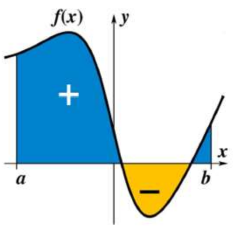
Poursuites d’études 2 : Les Intégrales généralisées – Partie 3/3

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :

UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques du semestre 2
Chapitre 4 : Calcul intégral



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> :

- Corrigé des exercices sur le théorème de comparaison, de l’équivalence et de la convergence absolue.

Page 28 du chapitre 4

Partie E : Intégrales généralisées pour aller plus loin...

II. Intégrales de référence

1) Intégrales exponentielles

Les intégrales $\int_{-\infty}^{a} e^{mt}\,dt$ et $\int_{a}^{\infty} e^{-mt}\,dt$ convergent si et seulement si m>0.

2) Intégrales de Riemann

Résultat 1 **Les intégrales de Riemann : $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$**

Résultat 2 **Les intégrales de Riemann : $\int_{0}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$**

Résultat 3 **Les intégrales de Riemann : $\int_{a}^{b} \frac{1}{(b-t)^{\alpha}}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$**

<u>Exercice 2</u> : A l'aide du théorème de comparaison, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + \cos^2(t)}$; $J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{E(t)}}$ où E est la fonction partie entière ; $K = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$; $L = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^3} dx$;

$M = \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + \ln x} dx$; $N = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x} dx$

Page 30 du chapitre 4

1) <u>Théorème de comparaison</u>

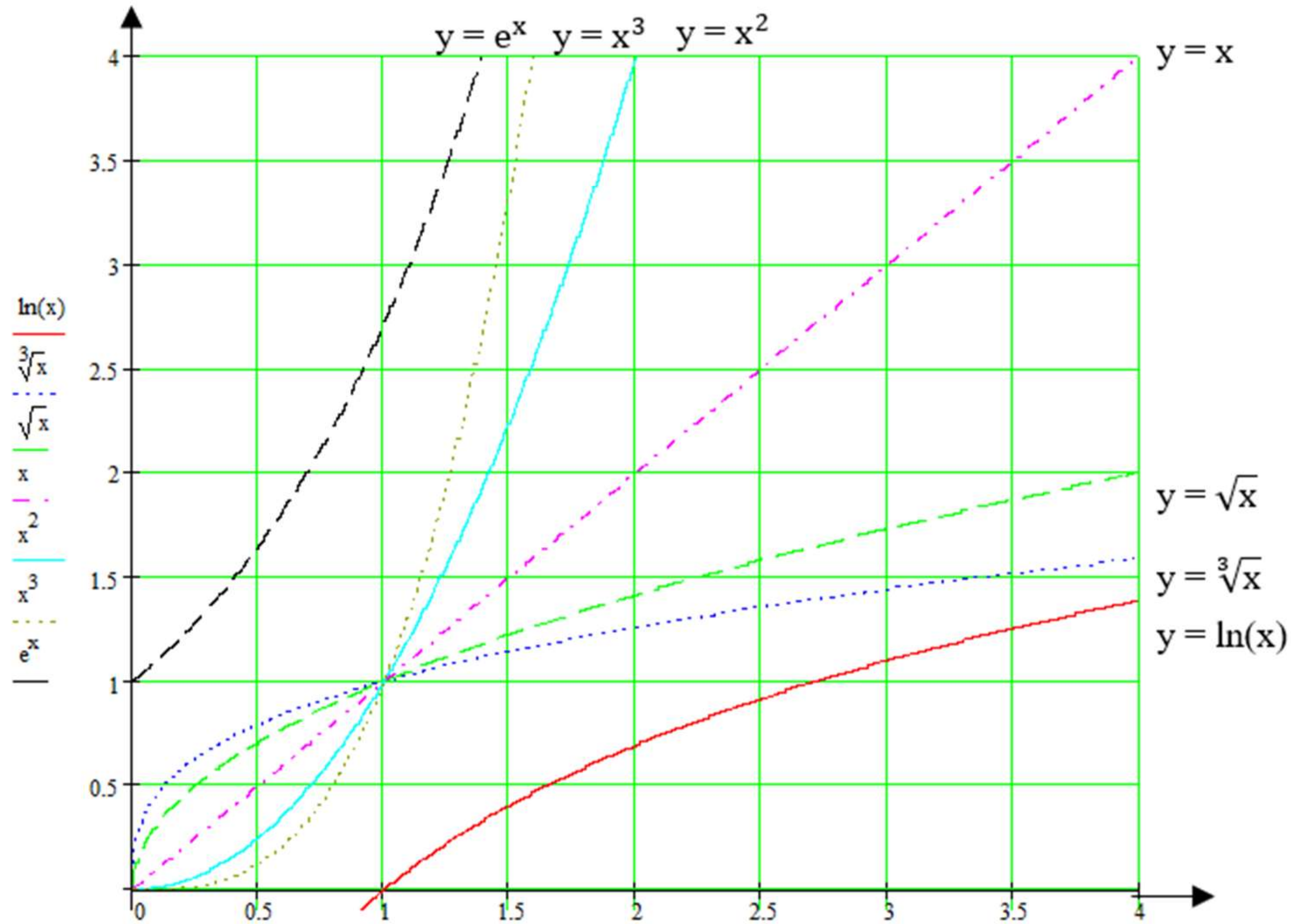
Soit f et g deux fonctions localement intégrables et <u>positives</u> sur [a ;b[telles que, pour tout $x \in [a ;b[$:
$\mathbf{0 \leq f(x) \leq g(x)}$.

