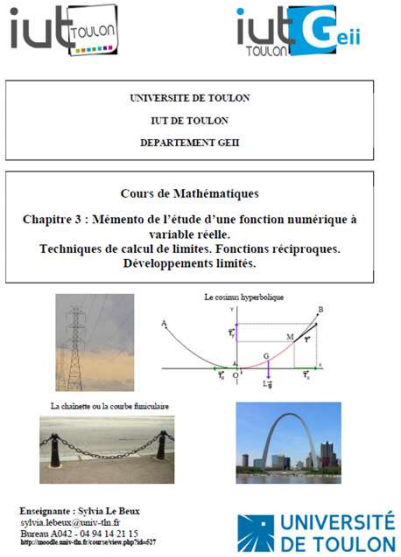
Amphi 12 –Les fonctions numériques
Partie 3 : Corrigé Etude d'une fonction

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :


UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques
Chapitre 3 : Mémento de l'étude d'une fonction numérique à variable réelle.
Techniques de calcul de limites. Fonctions réciproques.
Développements limités.

Le cosinus hyperbolique

La chaînette ou la courbe funiculaire

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=637

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai pendant et en dehors de mon emploi du temps.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> : - Démonstration de la dérivée de deux fonctions composées.
  - Exercices de la vidéo 34
  - Exercices supplémentaires page 42 n°6,7,8 et exercices ENSEA

Dérivée d'une fonction composée

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto y = f(x)$ $\qquad$ $U : \mathcal{D}_U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto y = U(x)$

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_U$ et $X_0 = U(x_0) \in \mathcal{D}_f$.

Si f est dérivable en X_0 et U en x_0, alors $f \circ U$ est dérivable en x_0

et $(f \circ U)'(x_0) = U'(x_0) \times f' \circ U(x_0)$

ou $(f(U))' = U' \times f'(U)$ en x_0.

Dém : Calculons : $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f \circ U)(x) - (f \circ U)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(U(x)) - f(U(x_0))}{x - x_0} \times \dfrac{U(x) - U(x_0)}{U(x) - U(x_0)}$

$L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(U(x)) - f(U(x_0))}{U(x) - U(x_0)} \times \dfrac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0}$

Comme U est dérivable en x_0,

alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = U'(x_0)$

Alors $L = U'(x_0) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(U(x)) - f(U(x_0))}{U(x) - U(x_0)}$.

Comme U est dérivable en x_0, alors U est continue en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} U(x) = U(x_0).$$

On peut alors poser $X = U(x)$ et $X_0 = U(x_0)$, on obtient alors :

$$L = U'(x_0) \cdot \lim_{X \to X_0} \frac{f(X) - f(X_0)}{X - X_0}$$

Comme f est dérivable en X_0, alors $L = U'(x_0) \cdot f'(X_0) = U'(x_0) \cdot f'(U(x_0))$.

Ainsi $(f \circ U)' = U' \cdot (f' \circ U)$ d'où les formules de la colonne de droite du tableau page 15.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4}$, et on appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$. non fini. $\mathcal{C}_f$ n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

* $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$?

pour cela : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^3} = 2$. donc $a = 2$

Déterminons b, si il existe :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 8x + 7 - 2x^3 + 8x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + 7}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2}$$

$b = -1$

Donc $\mathcal{C}_f$ a une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = 2x - 1$

Quelle est la position entre $\mathcal{C}_f$ et cette droite Δ ?

