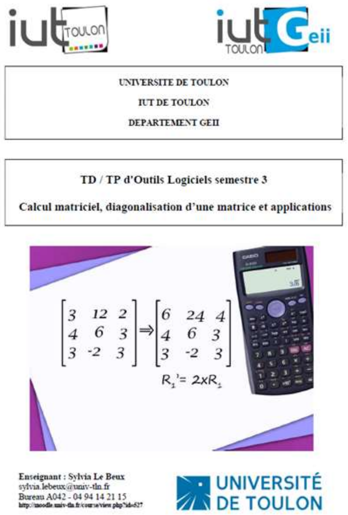
TP5-2 - Matrices – Diagonalisation d’une matrice à valeurs propres non toutes simples.

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :


UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

TD / TP d’Outils Logiciels semestre 3
Calcul matriciel, diagonalisation d’une matrice et applications

Enseignant : Sylvia Le Beux

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> :

- Rappel lorsque les valeurs propres de A sont toutes simples.
- Exemples de matrice à valeurs propres non toutes simples et résumé.
- Application à la résolution de systèmes d’équations différentielles et d’équations aux différences.

Si A a toutes ses valeurs propres simples, alors A est diagonalisable.

$\mathcal{C}$, Base canonique. $\longrightarrow$ $\mathcal{B}$, base de diagonalisation

Dans $\mathbb{R}^2$:

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (V_1, V_2)$

$\boxed{\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall\, i, j}$

Dans $\mathbb{R}^3$:

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$

Que se passe-t-il si les valeurs propres de A ne sont pas toutes simples ?

$\lambda_1 = 1$ double $\longrightarrow V_1 \ldots\ldots V_3$??

$\lambda_2 = 0$ simple $\longrightarrow V_2$

2) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Même questions que précédemment.

Page 23 du polycopié

Diagonalisation de B.

→ Valeurs propres de B : On résout $|B - \lambda I_3| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\left[\underbrace{(3-\lambda)^2}_{a^2} - \underbrace{4}_{b^2}\right]$$

$$= (-1-\lambda)(\underbrace{3-\lambda}_{a} - \underbrace{2}_{b}) \cdot (\underbrace{3-\lambda}_{a} + \underbrace{2}_{b})$$

$$|B - \lambda I_3| = (-1-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)$$

Toutes valeurs propres de B sont donc simple : $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 5$

B est alors diagonalisable.

Il ne reste plus qu'à déterminer les 3 vecteurs propres associés à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pour obtenir la base de diagonalisation de B.

Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Même questions que précédemment.

Page 25 du polycopié

$\rightarrow$ Valeurs propres de C : On résout $|C - \lambda I_3| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

C a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ qui est double

$\lambda_2 = 2$ qui est simple.

$\rightarrow$ Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \underline{1}$: On résout $(C - \underbrace{\lambda_1}_{1} I) \cdot V = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = 0 ;\ x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R}.$$

$V \in E_1 \iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; x, y \in \mathbb{R}.$

ss ev propre associé à 1.

E_1 est un sous espace vectoriel de dimension 2, car il est engendré par deux vecteurs non lié. E_1 est appelé sous espace propre associé à la valeur propre 1. $\dim E_1 = 2$

Comme $\dim E_1 = 2$ alors C est diagonalisable.

valeur propre double

Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ Vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$: On résout $(C - 2I) \cdot V = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = x \\ y = z \end{cases} \iff V = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R}$$

$E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \dim E_2 = 1.$

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ Base de diagonalisation = $B\,(V_1, V_2, V_3)$ $\quad$ $\det(V_1, V_2, V_3) \neq 0$.

→ Matrice de passage = $P = \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array}$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Matrice diagonale =
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quest: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ $D = \underbrace{P^{-1} A P}$ $\quad$ $\mathcal{C}$. $\quad$ $\mathcal{B}$.

$$V = P \cdot W$$

Page 27 du polycopié

✓ $B = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

→ Valeurs propres = $\lambda_1 = 1$ double

$\lambda_2 = 2$ simple

→ Vecteurs propres associés à 1

$$(B - I).V = 0 \iff \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y=-z\\ z=0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff V = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}; x\in\mathbb{R}$$

$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$. dim $E_1 = 1$.

A n'est donc pas diagonalisable.

Conditions de diagonalisation d'une matrice

Hors polycopié

Une matrice A d'ordre n, est diagonalisable sur K si et seulement si :
a) l'équation det(A-λ Id) =0 possède n solutions : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ dans K
et
b) $\forall i, \dim(E_{\lambda_i}) = k_i$ où E_{λ_i} est le sous espace propre associé à la valeur propre λ_i de multiplicité k_i

$E_{\lambda_i} = \{V / (A-\lambda_i I).V = 0\}$.

Cas particulier Si les n valeurs propres sont toutes simples dans K, alors A est diagonalisable dans K.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) - y(t) + 3z(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x(t) - 2y(t) + 9z(t) \end{cases}$$ vérifiant les conditions (initiales) : $x(0)=y(0)=0$ et $\dfrac{dz}{dt}(0) = -27$.

Page 30 du polycopié

Exercice 2 On peut utiliser le calcul matriciel pour étudier les suites récurrentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

Hors polycopié

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

pour cela on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) Exprimer X_{n+1} à l'aide de X_n et A, en déduire l'expression de X_n à l'aide de X_{n-1} et A, puis X_n à l'aide de X_{n-2} et A…en déduire que $X_n=A^n.X_0$.

2) Diagonaliser la matrice A, en déduire A^n, puis en déterminer les expressions des suites u_n et v_n en fonction de n.

3) Etudier alors la nature de ces suites.