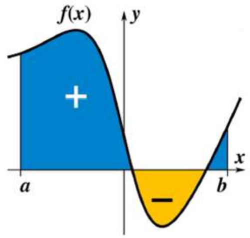
Poursuites d’études 2 : Résolution des exercices du concours d’entrée à Centrale Supélec - 2018

- Consignes à suivre pour les TD à distance :

UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques du semestre 2
Chapitre 4 : Calcul intégral



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance :

- Corrigé des exercices du concours de 2018. La question 2 demande des connaissances sur les intégrales doubles et le passage en coordonnées polaires.

Exercice 1

Q. 1.1 Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx.$$

Q. 1.2 Calculer la valeur de l'intégrale I.

Q1.1 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge si et seulement si les deux intégrales convergent, et dans ce cas on a : $I = 2 \times \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ car $x \longmapsto e^{-x^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$.

Nature de $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$:

$x \overset{f}{\longmapsto} e^{-x^2} \in C^0([0;+\infty[)$, f est donc localement intégrable sur $[0;+\infty[$ et :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx}_{?}$$

Nature de $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$:

$$\forall x \geqslant 1 \qquad x^2 \geqslant x$$

$$-x^2 \leq -x$$

$$0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge, alors d'après le théorème de comparaison

$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge et $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$ converge.

De plus, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = 2 \times \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

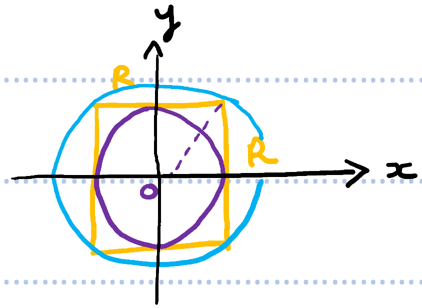
Q1.2) Calcul de $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$

⚠ Nécessite en pré-requis le cours sur les intégrales doubles !

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \times \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \lim_{R \to +\infty} \iint_{[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy. = \lim_{R \to +\infty} I_R$$

en effet, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx$ converge.

et $\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy = \iint_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$ car $(x,y) \longmapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est à variables séparables, et $[-R,R]^2$ est rectangle.



$$\underbrace{\iint_{d(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy}_{J_R} \leq \underbrace{\iint_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy}_{I_R} \leq \underbrace{\iint_{d(0,R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy}_{K_R}$$

Passage en coordonnés polairs :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$J_R = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \cdot \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^R = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

$$K_R = \int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \pi\left(1 - e^{-2R^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} J_R \leq I_R \leq K_R, \\ \lim\limits_{R \to +\infty} J_R = \pi = \lim\limits_{R \to +\infty} K_R \end{array}\right\}$$

D'après le théorème des Gendarmes :

$$\lim_{R \to +\infty} I_R = \pi = I^2$$

<u>Conclusion</u> :

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$