*→ position entre $\mathcal{C}_f$ et Δ en $+\infty$: On étudie, pour les grands valeurs positives de x le signe de : $f(x)-(2x-1) = \dfrac{2x^3-x^2-8x+7}{x^2-4} - 2x+1$

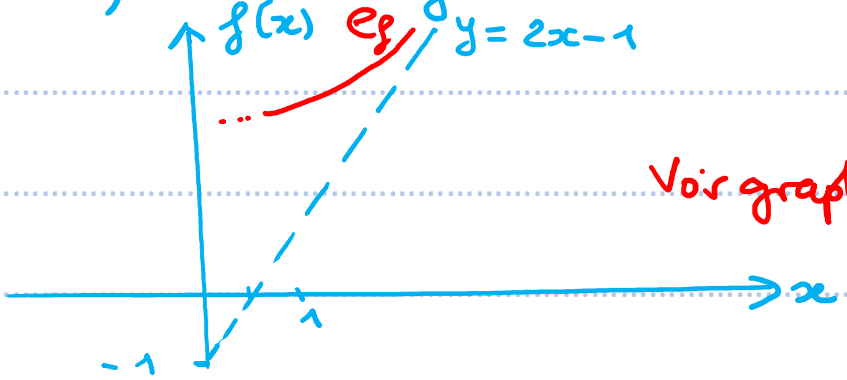
$$= \frac{2x^3-x^2-8x+7-2x^3+8x+x^2-4}{x^2-4}$$

$$f(x)-(2x-1) = \frac{3}{x^2-4}$$

Rappel

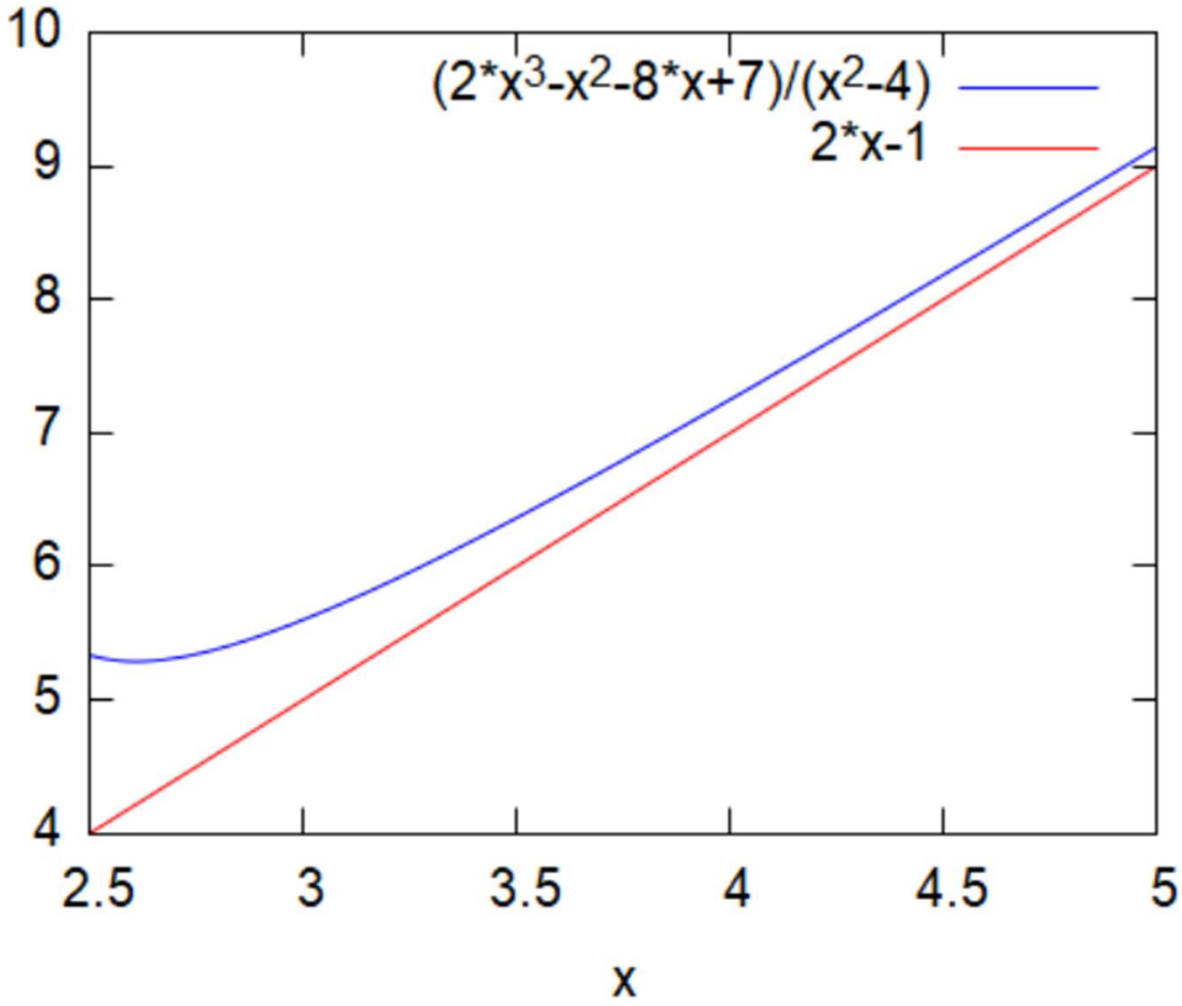
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall x \geq 2$ $\quad f(x)-(2x-1) \geq 0$. $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus de son asymptote en $+\infty$.



