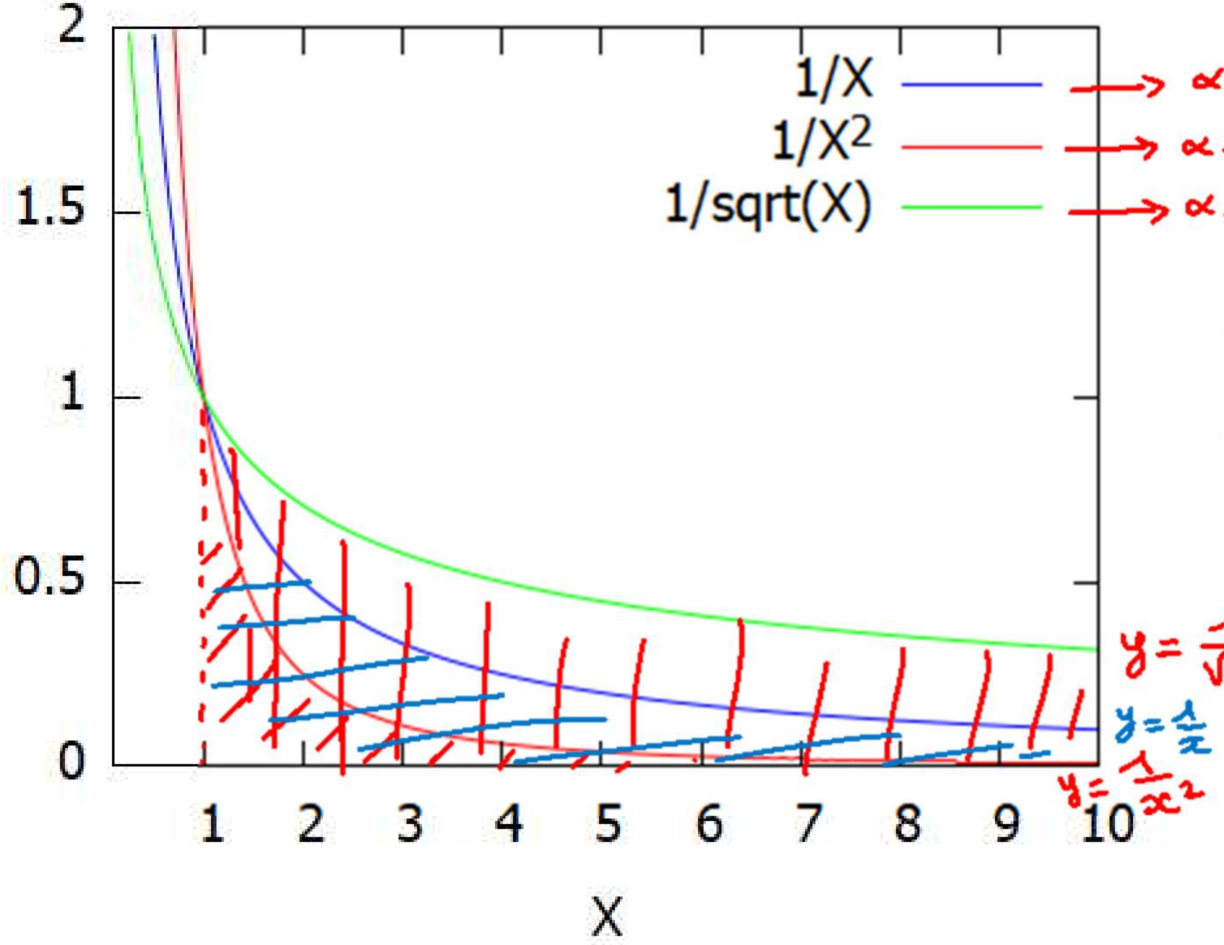
$$\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \frac{1}{x^{-3}} = x^3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

✓ $K = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} dt$

$\underline{\underline{2^e \text{ Cas}}}$ $\alpha = 1$ $K(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \left[\ln|t| \right]_1^x = \ln x - \underbrace{\ln 1}_{0}$

$K = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. K diverge lorsque $\alpha = 1$

✓ $K=\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}dt$ converge ssi $\alpha>1$. Intégrale de Riemann.



$\longrightarrow \alpha=1$

$\longrightarrow \alpha=2>1.$

$\longrightarrow \alpha=\frac{1}{2}<1$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ diverge.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverge.