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge

- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Croissance comparée et fonctions usuelles

Pour des grandes valeurs positives de x : $\ln(x) < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n < e^x$



Exercice 2 : A l'aide du théorème de comparaison, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^4+\cos^2(t)}\ ;\ J=\int_1^{\boxed{+\infty}}\frac{dt}{t^{E(t)}}\ \text{où E est la fonction partie entière ;}\ K=\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx\ ;\ L=\int_0^1\frac{\ln x}{x^3}dx\ ;$$

$$M=\int_2^{+\infty}\frac{x^2}{e^x+\ln x}dx\ ;\ N=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\ln x}}{e^x}dx$$

I

* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^4+\cos^2 t}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

$t^4+\cos^2 t \geq t^4$ donc $\dfrac{1}{t^4+\cos^2 t} \leq \dfrac{1}{t^4}$

L'intégrale de Riemann : $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t^4}$ converge, alors, d'après le théorème de comparaison $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t^4+\cos^2 t}$ converge.

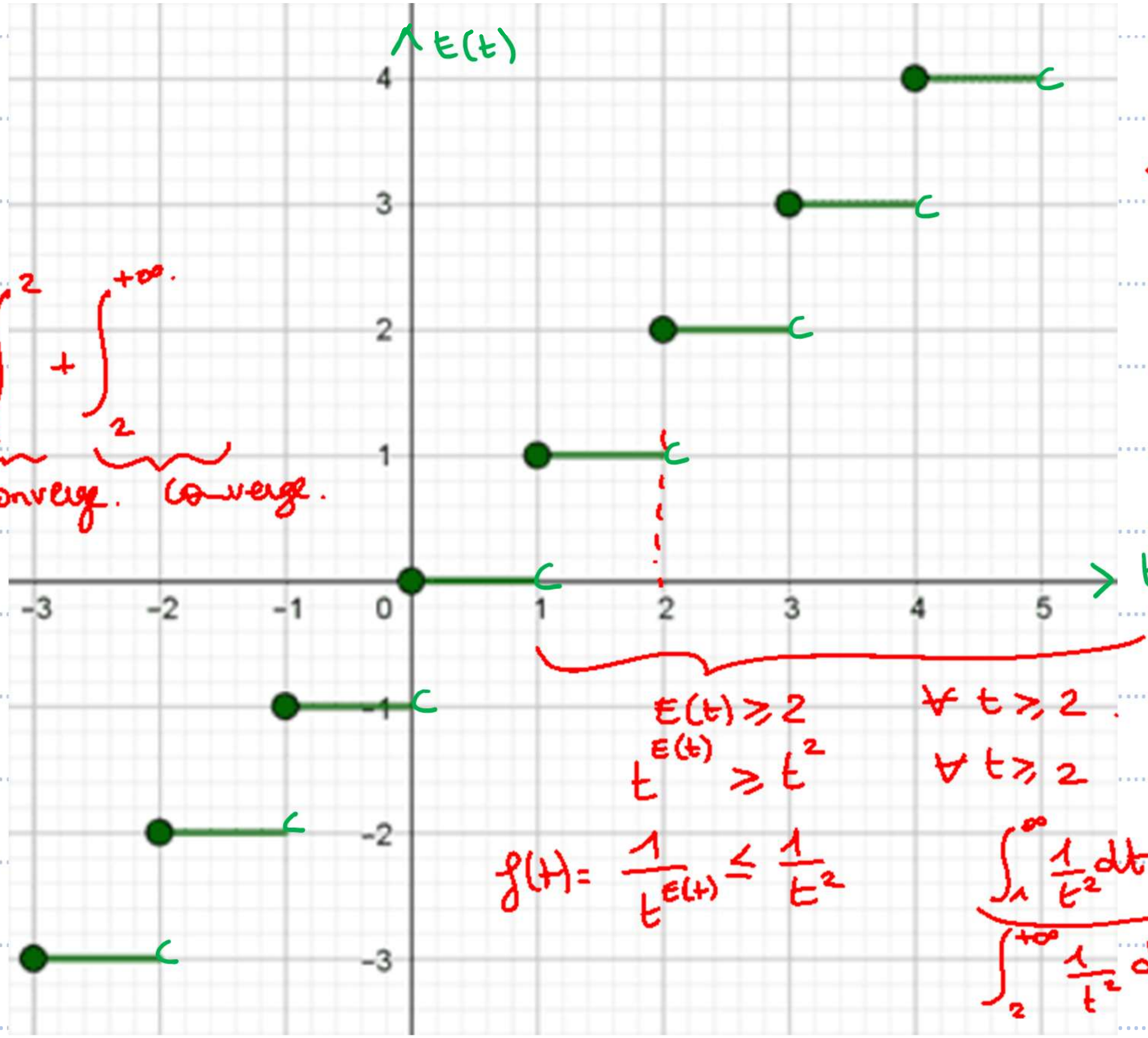
J

* $J=\underbrace{\int_1^2\frac{dt}{t^{E(t)}}}_{=J_1}+\underbrace{\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^{E(t)}}}_{=J_2}$

$t\longmapsto t^{E(t)}=e^{E(t).\ln t}$ est continue par morceaux et positive sur $[1;+\infty[$ donc J_1 converge.

→ donc localement intégrable

Fonction partie entière



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{E(t)}}\,dt = \underbrace{\int_1^{2}}_{\text{converge.}} + \underbrace{\int_2^{+\infty}}_{\text{converge.}}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{E(t)}}\,dt$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$ converge ssi $\alpha > 1$

$E(t) \geq 2 \quad \forall t \geq 2$.

$t^{E(t)} \geq t^2 \quad \forall t \geq 2$

$f(t) = \frac{1}{t^{E(t)}} \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ ~~converge~~ converge

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

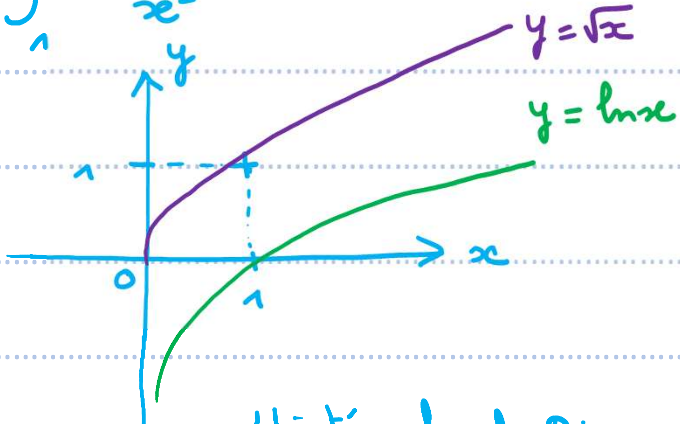
$J_2 = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{E(t)}}$ Comme $\frac{1}{t^{E(t)}} \le \frac{1}{t^2}$ $\forall t \in [2;+\infty[$