Voir graphe complet ci-après.

```
wxplot2d([(2·x^3−x^2−8·x+7)/(x^2−4),2·x−1], [x,2.5,5])$
```



Etude complète de $f(x) = \ln(1+x^2)$ (avec recherche d'asymptote oblique et de point(s) d'inflexion)

→ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. f est paire* : $f(-x) = f(x)$, on l'étudie sur $\mathbb{R}_+$

→ $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

→

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	↗	$+\infty$

→ tangente horizontale en 0

à étudier

* C_f est symétrique par rapport à (Oy).

→ Recherche de point(s) d'inflexion :

On résout $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff 2 - 2x^2 = 0$$

$$\iff 2(1-x^2) = 0$$

$f''(x) = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0$

$f''(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$

Rappel : x_0 est un point d'inflexion lorsque $f''(x_0) = 0$ et lorsque le signe de f'' change de part et d'autre de x_0. Etudions le signe de $f''(x)$

Remarque : f étant paire, on peut ne travailler que sur $\mathbb{R}_+$

$f''(x) = \dfrac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$ est du signe de $(1-x)(1+x) = 1-x^2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		Convexe		Concave		convexe.	

Rappel : f est convexe lorsque $f''<0$; concave lorsque $f''>0$

le signe changeant de part et d'autre des zéros de $f''(x)$, -1 et 1 sont donc des points d'inflexion de C_f.

→ Recherche d'asymptotes obliques :

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Déterminons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

C'est une FI "$\frac{\infty}{\infty}$".

Pour lever l'indéterminée :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right]}{x}$$

$$= \frac{\ln x^2 + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{x}$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{x}}_{\xrightarrow{x\to+\infty} 0}$$

