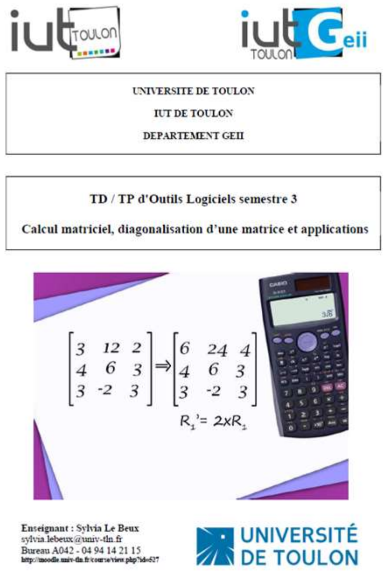
TP4-2 Matrices – Diagonalisation d'une matrice à valeurs propres simples

- Consignes à suivre pour les TD à distance :



UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

TD / TP d'Outils Logiciels semestre 3

Calcul matriciel, diagonalisation d'une matrice et applications

$$\begin{bmatrix} 3 & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 24 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_1' = 2 \times R_1$

Enseignant : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !

- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…

- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai.

- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

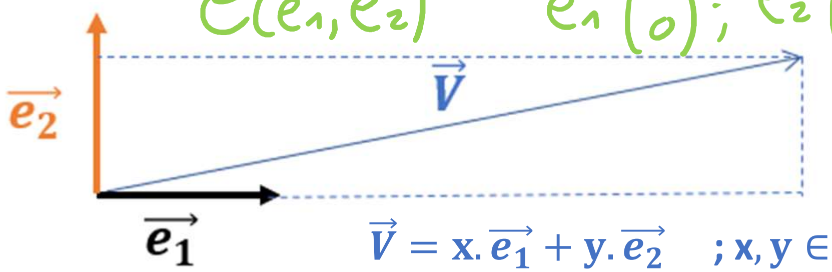
- Programme de la séance :

- Rappel du changement de base dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, introduction à la diagonalisation d'une matrice
- Définitions : valeurs propres, vecteurs propres, matrice diagonale
- Diagonalisation d'une matrice à valeurs propres simples.

Changement de base dans $\mathbb{R}^2$

Base de départ : la base canonique

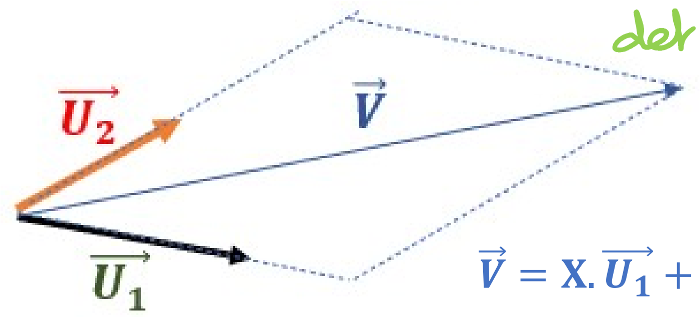
$\mathcal{C}(\vec{e_1},\vec{e_2})$ $\quad \vec{e_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$\vec{V} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2}$; $x, y \in \mathbb{R}$

Base d'arrivée : $\mathcal{B} = (\vec{u_1},\vec{u_2})$

$\det(\vec{u_1},\vec{u_2}) \neq 0$



$\vec{V} = X.\vec{U_1} + Y.\vec{U_2}$; $X, Y \in \mathbb{R}$

P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = \left(\vec{u_1}, \vec{u_2}\right)$

$$\underbrace{V = P.W = P.\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}}_{=\vec{V}_{\mathcal{C}}} \xleftarrow{\times P} \underbrace{W = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}}_{=\vec{V}_{\mathcal{B}}}$$

$V \longrightarrow W = P^{-1}V$ $\quad$ ou $\quad P^{-1}V = \underbrace{P^{-1}P}_{I}W = W$

