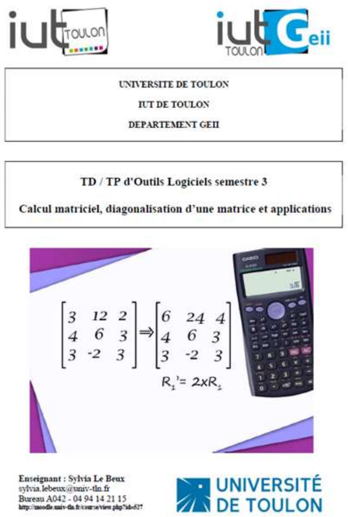
TP5-1 - Matrices – Correction du devoir maison.

- Consignes à suivre pour les TD à distance :



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !

- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…

- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai.

- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance :

- Page 19 et page 34 : exercices 6 et 7 : Résolution d'un système d'équations linéaires

- page 23 diagonaliser la matrice B de l'exemple 2 : voir vidéo TP5-2

- Page 28 : résoudre le système d'équations différentielles de l'exemple 1.

Page 19 du polycopié

<u>Exemple</u> Soit le système : $S\begin{cases}2x+y-z=4\\ x-2y+z=-1\\ -x+2y+2z=-5\end{cases}$. Résoudre S. (On vérifiera les calculs intermédiaires à l'aide du logiciel Maxima)

$$(S) \iff \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix}4\\ -1\\ -5\end{pmatrix}}_{B}$$

Si A^{-1} existe :

$$\underbrace{A^{-1}A}.V = A^{-1}B$$

$$I_3 . V = A^{-1}B$$

$$V = A^{-1}.B$$

(S) possède une unique solution ssi A est inversible ssi $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} . {}^{t}\mathrm{Co}A .$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\det A = -1 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -(20-5) = -15 \neq 0$$ donc A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times {}^tCoA.$$

$$CoA = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -6 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \quad V = A^{-1}.B = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -6 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$S\begin{cases}2x+y-z=4\\ x-2y+z=-1\\ -x+2y+2z=-5\end{cases}$$

$v=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}2+0+2=4\\ 1-0-2=-1\\ -1+0-4=-5.\end{cases}$$

Conclusion : $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}.$

TP : A l'aide du logiciel Maxima, résoudre le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} X+2Y+3Z-T+V=1 \\ X+2Y+Z-U+V=0 \\ Y+Z+2T-2U=1 \\ Y+3Z+2T+U+V=-1 \\ 2X-3Y+Z+2T+4U+2V=0 \\ X+2Y+2Z-U+V=1 \end{cases}$$

Page 21 du polycopié

```
(%i1) A: matrix(
 [1,2,3,-1,0,1],
 [1,2,1,0,-1,1],
 [0,1,1,2,-2,0],
 [0,1,3,2,1,1],
 [2,-3,1,2,4,2],
 [1,2,2,0,-1,1]
);
```

$$(A)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \\ U \\ V \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si A^{-1} existe : $\quad A^{-1} A \times W = A^{-1} B$

$$W = A^{-1} B.$$

(S) possède une unique solution ssi $\det A \neq 0$

```
(%i3) determinant(A);
```

shift entrée

(%o3) $-8 \neq 0$

Page 21 du polycopié

```
(%i2) B: matrix(
 [1],
 [0],
 [1],
 [-1],
 [0],
 [1]
);
```

$$(B)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\%i4)\quad \underbrace{\text{invert}(A)}^{A^{-1}}.B;$$

$$(\%o4)\quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \\ -\frac{7}{8} \\ -\frac{15}{8} \\ \frac{13}{8} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$S = \left\{ \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 8 \\ -7 \\ -15 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 6 : Soit la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'elle est inversible et déterminer sa matrice inverse.

Page 34 du polycopié

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{coeff de } x & \text{de } y & \text{de } z. \end{array}$$

$\det M = 4 \neq 0$. M est donc inversible et : $M^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 9 & -12 \\ -2 & 5 & -8 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1) Résoudre alors le système suivant : $\begin{cases} x + 3y - 12z = 2 \\ 2x - 8z = -4 \\ x - y - 2z = 6 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow M \cdot V = B$ où $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow V = M^{-1} B = \begin{pmatrix} -58 \\ -36 \\ -14 \end{pmatrix}$

2) Faire de même pour résoudre : le système (S) $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y + z = -1 \\ -x + 2y + 2z = -5 \end{cases}$.

$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$A \cdot V = B$

$\left\{ \begin{array}{l} \det A = -15 \\ A^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \right.$ $\left\{ V = A^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right.$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 7

pivot de Gauss.

1) Soit la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} a & \boxed{1} & a \\ -a & 0 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$ où a est réel. Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ? Trouver A^{-1} dans le cas où a=2.

2) Résoudre par inversion de la matrice le système : (S) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$

1) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -a & 0 & a \\ a-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{matrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -a & a \\ a-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = -\left(-a + a^3 - a^2 + a^3\right)$

$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \quad i \neq j.$

$|A| = -2a^3 + a^2 + a$

A est inversible ssi $|A| \neq 0$.

