IUT de Toulon **Nom :** **Prénom :**
GEII2APP

<u>Devoir d'Outils Logiciels du S3 - Sujet 1</u>

Le logiciel Maxima ou un tableur pourra être utilisé pour **vérifier** le calculs.

<u>Exercice 1</u> Soit A_β, la matrice définie par : $A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & \beta^2 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}$ où m est un réel.

1) Calculer le déterminant de la matrice A_β, puis écrire le résultat sous forme factorisée.

$$|A_\beta| = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & \beta^2 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \beta^2-\beta & 1-\beta \\ 0 & \beta-\beta^2 & 1-\beta^2 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \beta L_1 \end{array} \end{array}$$

$$= (\beta^2-\beta)(1-\beta^2) - (1-\beta)(\beta-\beta^2)$$

$$= \beta(\beta-1)(1-\beta)(1+\beta) - (1-\beta)\beta(1-\beta)$$

$$= -\beta(1-\beta)^2(1+\beta) - (1-\beta)^2 \cdot \beta$$

$$= \beta(1-\beta)^2\left[-(1+\beta) - 1\right]$$

$$= \beta(1-\beta)^2(-\beta-2)$$

$$|A_\beta| = -\beta(1-\beta)^2(\beta+2)$$

2) Pour quelles valeurs de β la matrice A_β est-elle inversible ?

A_β est inversible si et seulement si $|A_\beta| \neq 0$

A_β est inversible $\forall \beta \in \mathbb{R} - \{0; 1; -2\}$

3) Soit le système suivant : $S_\beta \begin{cases} x+\beta y+\beta z=-5 \\ x+\beta^2 y+z=\beta \\ \beta x+\beta y+z=\beta^2+3 \end{cases}$

a) Résoudre matriciellement ce système lorsque β = 2 (on explicitera les calculs)
b) Résoudre ce système lorsque β = -2.
c) Résoudre ce système lorsque β = 1.

3) a) Si $\beta = 2$ alors A_β est inversible et S_β admet une unique solution. En effet,

$$S_\beta \iff A_\beta \cdot V = B_\beta \quad \text{où} \quad B_\beta = \begin{pmatrix} -5 \\ \beta \\ \beta^2+3 \end{pmatrix}$$

$$\iff V = A_\beta^{-1} \cdot B_\beta .$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_2 = -2(1-2)^2(2+2) = -8 \neq 0$$

$$CoA_2 = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$CoA_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et $B_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc $V = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 48 \\ 4 \\ -48 \end{pmatrix}$

Donc $V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 1 \\ -1-2 \end{pmatrix}$

3b) Si $\beta = -2$ alors $\det(A_{-2}) = 0$ et A_{-2} n'est pas inversible. S_{-2} a une ∞té de solutions, soit aucune :

$\begin{cases} x - 2y - 2z = -5 \\ x + 4y + z = -2 \\ -2x - 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} -6y - 3z = -3 \iff z = 1 - 2y \\ x = -2 - 4y - z = -3 - 2y \\ +6 + 4y - 2y + 1 - 2y = 7 \end{cases}$

$7 = 7$.

$S_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} -3-2y \\ y \\ 1-2y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\}$ ∞ té sol°

3.c) voir après

Exercice 2

1) Diagonaliser, si c'est possible et en le justifiant, la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -15 & -4 & -5 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (on précisera les valeurs propres, les vecteurs propres, la matrice diagonale (en plaçant les valeurs sur la diagonale dans l'ordre croissant), la matrice de passage.)

→ On résout $|A - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -15 & -4-\lambda & -5 \\ 9 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\iff (4-\lambda)\Big(\underbrace{-(4+\lambda)(4-\lambda)}_{\lambda^2 - 16} + 15\Big) + 15(4-\lambda-3) + 9(-5+4+\lambda) = 0$

$\iff (4-\lambda)\big(\underbrace{\lambda^2 - 1}_{(\lambda-1)(\lambda+1)}\big) + \underbrace{15(1-\lambda)}_{= -15(\lambda-1)} + 9(\lambda - 1) = 0$

$\iff (\lambda-1)\big((4-\lambda)(\lambda+1) - 15 + 9\big) = 0$

$\iff (\lambda-1)\big(-\lambda^2 + 3\lambda + \underbrace{4-6}_{-2}\big) = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

$\iff \lambda = 1$ double et 2 simple

A est diagonalisable si et seulement si il existe deux vecteurs propres libres associés à 1

→ Vecteur propre associé à 1 :

On résout $(A - I)V = 0 \iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \quad (a) \\ -15x - 5y - 5z = 0 \\ 9x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$ liées à (a)

$(A-I).V=0 \Longleftrightarrow y=-3x-z\ ;\ x,z\in\mathbb{R}.$

$$\Longleftrightarrow V=\begin{pmatrix}x\\-3x-z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-3x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-z\\z\end{pmatrix}=x\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}}_{V_1}+z\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}_{V_2}$$

V_1 et V_2 sont libres (non colinéaires), donc A est diagonalisable

→ Vecteur propre associé à 2

On résout $(A-2I).V=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}2&1&1\\-15&-6&-5\\9&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}2x+y+z=0\\-15x-6y-5z=0\\9x+3y+2z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}z=-2x-y=3x\\-15x-6y+10x+5y=0\\ \Leftrightarrow -5x-y=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5x}}\\9x-15x+6x=0\\ 0=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow V=\begin{pmatrix}x\\-5x\\3x\end{pmatrix}=x\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}}_{V_3}$$

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&-1&-5\\0&1&3\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} \quad D=P^{-1}AP}$$

2) Utiliser les résultats du **1)** pour résoudre matriciellement le système différentiel suivant :

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x+y+z\\ \frac{dy}{dt}=-15x-4y-2z \text{ avec } x(0)=0 \text{ et } y(0)=z(0)=1\\ \frac{dz}{dt}=9x+3y+4z\end{cases}$$

$\Longleftrightarrow V'(t)=A.V(t)$ dans la base canonique

Dans la base de diagonalisation $\mathcal{B}=(V_1,V_2,V_3)$ on résout $W'(t)=D.W(t)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}X'=X\\Y'=Y\\Z'=2Z\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}X=K_1e^t\\Y=K_2e^t\\Z=K_3e^{2t}\end{cases};\ K_1,K_2,K_3\in\mathbb{R}.$$

$$V(t)=P.W(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&-1&-5\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_1e^t\\K_2e^t\\K_3e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_1e^t+K_3e^{2t}\\-3K_1e^t-K_2e^t-5K_3e^{2t}\\K_2e^t+3K_3e^{2t}\end{pmatrix}$$

Nom : **Prénom :** …

$x(0)=0$ et $y(0)=z(0)=1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ -3k_1 - k_2 - 5k_3 = 1 \\ k_2 + 3k_3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 = -k_3 \\ 3k_3 - 1 + 3k_3 - 5k_3 = 1 \\ k_2 = 1 - 3k_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_3 = +2 \\ k_2 = -5 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{t} + 2e^{2t} \\ y(t) = 6e^{t} + 5e^{t} - 10e^{2t} = 11e^{t} - 10e^{2t} \\ z(t) = -5e^{t} + 6e^{2t} \end{cases}$$

Exercice 3

Etant donné un réel m, on considère la matrice B_m, définie par : $B_m = \begin{pmatrix} 4 & m-1 & -6 \\ 0 & m+2 & 0 \\ 1 & 2-2m & -3 \end{pmatrix}$ où m est un réel.

1) Déterminer les valeurs propres de B_m

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2) Etudier, suivant les valeurs de m si la matrice B_m est diagonalisable ou non.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………