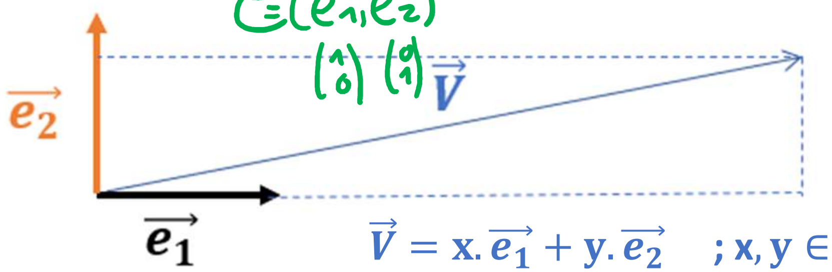
$$A = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \xrightarrow{\times P^{-1}.A.P} A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix}a' & c'\\ b' & d'\end{pmatrix}$$

$A = PA'P^{-1} \longleftarrow A'$ $\quad$ ou $\quad PA'P^{-1} = \overbrace{PP^{-1}}^{I}A\overbrace{PP^{-1}}^{I} = A$

Changement de base dans $\mathbb{R}^2$ - Exple

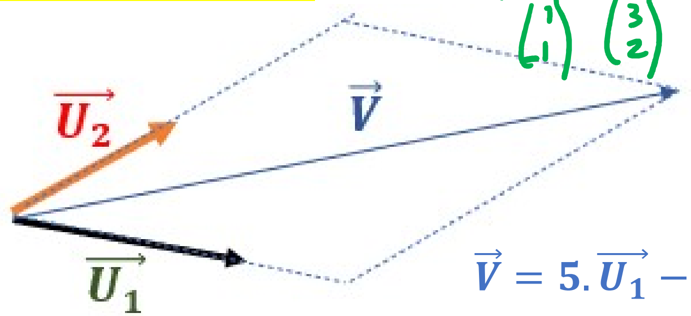
Base de départ : la base canonique

$\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\vec{V} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2}$; $x, y \in \mathbb{R}$

Base d'arrivée : $\mathcal{B} = (\vec{U_1}, \vec{U_2})$
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



$\vec{V} = 5.\vec{U_1} - 3.\vec{U_2}$; $X, Y \in \mathbb{R}$

P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

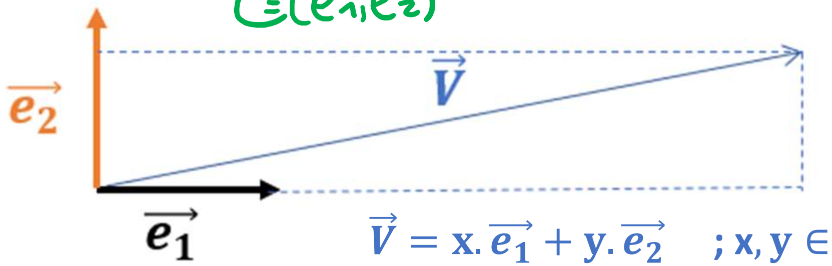
$V = P.W = P.\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{x P}}$ $W = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -18 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{x } P^{-1}.A.P}$ $A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$

Changement de base dans $\mathbb{R}^2$ - Exple-corrigé

Base de départ : la base canonique

$\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$

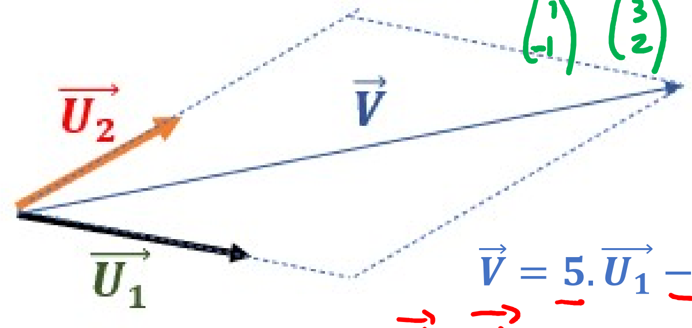


$\vec{V} = \mathrm{x}.\vec{e_1} + \mathrm{y}.\vec{e_2}$; $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$