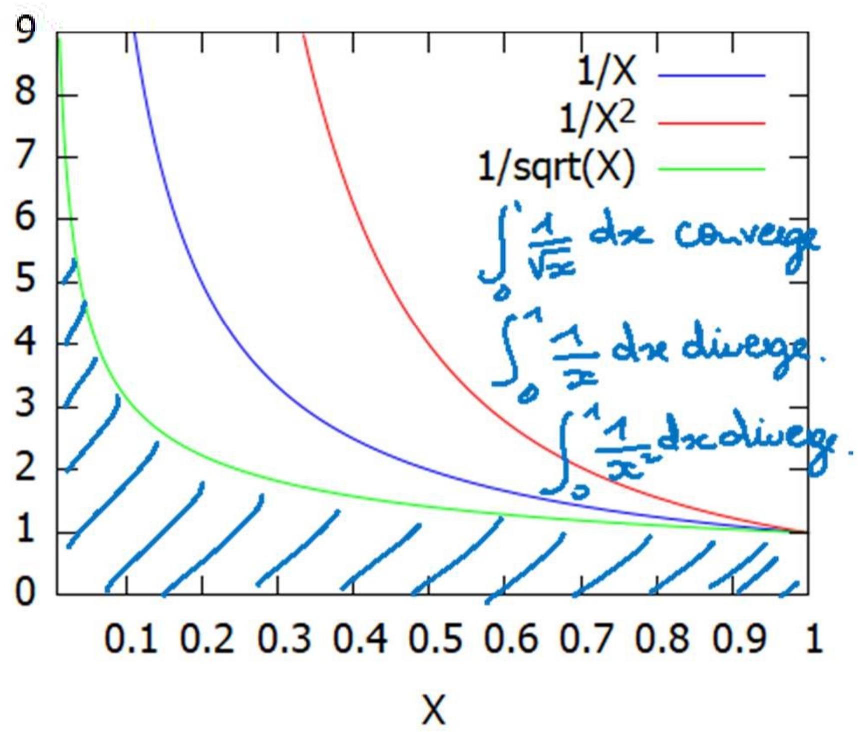
✓ $L=\int_{\boxed{0}}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ $\quad t\mapsto \frac{1}{t^{\alpha}} \in C^0(]0;1])$

1e cas $\alpha \neq 1$

$$L=\lim_{x\to 0^+}\int_{\boxed{x}}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1$$

$$L=\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } \alpha-1>0 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha-1<0 \end{cases}$$

$\frac{1}{x^3}\xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \qquad \frac{1}{x^{-3}} = x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$



2e cas $\alpha=1$ $\quad L=\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln|t|\right]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty.$

$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt \text{ converge ssi } \alpha<1}$$

✓ $M=\int_{1}^{\boxed{2}} \frac{1}{(2-t)^{\alpha}}\,dt$

$t \overset{f}{\longmapsto} \frac{1}{(2-t)^{\alpha}} \in C^{0}([1;2[)$ donc f est localement intégrable sur $[1;2[$

$M = \lim_{T \to 2^-} \int_1^T \frac{1}{(2-t)^{\alpha}}\,dt$ On pose $\boxed{x = 2-t}$ $dx = -dt$

$\begin{cases} t = 1 \iff x = 1 \\ t = T \to 2^- \iff x = X \to 0^+ \end{cases}$

$M = \lim_{X \to 0^+} -\int_1^X \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$

$M = \lim_{X \to 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ converge ssi $\alpha < 1$

4) <u>Relation de Chasles</u>

Soit $I = \int_a^b f(t)dt$, une intégrale généralisée en a et b (réels ou infinis), et $c \in]a,b[$.

I converge si et seulement si les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

5) <u>Exercice</u> **:** Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$I = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t.\ln t}$, $J = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ (on pourra effectuer le changement de variable : $t = \frac{1+u}{2}$).

Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

* $I = \int_e^{\boxed{+\infty}} \frac{dt}{t.\ln t}$ $\qquad t \mapsto \frac{1}{t\ln t} \in C^0\big([e\,;+\infty[\big)$

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_e^x \frac{1}{t}\times\frac{1}{\ln t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \Big[\ln|\ln t|\Big]_e^x = \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) - \underbrace{\ln(\ln e)}_{=0}$$

$\int u' \times \frac{1}{u}\,dt = \ln|u| + cte$

$= +\infty.$

L'intégrale généralisée $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t.\ln t}$ diverge.

* $J = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ $\qquad t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t(1-t)}} \in C^0(]0\,;1[)$

$$J = \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}}_{J_1} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}}_{J_2}$$

J converge si et seulement si J_1 <u>et</u> J_2 convergent.