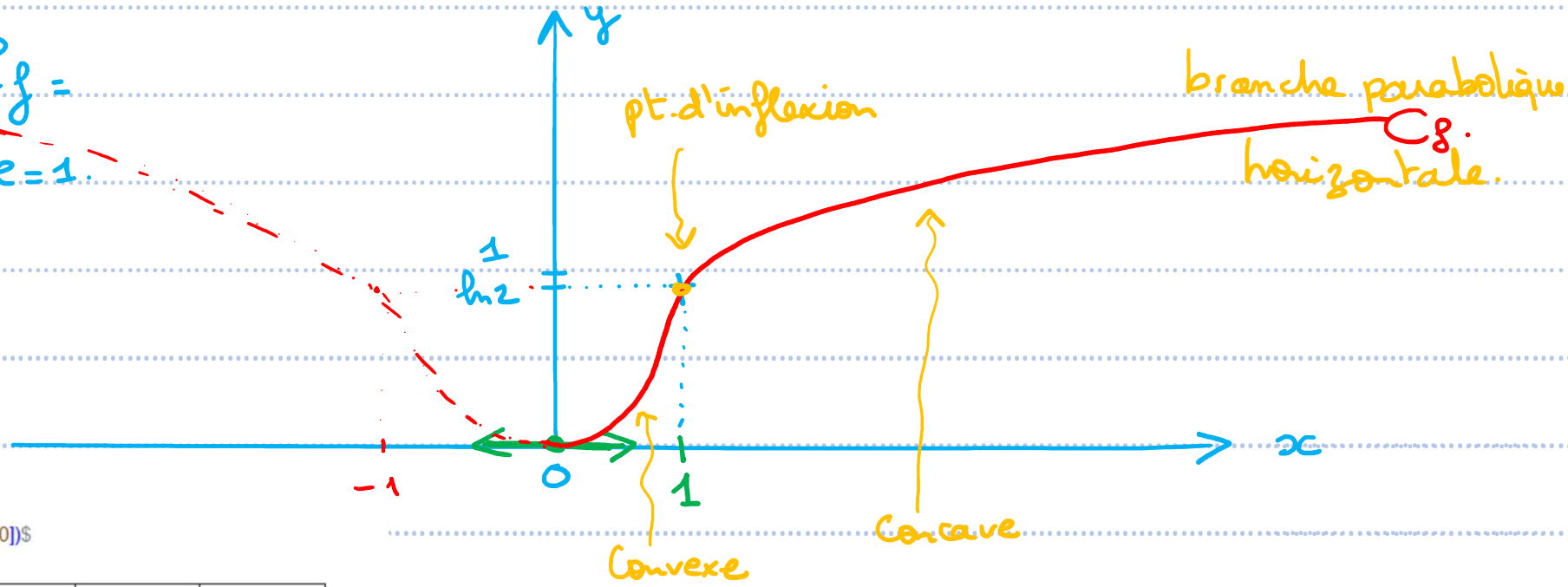
$\ln x \underset{\infty}{\ll} x$ $\qquad$ "$\frac{0}{\infty}$" = "0×0" = 0

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$

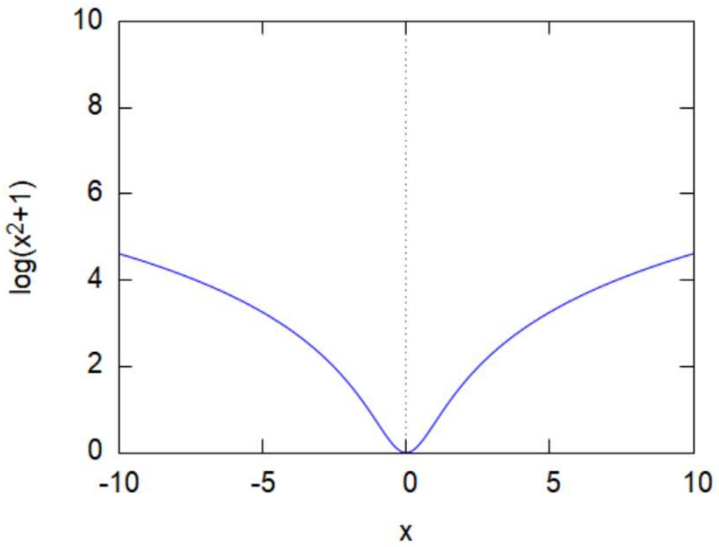
C_f admet donc en $+\infty$ une branche parabolique horizontale

Allure de C_f :

$f(1) = \ln 2 < \ln e = 1$.



wxplot2d([log(1+x^2)], [x,−10,10],[y,0,10])$



Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2005

1) Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$. Etudier g (ensemble de définition, tableau de variation et limites), puis en déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

2) Soit f, la fonction définie par : $f(x) = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$. Etudier f.