et l'intégrale de Riemann $\int_2^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, alors d'après le théorème de compa-raison J_2 converge.

Ainsi $J = J_1 + J_2$ converge.

K

* $K = \int_1^{\boxed{\infty}} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ $\quad x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.



$\forall x \geq 1$ $\quad \ln x \le \sqrt{x}$

$\times \frac{1}{x^2}$ $\quad \frac{\ln x}{x^2} \le \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ $\quad \frac{3}{2} > 1$

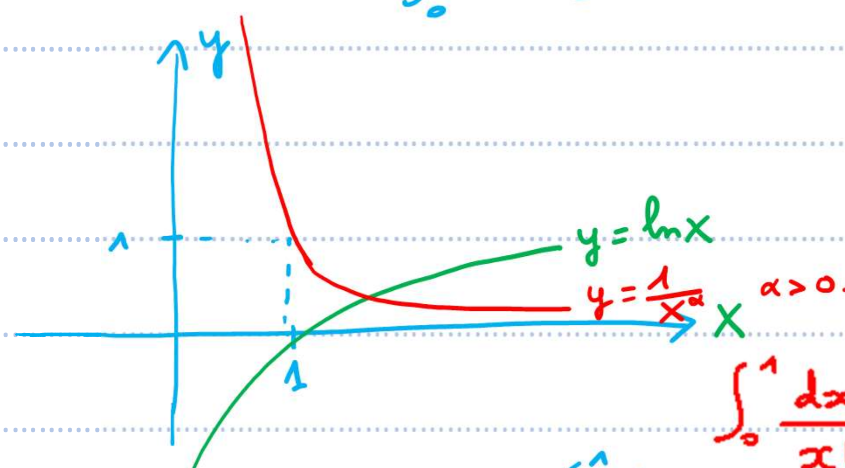
L'intégrale de Riemann $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, donc d'après le théorème de

Comparaison $K=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$ converge.

(L)

* $L=\int_{\boxed{0}}^{1}\frac{\ln x}{x^3}\,dx$ $\quad x \longmapsto \frac{\ln x}{x^3}$ est continue et négative sur $]0;1]$

La nature de $-L=\int_0^1 \frac{-\ln x}{x^3}\,dx$. $\forall\, 0<x\le 1$: $-\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$



$\underbrace{X=\frac{1}{x}\geq 1}$

$\boxed{\ln X \geq \frac{1}{X^{\alpha}}}$; $\alpha>0$

$0<x\le 1$

$\times \frac{1}{x^3}>0$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq x^{\alpha=2}$

$-\frac{\ln x}{x^3} \geq \frac{x^{\alpha=2}}{x^3} = \frac{1}{x}$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\beta}}$ cvge ssi <1

$f(x) \geq \frac{1}{x}$

L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison

– L diverge, ainsi que L.

M

* $M = \int_2^{\boxed{+\infty}} \frac{x^2}{e^x + \ln x}\,dx$. $x \longmapsto \frac{x^2}{e^x + \ln x}$ est continue et positive sur $[2;+\infty[$.

$\forall x \geq 2$ $e^x \geq x^{\alpha=4}$

$e^x + \ln x \geq x^{\alpha=4}$

$\frac{x^2}{e^x+\ln x} \leq \frac{x^2}{x^{\alpha=4}} = \frac{1}{x^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ cvge ssi $\alpha > 1$.

Comme l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, alors d'après le théorème de comparaison M converge.

