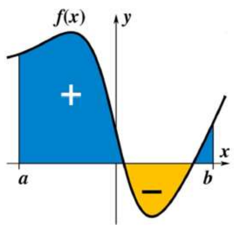
Poursuites d'études 2 : Les Intégrales généralisées – Partie 2/3

- Consignes à suivre pour les TD à distance :

UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques du semestre 2
Chapitre 4 : Calcul intégral



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance :

- Intégrales généralisées de référence,
- Théorème de convergence d'une intégrale généralisée de signe constant
- Théorème de la convergence absolue.

Page 30 du chapitre 4

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + \cos^2(t)} \;;\; J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{E(t)}} \text{ où E est la fonction partie entière} \;;\; K = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \;;\; L = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^3}\,dx \;;$$

$$M = \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + \ln x}\,dx \;;\; N = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}\,dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8 + t^4 + 1)}}\,dt \;;\; J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;;\; K = \int_0^1 \frac{1}{\sin x.\sqrt{\cos x}}\,dx \;;\; L = \int_0^2 x^{\alpha}.(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})\,dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\,dt \;;\; J = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt \;;\; K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}} \;;\; M = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$ (on effectuera une

Page 28 du chapitre 4

Partie E : Intégrales généralisées pour aller plus loin...

II. Intégrales de référence

1) Intégrales exponentielles

Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} e^{mt}\,dt$ **et** $\displaystyle\int_{a}^{\infty} e^{-mt}\,dt$ **convergent si et seulement si m>0.**

2) Intégrales de Riemann

Résultat 1 **Les intégrales de Riemann :** $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$

Résultat 2 **Les intégrales de Riemann :** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ **converge si et seulement si** $\alpha < 1$

Résultat 3 **Les intégrales de Riemann :** $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{1}{(b-t)^{\alpha}}\,dt$ **converge si et seulement si** $\alpha < 1$

$m \in \mathbb{R}$. $I = \int_a^{\boxed{+\infty}} e^{-mt}\, dt$ $\quad$ $t \longmapsto e^{-mt}$ est continue sur $[a;+\infty[$.

1^er cas $m \neq 0$

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x e^{-mt}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-mt}}{-m} \right]_a^x = -\frac{1}{m} \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-mx} - e^{-ma} \right)$$

$$I = \begin{cases} \dfrac{e^{-am}}{m} & \text{si } m > 0 \\ +\infty & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

2^e cas $m = 0$ $\quad$ $I = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x e^0\, dt = \lim_{x \to +\infty} [t]_a^x = \lim_{x \to +\infty} (x - a) = +\infty$.

$\int_a^{+\infty} e^{-mt}\, dt$ converge ssi $m > 0$

Condition nécessaire de convergence .

f est local^t intégrable sur [a;+∞[.

Si l'intégrale généralisée $\int_a^{\boxed{\infty}} f(t)dt$ est convergente,

alors $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$

$$\int_a^\infty f(t)dt \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0 .$$

$$A \Rightarrow B$$

Attention la réciproque est fausse !!!!!!!!!

Si $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, alors l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ peut tout aussi bien être divergente !!!!

Important La contraposée est très intéressante, elle donne un critère de divergence :

Si la limite en ∞ de la fonction f est non nulle, alors l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ diverge.

non B ⟹ non A

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(t)dt \text{ diverge} .$$

* $\int_1^{+\infty} e^{-3t}\,dt$ converge

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-3t} = 0.$

* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} = 0.$

Contre-exple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$

et pourtant $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha=1/2<1}}\,dt$ diverge.

* $\int_1^{+\infty} t^3\,dt$ diverge car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3 = +\infty.$

Page 30 du chapitre 4

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{4}+\cos^{2}(t)}\ ;\ J=\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{E(t)}}\ \text{où E est la fonction partie entière}\ ;\ K=\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}dx\ ;\ L=\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{x^{3}}dx\ ;$$

$$M=\int_{2}^{+\infty}\frac{x^{2}}{e^{x}+\ln x}dx\ ;\ N=\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{\ln x}}{e^{x}}dx$$

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{(2t-1)^{4}}{\sqrt{t(t^{8}+t^{4}+1)}}dt\ ;\ J=\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^{2}}}dx\ ;\ K=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x.\sqrt{\cos x}}dx\ ;\ L=\int_{0}^{2}x^{\alpha}.(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})dx$$

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{2}}{e^{t}-1}dt\ ;\quad J=\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^{2}}dt\ ;\quad K=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[4]{x(1-x)^{3}}}\ ;\quad M=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$ (on effectuera une

III. Nature de l'intégrale généralisée d'une fonction de signe constant

Dans ce paragraphe, on notera toutes les intégrales généralisées de la forme $\int_a^b f(x)dx$, où f est localement intégrable sur $[a, b[$ (ou]a,b]) et $b \in \mathbb{R}$ ou b= ∞ (resp. a $\in \mathbb{R}$ ou a= $-\infty$)

