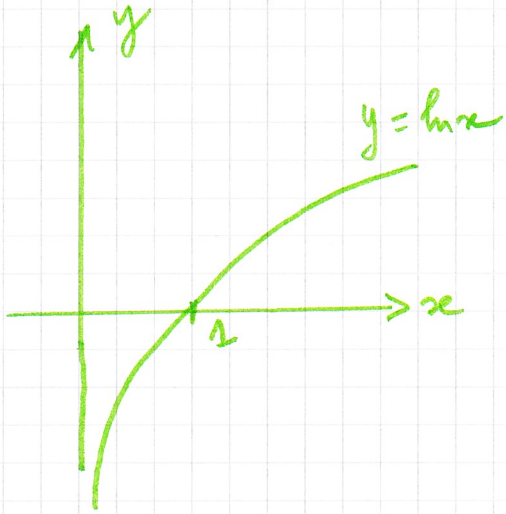
TD 17/03 — Résolution de l'exercice 6 du chap. 3

① $g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$



$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}$

Etude de g :

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{-1+x}{\underbrace{x^2}_{>0}} \qquad \forall x > 0$

$g'(x) \geq 0 \iff -1 + x \geq 0 \iff x \geq 1.$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow x\to 0^+ \; +\infty} + \underbrace{\ln x}_{-\infty}\right) \quad +\infty + -\infty \quad \text{F.I}$$

pour lever l'indéterminée, on factorise par $\frac{1}{x}$:

$$1 + \frac{1}{x} + \ln x = \frac{1}{x} \times (x + 1 + x.\ln x)$$

$x \to 0^+$: $\quad +\infty \times (0 + 1 + 0)$ $\quad$ ($x.\ln x \xrightarrow{x\to 0^+} 0$ car « x l'emporte sur $\ln x$ »)

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$

$g(1) = 1 + \frac{1}{1} + \ln 1 = 2$

La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

② $f(x) = (x+1) \cdot \ln x \quad \forall x > 0$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = g(x) > 0 \quad \forall x > 0 .$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{(x+1)}_{1} \times \underbrace{\ln x}_{-\infty} = -\infty$$

$$1 \times -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x+1)}_{+\infty} \times \underbrace{\ln x}_{+\infty} = +\infty$$

$$+\infty \times +\infty$$