$\vec{V} = -4\vec{e_1} - 11\vec{e_2}$

Base d'arrivée : $\mathcal{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



$\vec{V} = 5.\vec{U_1} - 3.\vec{U_2}$; $X, Y \in \mathbb{R}$

P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = \begin{array}{cc} \vec{u_1} & \vec{u_2} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} \end{array}$; $P^{-1} = \frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{V} = P.W = P.\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}$ $\xleftarrow{\quad}$ **x P** $\quad \mathrm{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{V}_{\mathcal{B}}$

$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & -18 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 17 & -39 \\ 1 & -17 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 56 & -27 \\ 18 & -31 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -18 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\quad}$ $A' = P^{-1}.A.P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 56 & -27 \\ 18 & -31 \end{pmatrix}$

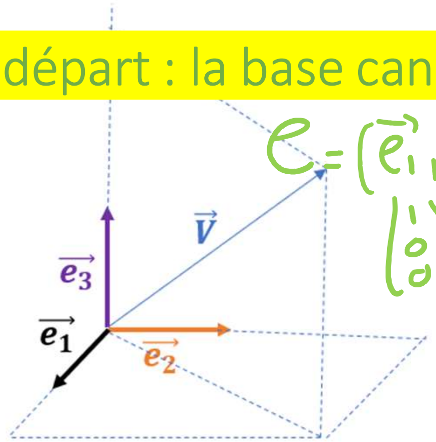
x P⁻¹ .A.P

Changement de base dans $\mathbb{R}^3$

Base de départ : la base canonique

$\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

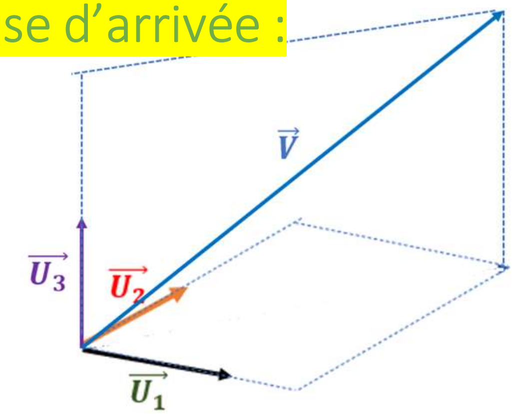


$\vec{V} = \mathrm{x}.\vec{e_1} + \mathrm{y}.\vec{e_2} + \mathrm{z}.\vec{e_3}$; $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}$

Base d'arrivée :

$B = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

$\det(\vec{u_1}, \vec{u_3}, \vec{u_3}) \neq 0$



$\vec{V} = \mathrm{X}.\vec{U_1} + \mathrm{Y}.\vec{U_2} + \mathrm{Z}.\vec{U_3}$; $X, Y, Z \in \mathbb{R}$

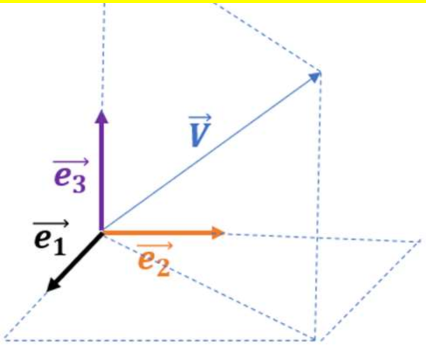
P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

$$\underset{\vec{V}_{\mathcal{C}}}{\mathrm{V}} = P.W = P.\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \xleftarrow{\textbf{x P}} \underset{\vec{V}_B}{\mathrm{W}} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix} \xrightarrow[\textbf{x } P^{-1}.A.P]{} A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix}a' & d' & g'\\ b' & e' & h'\\ c' & f' & i'\end{pmatrix}$$

Changement de base dans $\mathbb{R}^3$ - Exple

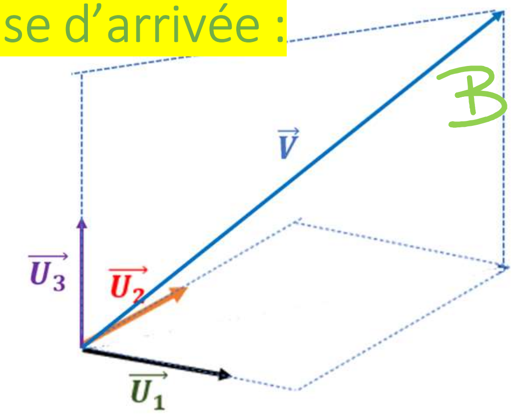
Base de départ : la base canonique



$\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Base d'arrivée :