1) $g(x)$ existe si et seulement si : $x \neq 0$; $\frac{x-1}{x} > 0$ et $x-1 \neq 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
x		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$\mathcal{D}_g =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{x-(x-1)}{x^2} \times \frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x-1-x}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x(x-1)^2} \quad \forall x \in \mathcal{D}_g.$$

$g'(x) < 0 \quad \forall x > 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	‖	‖	$-$	
g	0	↗	$+\infty$ ‖ ‖	‖ ‖	$+\infty$	↘	0

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\+}} g(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty\\+}} \ln\left(\frac{x}{x}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\left(\frac{x-1}{x}\right) \to \text{"}\frac{-1}{0^-}\text{"} \quad \text{"}+\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \text{"}-\infty+\infty\text{"} \text{ FI.}$$

levons l'indéterminée : $g(x) = \ln(x-1) - \ln x + \dfrac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}\left(\underbrace{(x-1)\ln(x-1)}_{\downarrow\, x\to 1^+} + 1\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

0 car $X \ln X \xrightarrow[X\to 0]{} 0$

g étant continue et strictement croissante sur $]-\infty;0[$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$, alors $g(x)>0 \quad \forall x\in]-\infty;0[$.

Il en est de même sur $]1;+\infty[$.

$g(x)>0 \ \forall x\in \mathcal{D}_g$.

2) $f(x)=e^{x.\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x\neq 0$ et $1-\frac{1}{x}>0 \iff \frac{x-1}{x}>0$

$\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_g=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$. Soit $u(x)=x.\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$u'(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+x\,\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=g(x)$

donc:

$f'(x)=g(x).\underbrace{e^{u(x)}}_{>0}$ est du signe de $g(x)$, et f est donc strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	
f	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1 ‖		‖ 0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\+}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty\\+}} e^{\underbrace{x.\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\text{"}0\times(-\infty)\text{"}\ \text{FI.}}}$$

Pour lever l'indéterminée :

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{-\infty\\+}}{\sim} -\frac{1}{x} \quad (*)$$

$$x.\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{-\infty\\+}}{\sim} -1$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\+}} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(*) En effet, $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$ ← DL en 0 à l'ordre 1.

$X = -\frac{1}{x}$, $x \to \substack{-\infty\\+}$ ↓ 0

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{-\infty\\+}}{\sim} -\frac{1}{x}.$$

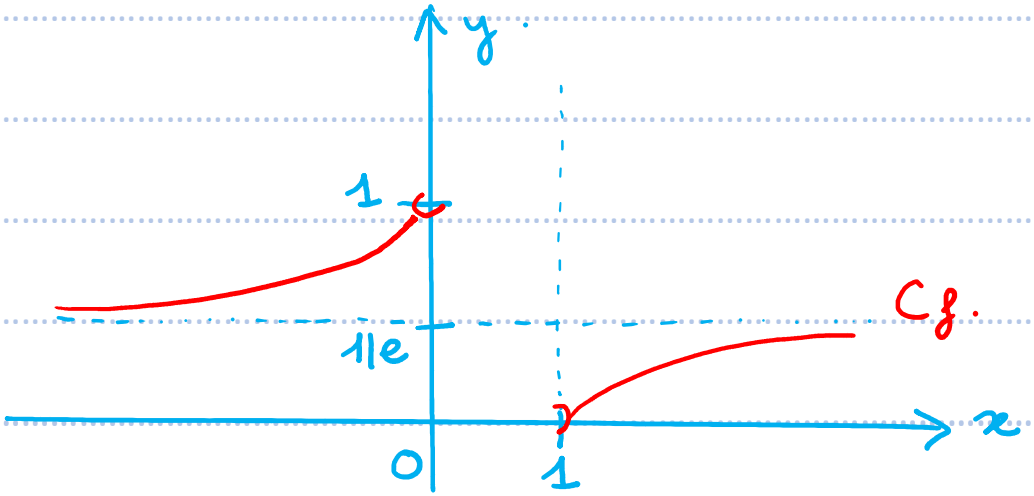
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^{\underbrace{x.\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\text{"}0\times(+\infty)\text{"}\ \text{FI.}}}$$