N

* $N = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}\, dx$

$x^{\overset{\alpha}{\ln x}} = e^{\overset{\alpha}{\ln x}.\ln x} = e^{\ln^2 x}.$

$\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln x}}$

$\ln^2 x \neq \ln(x^2) = 2\ln x$

$x \overset{f}{\longmapsto} e^{\ln^2 x - x}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$

$\ln^2 x - x = x\Big(\underbrace{\frac{\ln^2 x}{x} - 1}_{g(x) > -1}\Big)$

$e^{\ln^2 x - x} \leq e^{mx} \quad m<0$

$e^{\ln^2 x - x} \geq e^{mx} \quad m>0$

$x \geq 1 \qquad g'(x) = \frac{2.\ln x}{x^2} - \frac{\ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x\,(2-\ln x)}{x^2} \geq 0 \Longleftrightarrow 2 - \ln x \geq 0$

$g'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln x \leq 2 \Longleftrightarrow x \leq e^2$

x	1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-1	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}-1$	$\searrow$	-1

Donc : $-1 \leq g(x) \leq \underbrace{\frac{4}{e^2} - 1}_{\simeq -0,46} < 0,4$

Rmque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$ car $\ln x \underset{\infty}{<<} \sqrt{x}$

N

$* \quad N = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}\, dx \qquad x^{\ln x} = e^{\ln x . \ln x} = e^{\ln^2 x}.$

$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

$x \xrightarrow{f} e^{\ln^2 x - x}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

Alors $f(x) = e^{xg(x)} \leq e^{-0{,}4x} \quad \forall\ x \geq 1.$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-0{,}4x}\, dx$ converge, alors d'après le théorème de comparaison

N converge.

Exercice 3 : A l'aide du théorème de l'équivalence, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8+t^4+1)}}dt\ ;\ J=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\ ;\ K=\int_0^1\frac{1}{\sin x.\sqrt{\cos x}}dx\ ;\ L=\int_0^2 x^{\alpha}.(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})dx$$

Page 30 du chapitre 4

2) Théorème de l'équivalence

Si f et g sont deux fonctions localement intégrables et positives sur [a ;b[telles que : $f(x)\underset{b}{\sim}g(x)$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Rappel sur les équivalents

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g en x_0 lorsque : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. On note alors : $f(x)\underset{x_0}{\sim}g(x)$

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

Si f est n fois dérivable en x_0, alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}.f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}.f^{(3)}(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!}.f^{(n)}(x_0)$$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$\tan x \underset{0}{\sim} x$

$e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$

$(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1 + \alpha x$

Opérations

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1.f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1.g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

$$\text{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \text{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \text{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

Exercice 3 : A l'aide du théorème de l'équivalence, déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{+\infty}}\frac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8+t^4+1)}}dt\ ;\ J=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\ ;\ K=\int_0^1\frac{1}{\sin x.\sqrt{\cos x}}dx\ ;\ L=\int_0^2 x^{\alpha}.(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})dx$$

I

* $t \xrightarrow{f} \dfrac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8+t^4+1)}}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$

$I = I_1 + I_2$ où $I_1=\int_{\boxed{0}}^1 f(t)\,dt$ et $I_2=\int_1^{\boxed{+\infty}} f(t)\,dt$.

I converge si et seulement si I_1 et I_2 convergent.

$f(t)=\dfrac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8+t^4+1)}} \underset{\boxed{0}}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, donc

d'après le théorème de l'équivalence $I_1=\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

$f(t)=\dfrac{(2t-1)^4}{\sqrt{t(t^8+t^4+1)}} \underset{\boxed{\infty}}{\sim} \dfrac{16t^4}{\sqrt{t^9}} = \dfrac{16}{t^{9/2-4}} = \dfrac{16}{\sqrt{t}}$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{\sqrt{t}}$

diverge, donc d'après le théorème de l'équivalence $I_2 = \int_1^{\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Ainsi $I = I_1 + I_2$ diverge.

