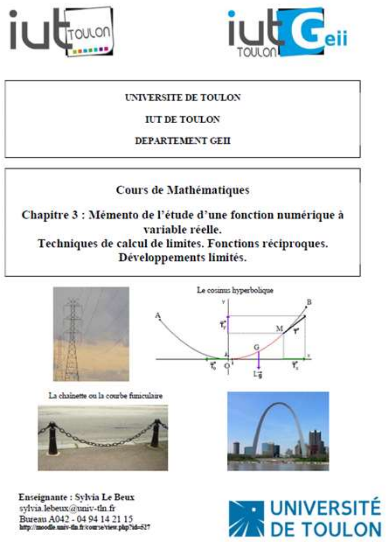
Poursuites d'études 8 : Les développements limités – Partie 1/4

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :


UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Mémento de l'étude d'une fonction numérique à variable réelle.
Techniques de calcul de limites. Fonctions réciproques.
Développements limités.

Le cosinus hyperbolique

La chaînette ou la courbe funiculaire

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> :

  - Introduction
  - Théorème des accroissements finis,
  - Première méthode de calcul des DL par la formule de Taylor-Young

Page 59 du chapitre 3

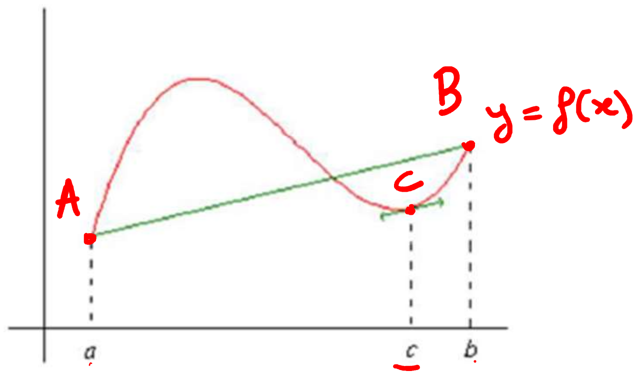
Partie E : Développements limités

I. Généralités :

1) Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] et dérivable sur]a,b[.
Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Th : Si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I \subset \mathcal{D}_f$
Alors f est croissante sur I.



Théorème des accroissements finis

2) Définition / Théorème de Taylor

Si f est n fois dérivable sur [a,b], et si $f^{(n+1)}$ existe sur]a,b[, alors il existe $c \in$]a,b[tel que :

$$f(b) = \underbrace{\overbrace{f(a)+(b-a).f'(a)}^{}_{\text{Tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } a.} + \frac{(b-a)^2}{2!}.f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}.f^{(3)}(a)+\dots+\frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a)}_{\text{« Développement de Taylor d'ordre n en a. »}} + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c)}_{\text{« Reste du développement d'ordre n en a. »}}$$

« Développement de Taylor d'ordre n en a. » **« Reste du développement d'ordre n en a. »**

Partie régulière du DL_n en a.

= En posant a = 0 et b = x dans la formule précédente, on obtient :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.f^{(3)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}.f^{(n)}(0)}_{\text{Partie régulière du } DL_n \text{ en } 0 \text{ de } f} + \underbrace{\overbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c)}^{x^n.\varepsilon(x) = O(x^n).}}_{\text{Reste}}$$

$$x^n . \underbrace{\boxed{\frac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}}_{\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

Page 61 du chapitre 3

Formule de Taylor-Young

Si f est n fois dérivable sur un voisinage de 0, alors elle admet le développement limité en 0 à l'ordre n suivant :

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}.f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

Où $O(x^n)$ se lit « grand O de x^n », est appelé le « reste d'ordre n », et est une fonction qui vérifie : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$.

Remarques :

- Au voisinage de 0, la fonction $O(x^n)$ converge vers 0 plus rapidement que la fonction x^n.
- Dans ce chapitre, nous n'étudierons que les développements limités en 0, en effet, pour obtenir les développement limités en x_0 , il suffira alors de changer de variable : $X=x - x_0$
- D'autres notations existent pour exprimer le reste du développement limité de f à l'ordre n en $\cancel{x_0}$ 0 : $O(x^n) = x^n.\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

en x_0 $O((x-x_0)^n)$

II. Méthodes de calcul des développements limités :

Page 62 du chapitre 3

1) Méthode de calcul 1 : en utilisant la formule de Taylor/young (pour les fonctions usuelles)

- ✓ Soit $f(x) = e^x$.
  f est-elle développable à l'ordre n en 0 ? $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$f(x) = \underbrace{f(0)}_{e^0} + x\,\underbrace{f'(0)}_{e^0} + \frac{x^2}{2!}\underbrace{f''(0)}_{e^0} + \frac{x^3}{3!}\underbrace{f^{(3)}(0)}_{e^0} + \dots + \frac{x^n}{n!}\underbrace{f^{(n)}(0)}_{e^0} + x^n.\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n.\varepsilon(x)$

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \qquad n \in \mathbb{N}^* \qquad 0! = 1$

$1! = 1 \qquad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$2! = 1 \times 2 = 2 \qquad 4! = 24$ $\times 4$

...