Pour lever l'indéterminée :

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \underset{0^-}{\sim} \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$$

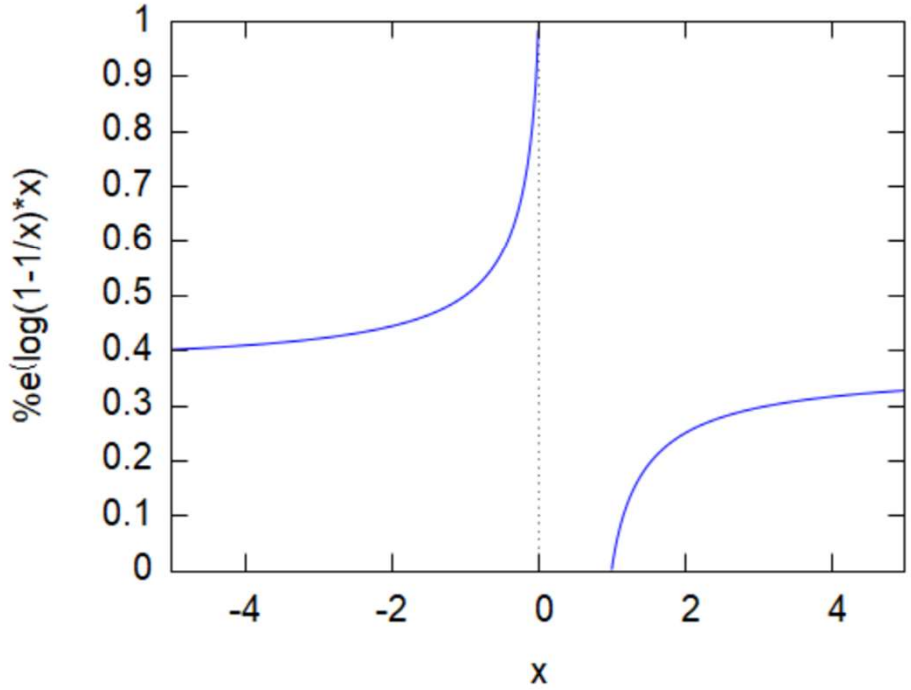
$$x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{0^-}{\sim} -x.\ln(-x) \xrightarrow[x\to0^-]{} 0$$

Ainsi $\lim\limits_{0^-} f(x) = 1$



wxplot2d([exp(x·log(1−1/x))], [x,−5,5])$

plot2d: expr
ession evaluates to non-numeric value som
ewhere in plotting range.



Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2003

Etudier la fonction f, définie par : $f(x) = x - \ln(\text{ch}x)$

$\mathcal{D}_f =$ $f(x)$ existe si et seulement si $\text{ch}x > 0$ ce qui est vrai pour tout x réel.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = 1 - \text{th}x \geq 0 \iff \text{th}x \leq 1$ ce qui est vrai pour tout x réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x - \underbrace{\ln(\underbrace{\text{ch}x}_{\to +\infty})}_{\to +\infty}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \underbrace{\ln(\underbrace{\text{ch}x}_{\to +\infty})}_{\to +\infty}\right) = \text{"}+\infty - \infty\text{"} \text{ FI.}$$

Pour lever l'indéterminée en $+\infty$.

$$f(x) = x - \ln(\operatorname{ch} x)$$

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$$

$$f(x) = x\left(1 \underbrace{- \frac{1}{x}\cdot \ln(e^{x}+e^{-x})}_{\xrightarrow{x\to+\infty}\ 1} + \frac{1}{x}\cdot \ln 2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(e^{x}) = x \\ \frac{1}{x}\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} 1 \end{array}\right\} \text{ donc et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2.$$