$\mathcal{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

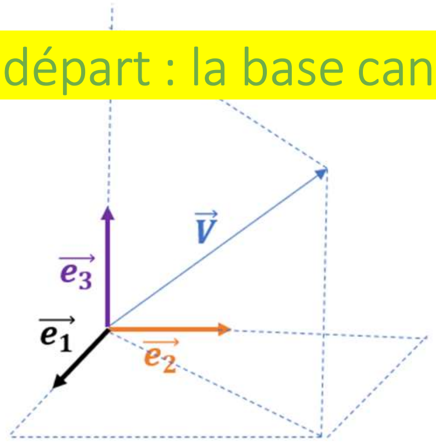
P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -9 \\ 5 & 5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad\quad} A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

x P^{-1} .A.P

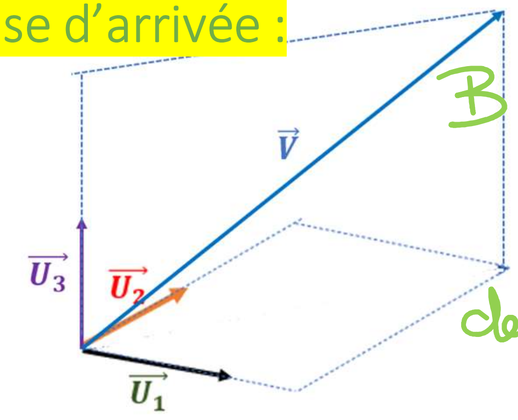
Changement de base dans $\mathbb{R}^3$ - Exple corrigé

Base de départ : la base canonique



$$\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$
$$\quad\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Base d'arrivée :



$$\mathcal{B} = \overbrace{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)}^{\text{vecteurs propres de A}}$$
$$\quad\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$= 1 \neq 0$$

P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 6 & -9\\ 5 & 5 & -8\end{pmatrix} \longrightarrow A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$ est diagonale

x P^{-1} .A.P

valeurs propres de A

Changement de base dans $\mathbb{R}^2$ - Exple

Base de départ : la base canonique

$\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Base d'arrivée : $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \overset{\lambda_1}{-5} & 0 \\ 0 & \underset{\lambda_2}{10} \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$A.\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = -5.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -5.\vec{u}_1 \qquad A.\vec{u}_1 = -5\vec{u}_1$$

$$A.\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \times \vec{u}_2 \qquad A.\vec{u}_2 = 10\vec{u}_2$$

$$\begin{cases} A.V_1 = \lambda_1 V_1 \\ A.V_2 = \lambda_2 V_2 \end{cases} \qquad A.V = \lambda V$$

Base de diagonalisation - Comment trouver les valeurs propres et les vecteurs propres ?

Une matrice carrée A est diagonalisable si et seulement si il existe une base dans la quelle la matrice représentant A diagonale.

Base de départ : la base canonique

Base d'arrivée : base de diagonalisation de A:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$$

P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = (V_1, V_2)$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longrightarrow D = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A.V = \lambda V \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad V \in \mathbb{R}^2$$

$$A.V - \lambda V = 0$$

$$\boxed{(A - \lambda I).V = 0}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \gamma y = 0 \\ \beta x + \delta y = 0 \end{cases}$$ a pour solution $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{U_1}$

$$\Rightarrow \boxed{\det(A - \lambda I) = 0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda_1 I).V = 0 \Rightarrow V_1 \\ (A - \lambda_2 I).V = 0 \Rightarrow V_2 \end{cases}$$

Partie II : Diagonalisation d'une matrice

Partie II page 22

I. Définitions

1) Valeurs propres d'une matrice carrée

Soit A, une matrice carrée d'ordre n. On appelle valeurs propres de A, les solutions λ de l'équation dite caractéristique suivante : $\det(A-\lambda \, Id)=0$.
Cette équation, étant un polynôme de degré n, possède n solutions complexes.
Une matrice carrée d'ordre n, possède donc n valeurs propres complexes.