Nature de J_1 : $\quad J_1 = \int_{\boxed{0}}^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.

$J_1 = \lim_{x \to 0^+} J_1(x)$ où $J_1(x) = \int_x^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ On pose $t = \frac{1+u}{2} \Longleftrightarrow u = 2t-1$

<u>Bornes</u> : $t = x \Longleftrightarrow u = 2x-1$

$t = 1/2 \Longleftrightarrow u = 0$

$$t = \frac{1+u}{2} \Longleftrightarrow \frac{dt}{du} = \left(\frac{1+u}{2}\right)'_u = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow dt = \frac{1}{2} du$$

Donc $J_1(x) = \int_{2x-1}^{0} \frac{\frac{1}{2} du}{\underbrace{\sqrt{\frac{1+u}{2} \cdot \frac{1-u}{2}}}_{\frac{\sqrt{1-u^2}}{2}}} = \int_{2x-1}^{0} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\arcsin u\right]_{2x-1}^{0} = \underbrace{\arcsin 0}_{0} - \arcsin(2x-1)$

et $J_1 = \lim_{x \to 0^+} \left(-\arcsin(2x-1)\right) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$

Donc J_1 converge.

Nature de J_2 : $J_2 = \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.

$J_2 = \lim_{x \to 1^-} J_2(x)$ où $J_2(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ On pose $t = \frac{1+u}{2} \iff u = 2t-1$

Bornes : $t = x \iff u = 2x-1$

$t = 1/2 \iff u = 0$

$t = \frac{1+u}{2} \iff \frac{dt}{du} = \left(\frac{1+u}{2}\right)'_u = \frac{1}{2} \iff dt = \frac{1}{2} du$

Donc $J_2(x) = \int_0^{2x-1} \frac{1/2\, du}{\underbrace{\sqrt{\frac{1+u}{2} \cdot \frac{1-u}{2}}}_{\frac{\sqrt{1-u^2}}{2}}} = \int_0^{2x-1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\arcsin u\right]_0^{2x-1} = \arcsin(2x-1) - \arcsin 0$

et $J = \lim_{x \to 1^-} (\arcsin(2x-1)) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

Donc J_2 converge.

Donc $J = J_1 + J_2$ converge et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$ converge

$* \quad I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad x \longmapsto \sqrt{1-x^2} \in C^0([0;1])$ Il ne s'agit pas d'une intégrale généralisée

Méthode 1 : avec une Ipp.

Ipp : $\quad u = \sqrt{1-x^2} \qquad u' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\quad v' = 1 \qquad v = x$

① $\quad I = \underbrace{\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\boxed{1}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{I_1}$

$I_1 : \quad x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \in C^0([0;1[)$ il s'agit d'une intégrale généralisée

$I_1 = \lim\limits_{X \to 1^-} \int_0^X \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad I_1(X) = \int_0^X \frac{-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$I_1(x) = -\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx + \left[\arcsin x\right]_0^x$$

Donc $I_1 = \lim_{x \to 1^-} \left(-\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x - \arcsin 0 \right)$

$$I_1 = -I + \arcsin 1$$

(1) $\Longleftrightarrow$ $I = I_1 = -I + \frac{\pi}{2}$ $\Longleftrightarrow$ $2I = \frac{\pi}{2}$ $\Longleftrightarrow$ $I = \frac{\pi}{4}$.

<u>Méthode 2</u> : $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

chgt. de Var

On pose $x = \sin t$ $\Longrightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \cos t$

bijective de $[0;\pi/2]$ sur $[0;1]$ $\Longrightarrow$ $dx = \cos t\,dt$

$x = 0 \Longleftrightarrow t = 0$

$x = 1 \Longleftrightarrow t = \pi/2$

$$I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\sqrt{\cos^2 t}} \cdot \cos t\,dt$$

$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$ car $\cos t \geq 0 \ \forall t \in [0;\pi/2]$

$\longrightarrow I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \dots = \pi/4$

✓ $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2}\,dt$

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^2}}_{I_2} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{dt}{(t-1)^2}}_{I_3}$$

I converge si et seulement si I_1, I_2 et I_3 convergent.

$$I_1 = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{(t-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \left[-\frac{1}{t-1} \right]_0^x = \lim_{x \to 1^-} \left(-\frac{1}{\underbrace{x-1}} + \frac{1}{-1} \right) = +\infty$$

$\left.\begin{array}{l} x-1<0 \\ \text{car } x \to 1^- \\ \quad x<1 \end{array}\right\}$ donc $x-1 \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^-$

I_1 diverge donc I diverge.