TD 17/03 Résolution de l'exercice 8 du Chap. 3

① $f(t) = 1 - t - \frac{1}{4} e^{t/2} \quad \forall t \geq 0.$

$f'(t) = -1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} e^{t/2} = -1 - \frac{1}{8} e^{t/2} < 0 \; \forall t \geq 0.$

t	0	$0,65$	t_1	$0,66$	$+\infty$
$f'(t)$			$-$		
f	$\frac{3}{4}$	>0	0	<0	$-\infty$

$f(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \text{“}1 - \infty - \infty\text{”} = -\infty.$

D'après le théorème de monotonie :
f est continue sur $[0;+\infty[$, strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et $f(0) > 0$; $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) < 0$
Alors l'équation $f(t) = 0$ possède une unique solution $t_1 \in [0;+\infty[$.

$f(0,65) \simeq 0,004 \qquad f(0,66) \simeq -0,009$

On applique à nouveau le théorème de monotonie sur $[0,65 ; 0,66]$. La solution unique de l'équation $f(t) = 0$ se trouve dans l'intervalle $[0,65 ; 0,66]$.

② $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0 ; t_1]$
et $f(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_1 ; +\infty[$

③ $i(t) = I.\left(e^{-t/2} + \underbrace{2t.e^{-t}}_{U.V}\right)$; $I > 0$

$i'(t) = I.\left(-\frac{1}{2} e^{-t/2} + \underbrace{2e^{-t}}_{U'V} + \underbrace{- 2te^{-t}}_{UV'}\right)$

$= I.2.e^{-t}\left(-\frac{1}{4} e^{t/2} + 1 - t\right)$

$i'(t) = 2I.e^{-t}.f(t)$ est donc du signe de $f(t)$.

t	0		$0{,}65$ $\quad t_1 \quad$ $0{,}66$		$+\infty$
$i'(t)$		$+$	0	$-$	
i	I	$\nearrow$	$i(t_1) > I$	$\searrow$	0

$i'(t_1) = 0$ tangente horizontale en t_1.

asymptote horizontale d'équation $y = 0$

$$\lim_{t \to 0} i(t) = I.(1+0) = I$$

$$\lim_{t \to +\infty} i(t) = \lim_{t \to +\infty} I\Big(\underbrace{e^{-t/2}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0} + \underbrace{2t.e^{-t}}_{\text{"}+\infty \times (0)\text{"}}\Big) = 0$$

FI l'exponentielle l'emporte sur le polynôme, donc $\lim_{t \to +\infty} t.e^{-t} = 0$