1) Théorème de comparaison

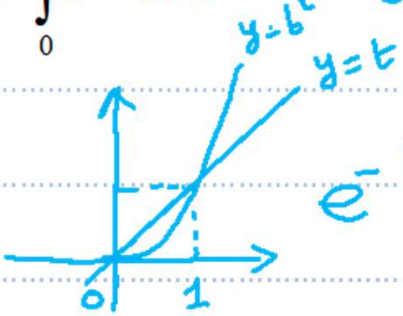
Soit f et g deux fonctions localement intégrables et positives sur [a ;b[telles que, pour tout $x \in$ [a ;b[:
$\mathbf{0 \leq f(x) \leq g(x)}$.

- **Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge**
- **Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.**

Remarque Pour étudier l'intégrale généralisée $\int_a^b h(x)dx$ où $h(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b[$, on pourra appliquer le théorème précédent à l'intégrale généralisée $\int_a^b -h(x)dx$.

$K = \int_0^{\boxed{+\infty}} e^{-t^2}\, dt$ ..

$t \overset{f}{\longmapsto} e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$



$\int_0^{+\infty} e^{-mt}\, dt$ converge ssi $m>0$.

$e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (*)

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge.

$0 \leq t \leq 1 \qquad t^2 \leq t$

$1 \leq t \qquad t \leq t^2$

$k = \underbrace{\int_0^1 f(t)\, dt}_{K_1 \text{ converge}} + \underbrace{\int_1^{\boxed{+\infty}} f(t)\, dt}_{K_2}$

K_1 converge car $f \in C^0([0;1])$

$t \geq 1 \qquad t \leq t^2$

$-t^2 \leq -t$

$f(t) = e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (*)

et comme $\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge alors d'après le théorème de comparaison K_2 converge.

Donc K converge.

$L = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}-1}$

$L = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}-1}$

$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}-1}$ est continue et positive sur $[2;+\infty[$.

$\forall t \geqslant 2 \quad \sqrt{t} - 1 \leq \sqrt{t}$

$\frac{1}{\sqrt{t}-1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$ $\qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_3^{\boxed{+\infty}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge, alors, $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}-1}$ diverge.

d'après le th de comparaison

2) Théorème de l'équivalence

Si f et g sont deux fonctions localement intégrables et positives sur [a ;b[telles que : $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Page 29 du chapitre 4

Exemples Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$I=\int_1^{\boxed{+\infty}} \frac{x+5}{(x^2+1)\sqrt{x}}dx$ .... $x \xmapsto{f} \frac{x+5}{(x^2+1).\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge ssi $\alpha > 1$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x^2.\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ $3/2 > 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, donc d'après le th de l'équivalence I converge.

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée suivante : $I=\int_{\boxed{0}}^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue et positive sur $]0;1]$

$\frac{\sin x}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$

$\int_0^1 1\, dt = 1$ converge donc d'après le th de l'équivalence I converge.

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

Si f est n fois dérivable en x_0, alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x-x_0).f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}.f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}.f^{(3)}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}.f^{(n)}(x_0)$$

Opérations T_{x_0}

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1.f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1.g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

Si $f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = X_0$, alors $f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$

Rappel sur les équivalents

$f(x) = 7x^3 + 3x + 1$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) ? = 7x^3$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{7x^2} + \frac{1}{7x^3}$

$= 1$

$$\begin{cases} \sin x \underset{0}{\sim} x \\ \cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2} \\ \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \\ \tan x \underset{0}{\sim} x \\ e^x \underset{0}{\sim} 1+x \\ (1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1+\alpha x \end{cases}$$

Page 30 du chapitre 4

IV. Nature de l'intégrale généralisée d'une fonction de signe non constant

Dans ce paragraphe, on notera toutes les intégrales généralisées de la forme $\int_a^b f(x)dx$ où f est continue sur $[a, b[$ (ou]a,b]) et b est soit un réel soit ∞ (resp. a est soit un réel soit $-\infty$)

1) Théorème de la convergence absolue

Soit f une fonction localement intégrable sur [a ;b[, si l'intégrale $\int_a^{\boxed{b}} |f(t)|dt$ converge alors $\int_a^{\boxed{b}} f(t)dt$ converge.

De plus, on a l'inégalité : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Vocabulaire Lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergent

Exemples Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$I = \int_1^{\boxed{+\infty}} \frac{\sin x}{x^2} dx$ .... $x \longmapsto \frac{\sin x}{x^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$...

On étudie la nature de $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$. $x \longmapsto \frac{|\sin x|}{x^2}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

$0 \leq |\sin x| \leq 1$.

$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ $\forall x \in [1;+\infty[$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, donc d'après le th de comparaison : $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ converge.