Rque : . Si $\lambda \notin \mathbb{R}$ alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

. Si A n'a que des valeurs propres simples, alors A et diagonalisable.

2) Vecteurs propres d'une matrice carrée

Soit A, une matrice carrée d'ordre n. Soit λ , une valeur propre simple de A. On appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ , un vecteur V, solution de l'équation : $(A-\lambda I_n)(V)=0$.

3) Matrice de diagonalisation

Soit A, une matrice carrée d'ordre n, possédant n valeurs propres simples. On appelle matrice de diagonalisation, la matrice P, dont les colonnes sont les n vecteurs propres de la matrice A.
La matrice A est alors dite diagonalisable et on obtient alors l'égalité suivante :
$D = P^{-1}AP$ où D est la matrice diagonale, dont la diagonale contient les n valeurs propres de A.

Changement de base dans $\mathbb{R}^2$

Base de départ : la base canonique

Base de diagonalisation : $\mathcal{B}:(V_1, V_2)$

$A.V_1 = \lambda_1 V_1$ et $A V_2 = \lambda_2 V_2$.

P, la matrice de passage de la base B vers la base C : $P = \left(V_1, V_2 \right)$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{D} = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

→ Valeurs propres de A : on résout $\det(A - \lambda I_2) = 0$

si les valeurs propres de A sont toutes simple dans $\mathbb{R}$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

→ Vecteurs propres de A associé à λ_1 : on résout $(A - \lambda_1 I).V = 0 \Longrightarrow V_1$

Vecteurs propres de A " λ_2 : $(A - \lambda_2 I).V = 0 \Longrightarrow V_2$

→ Matrice de diagonalisation : $P = \left(V_1, V_2 \right)$; matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

II. Exemples

1) Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs propres de la matrice A ainsi que ses vecteurs propres associés. Déterminer P, la matrice de diagonalisation de A. Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}AP$.

→ Valeurs propres de A : On résout $\det(A - \lambda I_2) = 0$

$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ donc : $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0$

$\iff \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\iff (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 4) = 0$

Les valeurs propres de A sont donc −1 et 4. A est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$

→ Vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$: On résout $(A - \lambda_1 I) \cdot V = 0$

$y = -x \iff x + y = 0 \iff \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_1} ; x \in \mathbb{R}$

→ Vecteur propre associé à $\overset{\lambda_2}{\overset{\shortparallel}{4}}$: On résout $(A - \lambda_2 I) \cdot V = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{2}{3}x \ ; x \in \mathbb{R} \\ \cancel{2x - 3y = 0} \end{cases}$$

