Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2005

1) Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$. Etudier g (ensemble de définition, tableau de variation et limites), puis en déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

2) Soit f, la fonction définie par : $f(x) = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$. Etudier f.

1) $g(x)$ existe si et seulement si : $x \neq 0$; $\frac{x-1}{x} > 0$ et $x-1 \neq 0$.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$x-1$	$-$	||	$-$	||	$+$	
x	$-$	||	$+$	||	$+$	
$\frac{x-1}{x}$	$+$	||	$-$	||	$+$	

$\mathcal{D}_g =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{x-(x-1)}{x^2} \times \frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x-1-x}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x(x-1)^2} \quad \forall x \in \mathcal{D}_g.$$

$g'(x) < 0 \quad \forall\ x > 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$				$-$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to -\infty \text{ or } +\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty \text{ or } +\infty} \ln\left(\frac{x}{x}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \to \text{"}\frac{-1}{0^-}\text{"} = \text{"}+\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \text{"}-\infty+\infty\text{" FI.}$$

Levons l'indéterminée : $g(x) = \ln(x-1) - \ln x + \dfrac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}\left(\underbrace{(x-1)\ln(x-1)}_{\substack{x\to 1^+ \\ \downarrow \\ 0 \text{ car } X\ln X \xrightarrow[X\to 0]{} 0}} + 1\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

g étant continue et strictement croissante sur $]-\infty;0[$ avec

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$, alors $g(x)>0 \quad \forall x\in]-\infty;0[$.

Il en est de même sur $]1;+\infty[$.

$g(x)>0 \ \forall x\in \mathcal{D}_g$.

2) $\quad f(x)=e^{x.\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x\neq 0$ et $1-\frac{1}{x}>0 \iff \frac{x-1}{x}>0$

$\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_g=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$. Soit $u(x)=x.\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$u'(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+x\,\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=g(x)$

donc:

$f'(x)=g(x).\underbrace{e^{u(x)}}_{>0}$ est du signe de $g(x)$, et f est donc strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	//////	‖	$+$	
f	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1 ‖	//////	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\underbrace{x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\text{"}0\times(-\infty)\text{"}}}$$

FI.

Pour lever l'indétermination :

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} -\frac{1}{x} \quad (*)$$

$$x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} -1$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(*) En effet, $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$ ← DL en 0 à l'ordre 1.

$X = -\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$; $\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\underbrace{x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\text{"}0\times(+\infty)\text{"}}}$$

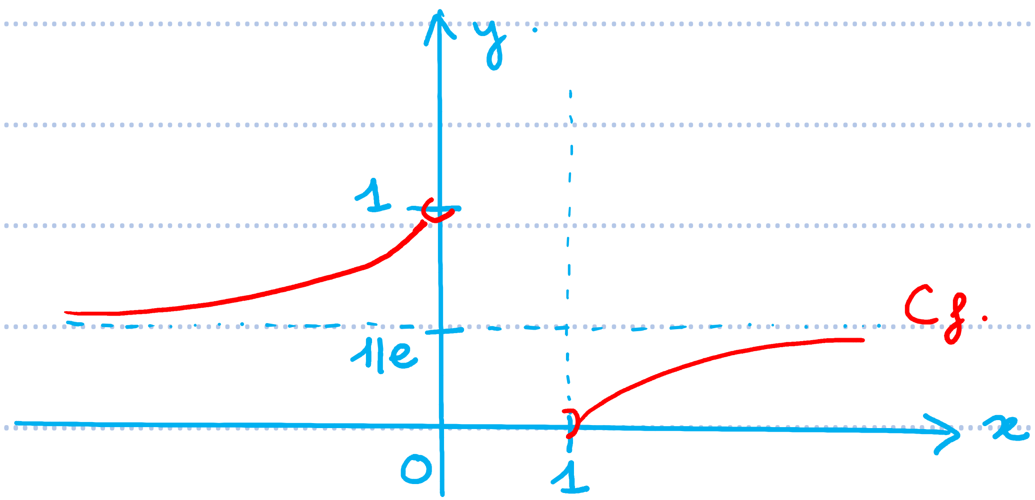
FI.

Pour lever l'indétermination :

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \underset{0^-}{\sim} \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$$

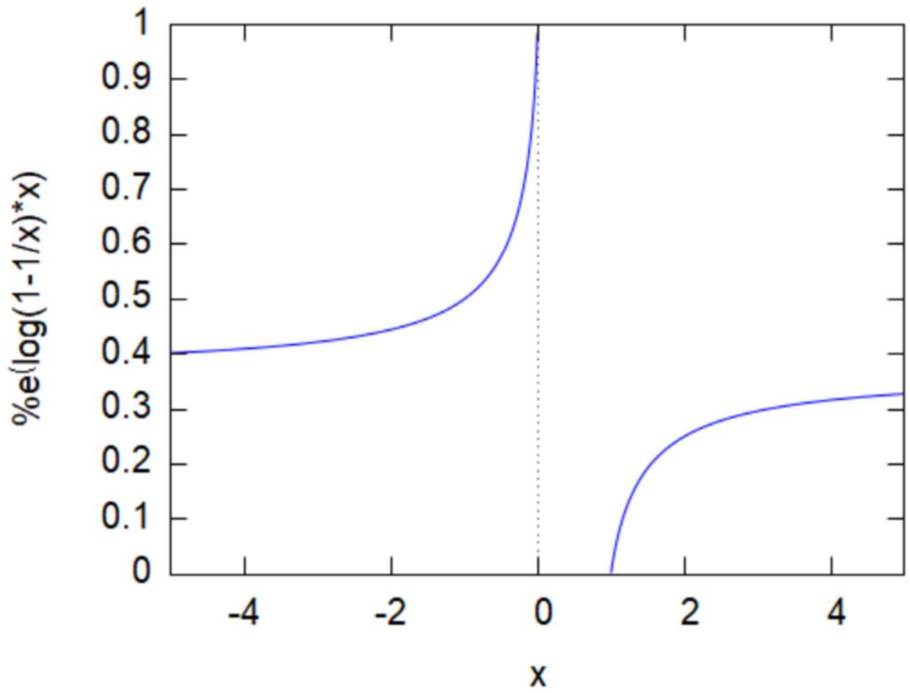
$$x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{0^-}{\sim} -x\cdot\ln(-x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{0^-} f(x) = 1$