J

* $J = \int_0^{\boxed{1}} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. $\quad x \xmapsto{f} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $[0;1[$

$\begin{cases} \ln(1+x) \underset{1^-}{\sim} \ln 2 \\ \sqrt{1-x^2} \underset{1^-}{\sim} \; ? \end{cases}$ On pose $x = X+1$ où $X \to 0^-$

et on cherche : $\sqrt{-X^2-2X} \underset{0^-}{\sim} \; ?$

$X \to 0^-$ $\quad \sqrt{-X^2-2X} = \sqrt{-X(X+2)} = \sqrt{-X}\sqrt{X+2} = \sqrt{-X}\sqrt{2\left(1+\frac{X}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{-X}\sqrt{1+\frac{X}{2}}$

On connaît $\sqrt{1+t} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}t$

On pose $t = \frac{X}{2} \Rightarrow \sqrt{1+\frac{X}{2}} \underset{t \to 0}{\sim} 1 + \frac{1}{4}X$ $\Big\} \Rightarrow \sqrt{-X^2-2X} \underset{0^-}{\sim} \underline{\sqrt{2}\sqrt{-X}}\left(1+\frac{1}{4}X\right)$

Donc $\sqrt{1-x^2} \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$

Ainsi $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} = \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{(\underset{\uparrow b}{1}-x)^{1/2}}$ $1/2 = \alpha$

$\rightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge ssi : $\alpha < 1$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\,dx$ converge, et d'après le th. de l'équivalence :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \text{ converge.}$$

(K)

* $K = \int_{\boxed{0}}^{1} \frac{dx}{\sin x . \sqrt{\cos x}} dx$ $x \xrightarrow{f} \frac{1}{\sin x . \sqrt{\cos x}}$ est continue et positive sur $]0;1]$.

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow \sqrt{\cos x} \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{4}$

$\sqrt{1+X} \underset{X \to 0}{\sim} 1 + \frac{X}{2}$

$X = \frac{-x^2}{2}$

$\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \underset{x \to 0}{\sim} 1 + \frac{-x^2/2}{2}$

$f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x(1 - x^2/4)} = \frac{1}{x - x^3/4}$

$\frac{1}{\sin x . \sqrt{\cos x}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge, alors d'après le th de l'équivalence K diverge.

(L)

* $L = \int_{\boxed{0}}^{2} x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) dx$ $x \longmapsto x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$ est continue et positive sur $]0;2]$.

$\cancel{e^X \underset{0}{\sim} 1 + X}$

$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$ donc: $x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \underset{0^+}{\sim} x^\alpha$. En effet $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{x}}\right)}{x^\alpha} = 1$.

Ainsi les intégrales $\int_0^2 x^\alpha\left(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)dx$ et $\underbrace{\int_0^2 x^\alpha\,dx}$ sont de même nature

$$= \int_0^2 \frac{1}{x^{-\alpha}}\,dx \text{ converge ssi}$$

$$\underbrace{-\alpha} < 1 \iff \alpha > -1$$

Conclusion: $\int_0^2 x^\alpha\left(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)dx$ converge ssi $\alpha > -1$.

Remarque: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$. $\int_{\frac{1}{2}}^{\boxed{+\infty}} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$.

$$\int_0^{1000} \frac{dt}{t^\alpha} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}}_{\text{CV ssi } \alpha<1} + \underbrace{\int_1^{1000} \frac{dt}{t^\alpha}}_{\text{Converge}}.$$

converge ssi $\alpha < 1$.

$\int_{1000}^{\boxed{+\infty}} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$

Exercice 4 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

Page 31 du chapitre 4

$$I=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{+\infty}}\frac{t^2}{e^t-1}dt\ ;\quad J=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt\ ;\quad K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}\ ;\quad M=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

(on effectuera une intégration par parties pour la borne infinie)

I

* $t \xmapsto{f} \dfrac{t^2}{e^t-1}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$.

$I = I_1 + I_2$ où $I_1 = \int_{\boxed{0}}^{1} f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_1^{\boxed{+\infty}} f(t)\,dt$

I converge car :

$e^t \underset{0}{\sim} 1+t$

$f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{1+t-1} = t$

Comme $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ converge, alors d'après le th. de l'équivalence I_1 converge.