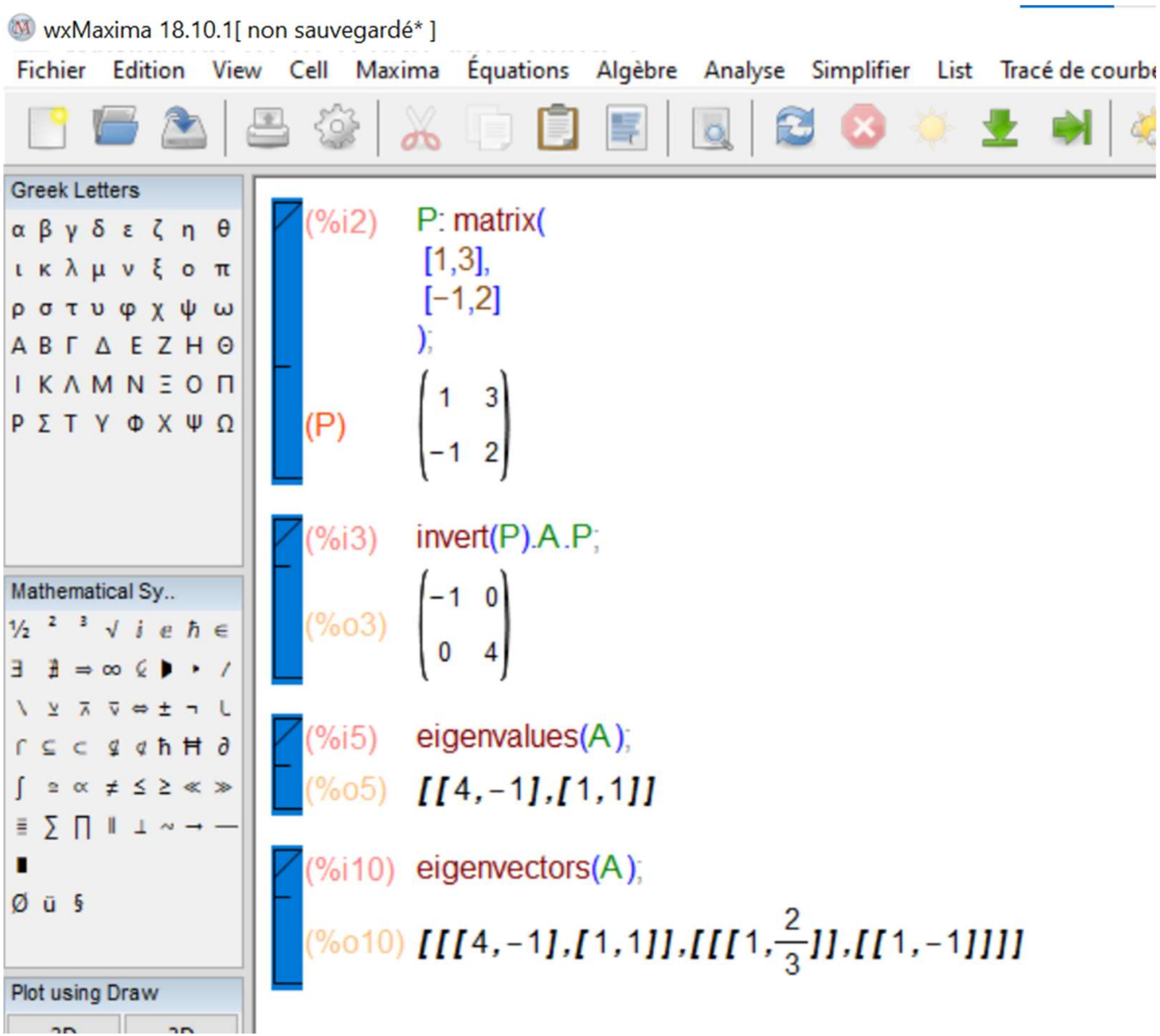
$$\Longleftrightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{V_2} \cdot \frac{x}{3} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

→ Base de diagonalisation de A : (V_1, V_2) $\qquad (V_2, V_1)$

→ Matrice " de A : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

→ Matrice diagonale :

$$D = \boxed{P^{-1} A P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$


wxMaxima 18.10.1[non sauvegardé*]
Fichier Edition View Cell Maxima Équations Algèbre Analyse Simplifier List Tracé de courbe
Greek Letters
α β γ δ ε ζ η θ
ι κ λ μ ν ξ ο π
ρ σ τ υ φ χ ψ ω
Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ
Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π
Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω
Mathematical Sy..
Plot using Draw
(%i2) P: matrix([1,3], [−1,2]);
(P) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
(%i3) invert(P).A.P;
(%o3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
(%i5) eigenvalues(A);
(%o5) [[4,−1],[1,1]]
(%i10) eigenvectors(A);
(%o10) $[[[4,-1],[1,1]],[[[1,\frac{2}{3}]],[[1,-1]]]]$

2) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Même questions que précédemment.

Partie II page 23

1) Exemple Résoudre les systèmes suivants :

Partie II page 28

✓ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 5y \end{cases}$ avec x(0)=1 et y(0)=0.

→ Ecriture matricielle du système : $V'(t) = A.V(t)$ dans la base canonique.

→ Diagonalisation de A : → Valeurs propres λ : Résolution de $\det(A - \lambda I) = 0$

→ Vecteurs propres associés à chaque valeur propre λ :

Résolution de $(A - \lambda I).V = 0$

dans la base de diag^{le} : $W'(t) = D.W(t)$

→ Matrice de passage = P

→ Matrice diagonale = D

→ Résolution du système dans la base de diagonalisation

→ Retour à la base Canonique : $V(t) = P.W(t)$