wxplot2d([exp(x·log(1−1/x))], [x,−5,5])$

plot2d: expr
ession evaluates to non-numeric value som
ewhere in plotting range.



<u>**Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2003**</u>

Etudier la fonction f, définie par : $f(x) = x - \ln(chx)$

$\mathcal{D}_f$ = $f(x)$ existe si et seulement si $chx > 0$ ce qui est vrai pour tout x réel.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{shx}{chx} = 1 - thx \geq 0 \iff thx \leq 1$ ce qui est vrai pour tout x réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x - \underbrace{\ln(\underbrace{chx}_{+\infty})}_{+\infty}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \underbrace{\ln(\underbrace{chx}_{+\infty})}_{+\infty}\right) = \text{"}+\infty - \infty\text{"} \text{ FI.}$$

Pour lever l'indéterminée en $+\infty$:

$$f(x) = x - \ln(\operatorname{ch} x)$$

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$$

$$f(x) = x\Big(1 \underbrace{- \frac{1}{x}\cdot\ln(e^{x}+e^{-x})}_{\downarrow x\to+\infty \ \ 1} + \frac{1}{x}\cdot\ln 2\Big)$$

$$\left.\begin{aligned} &\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(e^{x}) = x \\ &\frac{1}{x}\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} 1 \end{aligned}\right\}$$

donc

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2.$

→ recherche d'une direction asymptotique en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \underbrace{\underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\cdot \ln(\underset{\downarrow +\infty}{\operatorname{ch} x})}_{\downarrow}$$

$$(0 \times +\infty) \quad \text{FI}$$

$$\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{-\infty}{\sim} \ln(e^{-x}) = -x$$

$$\frac{1}{x}\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{-\infty}{\sim} -1$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty} x-\ln(\operatorname{ch}x)-2x = \lim_{x\to-\infty} -\underbrace{\ln(\underbrace{\operatorname{ch}x}_{+\infty})}_{+\infty}-x = \text{"}-\infty+\infty\text{" F.I.}$$

pour lever l'indéterminée :

$$f(x) = -\ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)-x = -\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)+\ln 2-x$$

$$f(x) = -x\left(\frac{\ln(e^{x}+e^{-x})}{x}-\frac{\ln 2}{x}+1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{-\infty}{\sim} \ln(e^{-x}) = -x \\ \frac{1}{x}\ln(e^{x}+e^{-x}) \underset{-\infty}{\sim} -1. \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote oblique en $-\infty$ d'équation : $y = 2x+\ln 2$

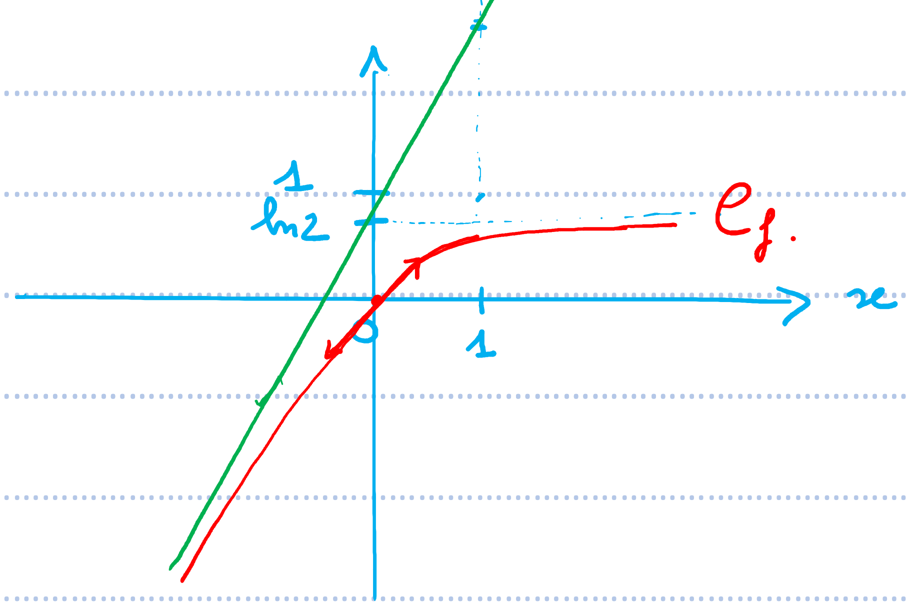
→ Recherche d'un point d'inflexion : On résout $f''(x) = 0$.

$f'(x) = 1 - \operatorname{th} x$ donc $f''(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{C}_f$ n'admet donc pas de point d'inflexion. Comme $f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = 0 - \ln(\underbrace{\operatorname{ch} 0}_{1}) = 0$

$f'(0) = 1 - \operatorname{th} 0 = 1$.




```
wxplot2d([x-log(cosh(x)),2·x+log(2),log(2)], [x,-5,5],[y,-1,1])$;
plot2d: some values were c
lipped.plot2d: some values were clipped.
```