Page 62 du chapitre 3

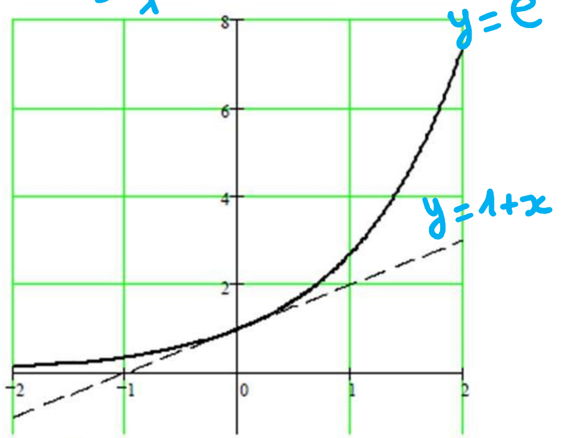
II. Méthodes de calcul des développements limités :

1) Méthode de calcul 1 : en utilisant la formule de Taylor/young (pour les fonctions usuelles)

✓ Soit $f(x) = e^x$.
f est-elle développable à l'ordre n en 0 ? oui car $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

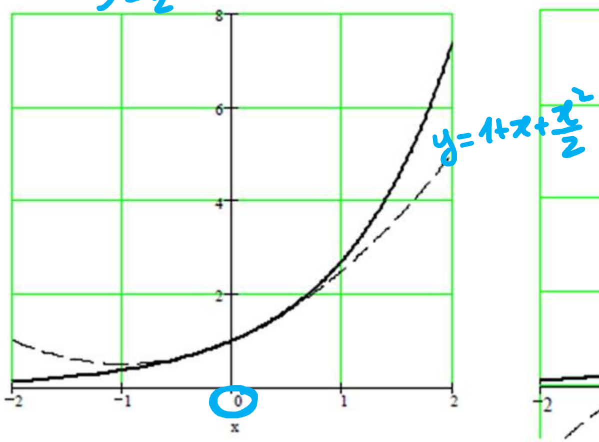
DL$_1$ en 0



___ $y = e^x$

---- $y = 1+x$

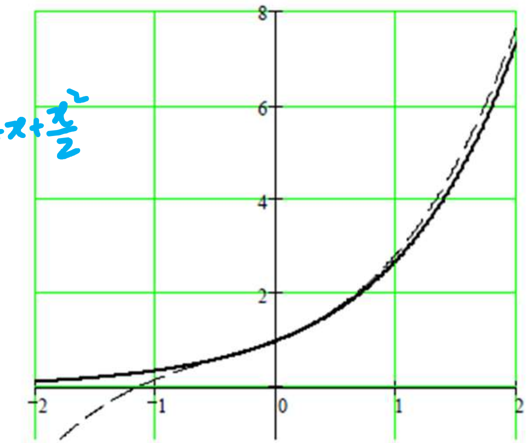
DL$_2$ en 0



___ $y = e^x$

------ $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

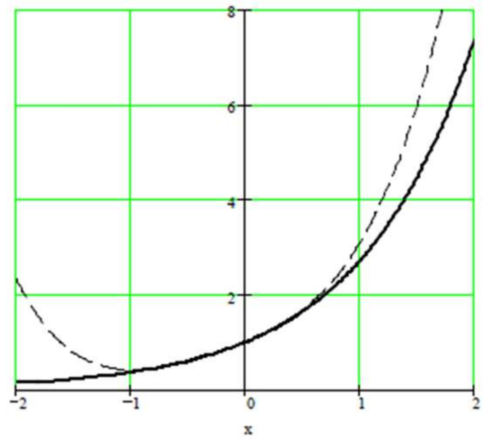
DL$_3$ en 0



___ $y = e^x$

---- $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

DL$_4$ en 0.



___ $y = e^x$

------ $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$

✓ Soit f(x)=sinx.

f est-elle développable à l'ordre n en 0 ? oui car $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Page 63 du chapitre 3

$f(x) = \sin x$

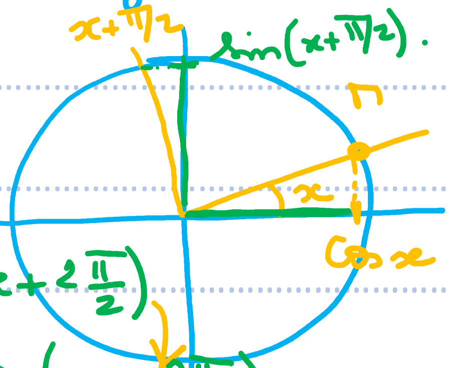
$f'(x) = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

dérivée

$f''(x) = \cancel{-\sin x} = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{(3)}(x) = \cancel{-\cos x} = \cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

$f^{(4)}(x) = \cancel{\sin x}$



$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \quad n \in \mathbb{N}.$

$f(0) = 0 \; ; \; f'(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \; ; \; f''(0) = \sin(\pi) = 0 \; \ldots \; f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} + x^{2p+1} \cdot \varepsilon(x).$

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \underbrace{\frac{x^2}{2!} f''(0)}_{0} + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \cdot \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \cdot \varepsilon(x).$$

Expls : • DL_3 en 0 de $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underbrace{x^3 \cdot \varepsilon_1(x)}. \qquad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

• DL_4 en 0 de $\sin x$:

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}} + \underbrace{x^4 \cdot \varepsilon_2(x)} \qquad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\qquad$ sin est impaire

$(-x)^{2p+1} = -\ x^{2p+1}$

Tableau des développements limités à l'ordre n en 0 des fonctions usuelles

Page 65 du chapitre 3

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n})$$

paire

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1})$$

impaire

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n})$$

paire

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^n)$$

~~Faux~~

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^n)$$

Remarque : Le développement limité d'une fonction paire (respectivement impaire) ne contient que des puissances paires de x (respectivement impaires)

<u>Exemple</u> : A l'aide de ce tableau, déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + \overset{-1}{\alpha} x + \frac{\overset{(-1)}{\alpha}\overset{(-2)}{(\alpha-1)}}{2} x^2 + \frac{\overset{(-1)}{\alpha}\overset{(-2)}{(\alpha-1)}\overset{(-3)}{(\alpha-2)}}{6} x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) \quad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) \; ; \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \cdot \varepsilon(x). \quad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x)$$

Rle

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$a = -x \qquad a^{n+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$