On résout $-2a^3 + a^2 + a = 0 \iff a(-2a^2 + a + 1) = 0$

(A) $\begin{bmatrix} a & 1 & a \\ -a & 0 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$

(%i19) determinant(A);

(%o19) $-2a^3 + a^2 + a$

MAXIMA

$|A| = 0 \iff a = 0$ ou $2a^2 - a - 1 = 0$

$(\%o19)\ -2a^3 + a^2 + a$

$\boxed{\text{MAx in A}}$

$(\%i21)$ solve(−2·a^3+a^2+a,a);

$\iff a = 0$ ou $2(a-1)(a+1/2) = 0$

$(\%o21)\ [a=1, a=-\frac{1}{2}, a=0]$

$|A| = 0 \iff a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -1/2$

* A est donc inversible si et seulement si $a \in \mathbb{R} - \{0; 1; -1/2\}$.

* Si $a = 2$, alors A est inversible, $\det A = -2.(2)^3 + 2^2 + 2 = -16 + 4 + 2 = -10$

et $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t CoA$ où $CoA = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t CoA$.

Donc $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -6 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) Résoudre par inversion de la matrice le système : (S) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases} \iff A.V = B$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$A \cdot V = B$ — A est inversible car $\det(A) = -10 \neq 0$

$$\iff V = A^{-1} B$$

$$\iff V = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -6 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff V = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1) Exemple Résoudre les systèmes suivants :

Page 28 du polycopié

✓ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 5y \end{cases}$ avec x(0)=1 et y(0)=0.

CI à traiter à la fin.

Base Canonique

Base de diagonalisat° de A ??

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \longrightarrow B = (v_1, v_2)$$

$$V'(t) = A \cdot V(t) \longrightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

→ Diagonalisation de A :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 8 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Valeurs propres de A : On résout $\det(A - \lambda . I_2) = 0$

$$|A-\lambda I_2| = 0 \iff \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (3-\lambda)(5-\lambda) - 48 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 8\lambda - 33 = 0$$

$$\Delta = 64 + 132 = 196 = 14^2$$

$$\lambda_1 = \frac{8+14}{2} = 11 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{8-14}{2} = -3$$

les valeurs propres de A sont simples ; A est donc diagonalisable. $\det(V_1, V_2) \neq 0$

A est diag^{ble} ssi il existe une base de $\mathbb{R}^2$: $\{V_1, V_2\}$.
Par rapport à laquelle : A est diagonale.

→ Base de diagonalisation de A :

- Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 11$: on résout $(B-11I).V = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 8x - 6y = 0$$

$$\iff y = \frac{8}{6}x$$

$V \in E_{11} \iff V = \begin{pmatrix} x \\ \frac{4}{3}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot x \ ; \ x \in \mathbb{R}$

ou $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \tilde{x} \ ; \ \tilde{x} \in \mathbb{R}$.

On choisit $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\{ V \in \mathbb{R}^2 / (A - 11I) \cdot V = 0 \}$

$=$ Noyau de $A - 11I$

"Ss espace propre associé à $\lambda_1 = 11$."

$\boxed{\text{Notation}}$

$E_{11} = \mathrm{Ker}\,(A - 11I) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ est engendré par $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

E_{11} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et $\dim E_{11} = 1$

$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

$\{V_1, V_2\}$ forme donc une base de $\mathbb{R}^2$

- Vecteur propre associé à $\lambda_2 = -3$: On résout $(A + 3I) \cdot V = 0$

$\iff \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = -x \ ; \ x \in \mathbb{R}$.

$V \in E_{-3} \iff V = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x \ ; \ x \in \mathbb{R}$ On choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Notation}}$

$E_{-3} = \mathrm{Ker}\,(A + 3I) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. $\dim E_{-3} = 1$.

- Base de diagonalisation de A : $\mathcal{B} = \{V_1, V_2\}$
- Matrice de passage : $P = \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \\ \end{array}$ $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
  de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Si on avait choisi :
$\mathcal{B} = \{V_2, V_1\}$.

Alors :
$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

Base Canonique

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$V' = A.V$

$V = P.W$

$\times P$

Base de diagonalisation de A

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X' = 11.X \\ Y' = -3.Y \end{cases}$$

$W' = D.W$

$\Leftrightarrow W = \begin{pmatrix} k_1.e^{11t} \\ k_2.e^{-3t} \end{pmatrix}$

$V = P.W$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{11t} \\ k_2 e^{-3t} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x(t) = 3k_1 e^{11t} + k_2 e^{-3t} \\ y(t) = 4k_1 e^{11t} - k_2 e^{-3t} \end{cases}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

. Conditions initiales : $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$

$$\begin{cases} x(0) = 3k_1 + k_2 = 1 \\ y(0) = 4k_1 - k_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 7k_1 = 1 \iff k_1 = \frac{1}{7} \\ k_2 = 4k_1 \iff k_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{7}\left(3e^{11t} + 4e^{-3t}\right) \\ \frac{4}{7}\left(e^{11t} - e^{-3t}\right) \end{pmatrix} \right\}.$$