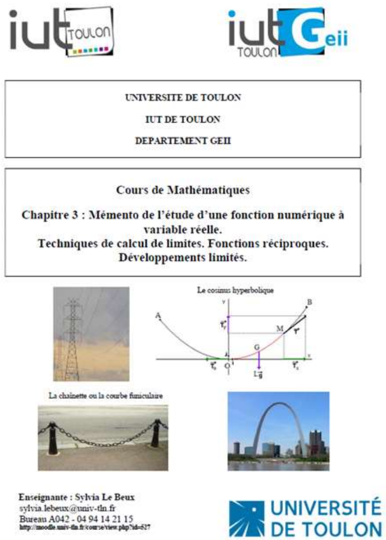
Poursuites d’études 8 : Les développements limités – Partie 2/4

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :


UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Mémento de l’étude d’une fonction numérique à variable réelle.
Techniques de calcul de limites. Fonctions réciproques.
Développements limités.

Le cosinus hyperbolique

La chainette ou la courbe funiculaire

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> : Méthodes de calcul des DL

  - Par les opérations (+ x /)
  - Par dérivation et intégration,
  - Par composition

Page 65 du chapitre 3

$$f(x) = \underbrace{f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}.f^{(n)}(0)}_{\text{partie régulière du } DL_n \text{ en } 0} + \underbrace{\overbrace{O(x^n)}^{x^n.\varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}}_{\text{reste}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$$

Tableau des développements limités à l'ordre n en 0 des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^n)$$

Page 65 du chapitre 3

2) Méthode de calcul 2 : Somme, Produit et Quotient de deux développements limités

a) Somme : Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \frac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \frac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

, alors la fonction f+g est développable à l'odre n en 0 et : $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + O(x^n)$ **avec** $\lim_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$

Page 66 du chapitre 3

Exemple Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de :

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

DL_4 en 0 de $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 . \varepsilon_1(x)$ où $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$-x \to 0$
$x \to 0$

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 . \varepsilon_2(x)$ où $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

DL_4 en 0 de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + x^4 . \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -f(x).$$

Vocabulaire Soit P, un polynôme de degré n. Soit m un entier tel que $m \leq n$. **La troncature de P à l'ordre m** est le polynôme obtenu en enlevant tous les monômes de P de degré strictement supérieur à m.
Par exemple : $P(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$. La troncature de P à l'ordre 2 est le polynôme suivant : $H(x) = 2x^2 - x + 1$.
On dit aussi que H est le **polynôme P, tronqué à l'ordre 2**.

b) **Produit** : Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

, alors la fonction f.g est développable à l'ordre n en 0 et : $(f.g)(x) = H(x) + O(x^n)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{O(x^n)}{x^n} = 0$ et où H est le polynôme P.Q, tronqué à l'ordre n.

<u>Exemple</u> Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$e^x.\sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3.\varepsilon_1(x)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3.\varepsilon_2(x)\right)$ $\quad \varepsilon_i(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $i \in [\![1;2]\!]$.

$= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3.\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$e^x.\sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3.\varepsilon(x)$.

Page 67 du chapitre 3

c) **Quotient** : Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est développable à l'ordre n en 0 et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = H(x) + O(x^n)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O(x^n)}{x^n} = 0$ et où H est le polynôme obtenu en effectuant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q.

<u>Exemple</u> Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de :

tanx = $\frac{\sin x}{\cos x}$ ……………………………………………………………………………

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \hline -\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\ -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \cdots\right) & \\ \hline \frac{2x^5}{15} + \cdots & \end{array}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \cdot \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Page 68 du chapitre 3

3) Méthode de calcul 3 : **Dérivation et intégration d'un développement limité.**

a) **Dérivation** : **Soit f une fonction développable à l'ordre n en 0, telle que :**

$f(x) = P(x) + O_1(x^n)$ **avec** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{O_1(x^n)}{x^n} = 0$ **, alors la dérivée de f est développable à l'ordre n-1 en 0 et :** $f'(x) = P'(x) + \boxed{O(x^{n-1})}$ **avec** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{O(x^{n-1})}{x^{n-1}} = 0$

Exemple En dérivant le développement limité de ln(1+x) à l'ordre n+1 en 0, retrouver le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre n .