→ Recherche d'une direction asymptotique en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\cdot \underbrace{\ln(\underbrace{\operatorname{ch} x}_{\to +\infty})}_{\to +\infty}$$

$(0 \times +\infty)$ FI

$$\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{-\infty}{\sim} \ln(e^{-x}) = -x$$

$$\frac{1}{x}\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{-\infty}{\sim} -1$$

Donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty} x-\ln(\operatorname{ch}x)-2x = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{-\ln(\underbrace{\operatorname{ch}x}_{\to+\infty})}_{\to+\infty} - x = \text{"}-\infty+\infty\text{"} \text{ FI.}$$

pour lever l'indéterminée :

$$f(x) = -\ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) - x = -\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) + \ln 2 - x$$

$$f(x) = -x\left(\frac{\ln(e^{x}+e^{-x})}{x} - \frac{\ln 2}{x} + 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) \underset{-\infty}{\sim} \ln\left(e^{-x}\right) = -x \\ \frac{1}{x}\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) \underset{-\infty}{\sim} -1. \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote oblique en $-\infty$ d'équation : $y = 2x + \ln 2$

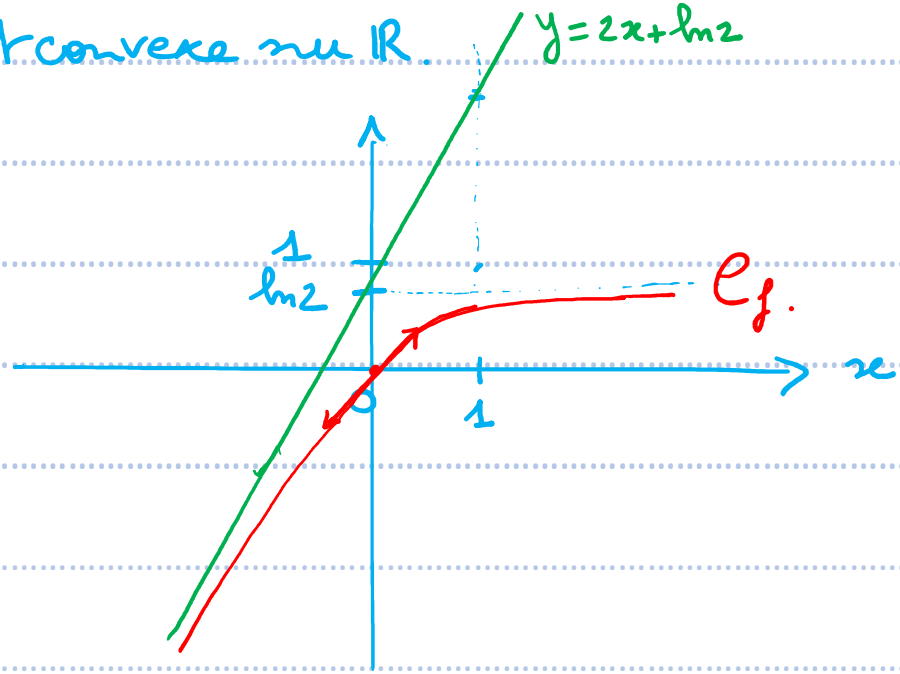
→ Recherche d'un point d'inflexion : On résout $f''(x) = 0$.

$f'(x) = 1 - \text{th}\,x$ donc $f''(x) = -\dfrac{1}{\text{ch}^2 x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{C}_f$ n'admet donc pas de point d'inflexion. Comme $f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = 0 - \ln(\underbrace{\text{ch}\,0}_{1}) = 0$

$f'(0) = 1 - \text{th}\,0 = 1$.



wxplot2d([x−log(cosh(x)),2·x+log(2),log(2)], [x,−5,5],[y,−1,1])$;

plot2d: some values were c
lipped.plot2d: some values were clipped.