$f(t) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{e^t}$

Etudions $I_3 = \int_1^{+\infty} \dfrac{t^2}{e^t}\,dt$ $\quad e^t > t^\alpha \ \forall t \geq 1$

donc $\dfrac{t^2}{e^t} < \dfrac{1}{t^2}$ $\quad \dfrac{t^2}{t^\alpha}$.

D'après le th de comparaison I_3 converge, et aussi I_2

J

* $J = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\infty}} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ $\qquad t \xmapsto{f} \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$ $\quad (-1 \leq \cos t \leq 1)$

Donc $J = J_1 + J_2$ converge car

où $J_1 = \int_{\boxed{0}}^{1} f(t)\,dt$ et $J_2 = \int_{1}^{\boxed{+\infty}} f(t)\,dt$

$\cos t \underset{0}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2}$

$1-\cos t \underset{0}{\sim} 1-\left(1-\frac{t^2}{2}\right) = \frac{t^2}{2}$

$\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}$ converge, alors d'après le th. de l'équivalence J_1 converge.

$-1 \leq \cos t \leq 1 \quad \forall t \geq 1$

$-1 \leq -\cos t \leq 1$

$0 \leq 1-\cos t \leq 2$

$0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2} = 2 \times \frac{1}{t^2}$

Comme $2\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, alors d'après le th. de

J_2 converge

Ⓚ * $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}} = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \frac{dx}{x^{1/4}\cdot(1-x)^{3/4}}$ $x \xmapsto{f} \frac{1}{x^{1/4}(1-x)^{3/4}}$ est continue et positive sur $]0;1[$

$K = K_1 + K_2$. converge ou

où $K_1 = \int_{\boxed{0}}^{1/2} f(x)\,dx$ et $K_2 = \int_{1/2}^{\boxed{1}} f(x)\,dx$

$\frac{1}{x^{1/4}(1-x)^{3/4}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1/4}}$ $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha}$ cv ssi $\alpha<1$.

Comme $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1/4}}$ converge, alors d'après le th. de l'équivalence K_1 converge.

$\frac{1}{x^{1/4}(1-x)^{3/4}} \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{(1-x)^{3/4}}$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ cv ssi $\alpha<1$

Comme $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{3/4}}$ $3/4=\alpha<1$ converge, alors d'après le th de l'équivalence $\underline{K_2 \text{ converge}}$

(M) * $M = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{+\infty}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad x \xmapsto{f} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

$M = M_1 + M_2$ converge car:

où $M_1 = \int_{\boxed{0}}^{1} f(x)\,dx \geq 0$ et $M_2 = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ de signe quelconque

$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

Comme $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ converge, alors M_1 converge d'après le th. de l'équivalence

Etudions $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$

$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

n'aboutit pas puisque:

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge.

Suivons l'indication : (Ipp:)

... et M_2 converge voir ci-après...

$$\Pi_2(x) = \int_1^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \Pi_2 = \lim_{x\to+\infty} \Pi_2(x).$$

$$\int_a^b u v'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u' v\,dx$$

IPP: $\begin{cases} u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x \\ v' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = 2\sqrt{x} \end{cases}$

~~APRES~~

$$\Pi_2(x) = \left[2\sin x.\sqrt{x}\right]_1^x - 2\int_1^x \cos x.\sqrt{x}\,dx$$

$$= 2\sin x.\sqrt{x} - 2\sin(1) - 2.\underbrace{\int_1^x \cos x.\sqrt{x}\,dx} \qquad \int_1^\infty \cos x.\sqrt{x}\,dx.$$

IPP: $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \Rightarrow u' = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2} \\ v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\Pi_2(x) = \left[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx \quad \text{donc } \Pi_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \cos(1) - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx\right)$$

$$\Pi_2 = \cos(1) - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow$$ converge absolument car $\dfrac{|\cos x|}{x\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ converge

Donc Π_2 converge et $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ converge.