DL_{n+1} en 0 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \cdot \varepsilon_1(x)$.

on dérive

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{(-1)^{n-1}} x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Exple : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \cdot \varepsilon_1(x)$.

dérivation

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{\underbrace{3!}_{3\times 2!}} + \frac{5x^4}{\underbrace{5!}_{5\times 4!}} + \dots + \frac{(-1)^p \cdot (2p+1)\, x^{2p}}{\underbrace{(2p+1)!}_{(2p+1)\cdot(2p)!}} + x^{2p} \cdot \varepsilon(x) \quad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \cdot \varepsilon(x).$$

Page 68 du chapitre 3

b) **<u>Primitive</u>** : Soit f une fonction développable à l'ordre n en 0, telle que :

$f(x) = P(x) + O_1(x^n)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{O_1(x^n)}{x^n} = 0$ alors toute primitive F de f est développable à l'ordre n+1 en 0 et : $F(x) = Q(x) + O(x^{n+1})$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{O(x^{n+1})}{x^{n+1}} = 0$ et où Q est une primitive du polynôme P.

<u>Exemple</u> On rappelle que $(\boldsymbol{Arc\tan x})' = \frac{1}{1+x^2}$. En intégrant le développement limité à l'ordre 2n en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$, déterminer le développement limité à l'ordre 2n+1 en 0 de Arctanx.

DL_n en 0 $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^n u^n + u^n \cdot \varepsilon_1(x)$ où $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$u = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} \cdot \varepsilon_2(x).$$

Primitive

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x) + \underline{\underline{Cte}}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + t^{2n}\varepsilon_2(t)\right) dt$$

$\operatorname{Arctan}(0) = 0 = \underline{\underline{cte}}$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x)$$

Autre rédaction

$$\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^x = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + t^{2n+1}\varepsilon_3(t)\right]_0^x \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$\operatorname{Arctan} x - 0 =$

Page 69 du chapitre 3

4) Méthode de calcul 4 : **Développement d'une fonction composée.**

Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

, et g(0)=0. Alors la fonction $f \circ g$ est développable à l'ordre n en 0 et : $(f\circ g)(x) = H(x) + O(x^n)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O(x^n)}{x^n} = 0$ et où H est le polynôme $P \circ Q$ tronqué à l'ordre n.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) =$

$x \to 0$, $\downarrow 0$ DL_n en 0 de $g(x) = Q(x) + \cdots$

DL_n en 0 de $f(x)$

Exemple 1 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$:

DL_3 en 0 : $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \cdot \varepsilon_1(u)$ $\quad \frac{u^4}{24}$ $\qquad \varepsilon_1(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$

Comme $\sin 0 = 0$, $e^{\sin x}$ admet un DL_3 en 0.

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_2(x)}_{u} \qquad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

$1 = 1$

$u = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

$\frac{1}{2} \times u^2 = x^2 + \dots$

$\frac{1}{6} \times u^3 = x^3 + \dots$

DL_3 en 0 de $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$ $\quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$1 = 1$

$u = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

$\frac{1}{2} \times u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots$

$\frac{1}{6} \times u^3 = x^3 + \dots$

$\frac{1}{24} \times u^4 = x^4 + \dots$ $\qquad -\frac{1}{6} + \frac{1}{24}$

DL_4 en 0 de $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4 \cdot \varepsilon(x)$.

Exemple 2 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 2 de ln(1+x) :

DL_3 en 2 de $\ln(1+x) = \ln(1+h+2)$ où $h \to 0$.

On pose $X = x-2$

DL_3 en 0 de $\ln(3+X) = \ln\left(3\left(1+\frac{X}{3}\right)\right) = \ln 3 + \ln\left(1+\underbrace{\frac{X}{3}}_{u}\right)$

DL_3 en 0 de $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \cdot \varepsilon_1(u)$. $u \xrightarrow[X \to 0]{} 0$

DL_3 en 0 de $\ln(3+X) = \ln 3 + \frac{X}{3} - \frac{X^2}{18} + \frac{X^3}{81} + X^3 \cdot \varepsilon_2(X)$

DL_3 en 2 de $\ln(1+x) = \ln 3 + \frac{x-2}{3} - \frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(x-2)^3}{81} + (x-2)^3 \cdot \varepsilon(x)$

où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 2]{} 0$.

Page 72 du chapitre 3

Exercices

Exercice 1 : Rechercher le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre n indiqué :

a) $\ln(1+x)+\text{sh}x$; avec $n=5$ b) $\ln(1-x^2)$; avec $n=6$ c) $\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$; avec $n=6$

d) $\sin x.\ln(1+x)$; avec $n=4$ e) $\cos(x).\sin(2x)$; avec $n=4$ f) $\dfrac{\sin x}{x}$; avec $n=6$

Exercice 2 :

Rechercher le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

a) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ b) $\text{Arctan}(\sin x)$ c) $e^{\cos x}$ d) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ e) $\tan x$

Exercice 3 : Application au calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{x-\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arc}\tan x - x}{\tan x - \text{Arc}\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$