On applique alors le th de la convergence absolue : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Exercice 2 : A l'aide du théorème de comparaison, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + \cos^2(t)} \; ; \; J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{E(t)}} \text{ où E est la fonction partie entière} \; ; \; K = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \; ; \; L = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^3} dx \; ;$$

$$M = \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + \ln x} dx \; ; \; N = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x} dx$$

Exercice 3 : A l'aide du théorème de l'équivalence, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

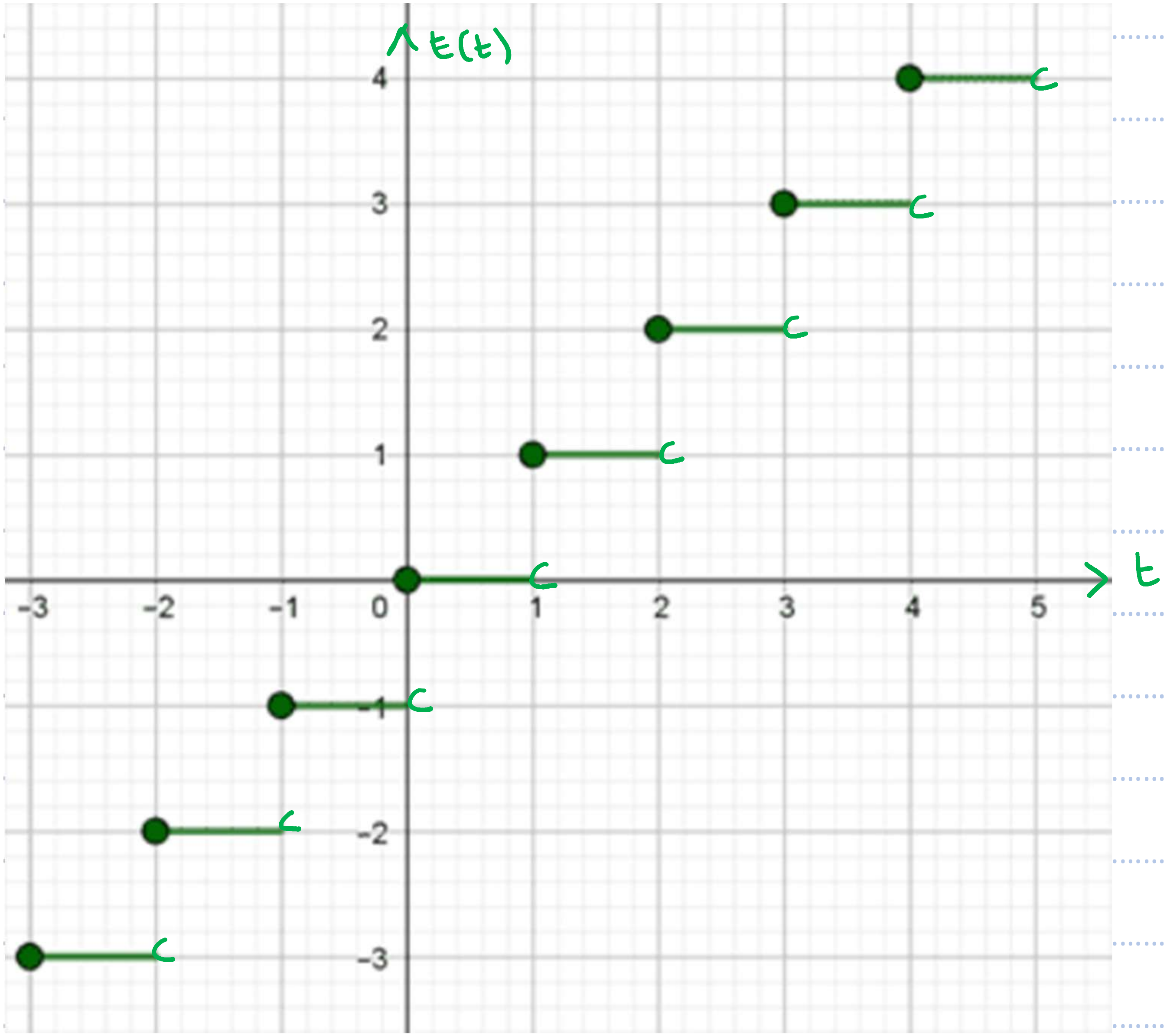
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8 + t^4 + 1)}} dt \; ; \; J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \; ; \; K = \int_0^1 \frac{1}{\sin x . \sqrt{\cos x}} dx \; ; \; L = \int_0^2 x^{\alpha} . (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$$

Exercice 4 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt \; ; \; J = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt \; ; \; K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}} \; ; \; M = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

(on effectuera une intégration par parties pour la borne infinie)

Fonction partie entière



Croissance comparée et fonctions usuelles

Pour des grandes valeurs positives de x : $\ln(x) < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n < e^x$