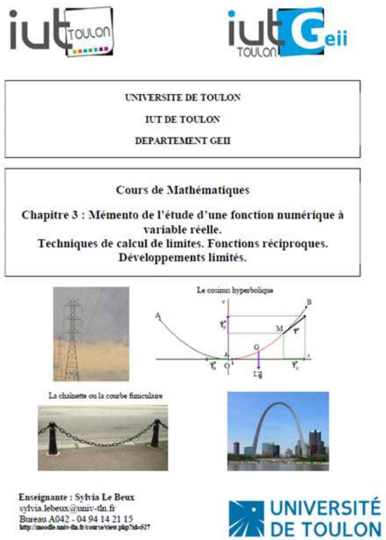
Poursuites d’études 8 : Les développements limités – Partie 3/4

- Consignes à suivre pour les TD à distance :



UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Mémento de l’étude d’une fonction numérique à variable réelle.
Techniques de calcul de limites. Fonctions réciproques.
Développements limités.

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=517

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance : Exercices d’entraînement

  - Résolution
  - Vérification avec MAXIMA et WOLFRAMALPHA
  - Le théorème de l’Hospital et les équivalents pour le calcul de limites

Page 72 du chapitre 3

Exercices

Exercice 1 : Rechercher le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre n indiqué :

a) $\ln(1+x)+\operatorname{sh}x$; avec $n=5$ b) $\ln(1-x^2)$; avec $n=6$ c) $\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$; avec $n=6$

d) $\sin x.\ln(1+x)$; avec $n=4$ e) $\cos(x).\sin(2x)$; avec $n=4$ f) $\frac{\sin x}{x}$; avec $n=6$

Exercice 2 :

Rechercher le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

a) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ b) $\operatorname{Arctan}(\sin x)$ c) $e^{\cos x}$ d) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ e) $\tan x$

Exercice 3 : Application au calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{x-\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctan} x - x}{\tan x - \operatorname{Arcsin} x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\sin x-\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$

DL$_5$ en 0 de : $\qquad$ DL$_5$ en 0 de $\ln(1+x)$ $\qquad$ DL$_5$ en 0 de $\operatorname{sh} x$.

Ex1 : a) $\ln(1+x) + \operatorname{sh} x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5 \varepsilon_1(x) + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_i(x) = 0 \quad \forall i \in \{1,2\}$.

$$\ln(1+x) + \operatorname{sh} x = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{5}{24}x^5 + x^5 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

DL$_6$ en 0 de :

b) $\ln(1-x^2) =$

DL$_3$ en 0 de $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3 \varepsilon_1(X)$ où $\lim\limits_{X \to 0} \varepsilon_1(X) = 0$. $\qquad \ln(X^\alpha) = \alpha \ln X$

On pose $X = -x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et on obtient :

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + x^6 \cdot \varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

DL$_6$ en 0 de :

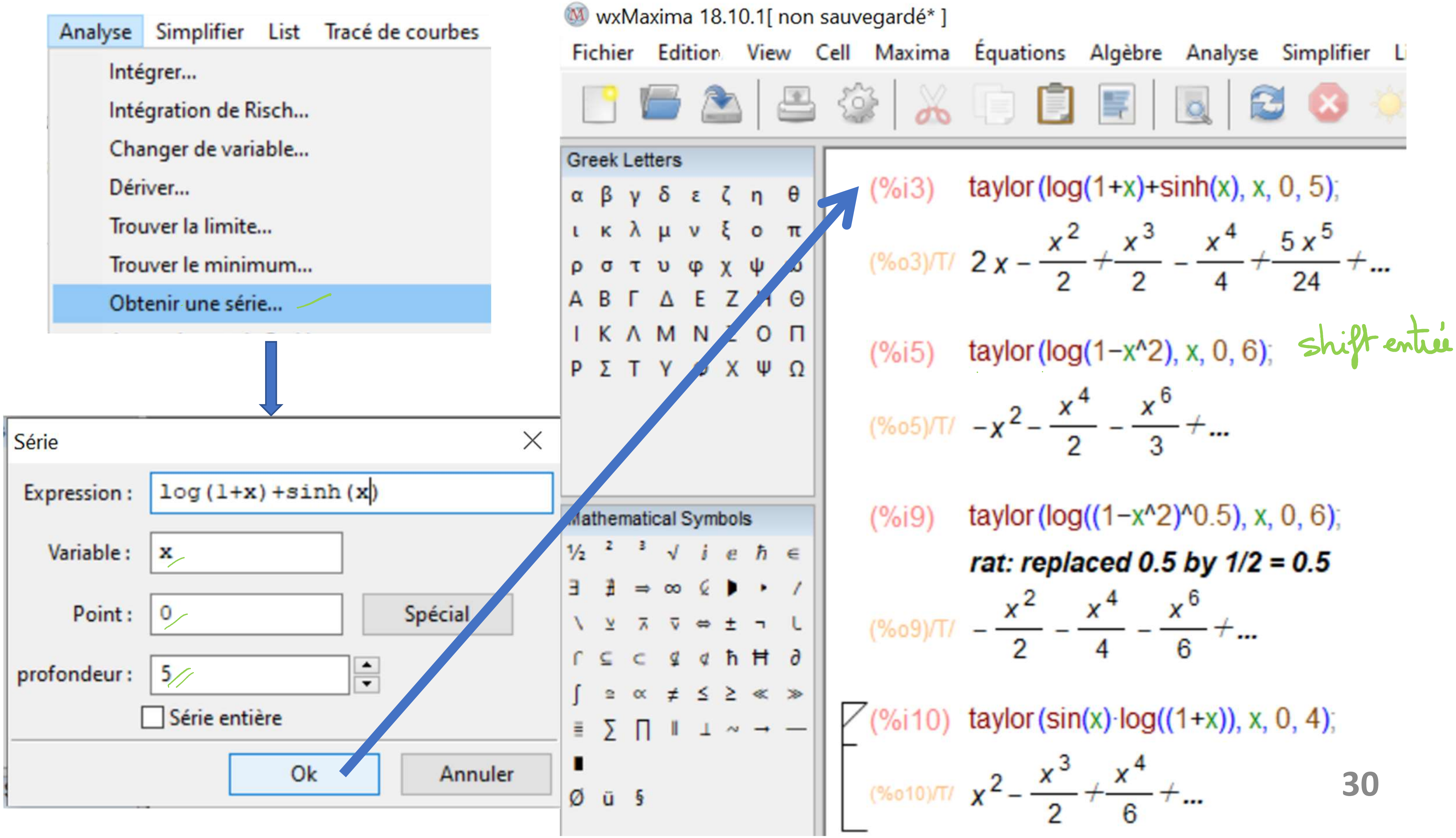
c) $\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2} \ln(1-x^2) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + x^6 \cdot \varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

DL$_4$ en 0 de :

d) $\sin x \cdot \ln(1+x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \cdot \varepsilon_2(x)\right)$ où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_i(x) = 0$, $i \in \{1,2\}$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + x^4 \cdot \varepsilon(x)$$

$$\sin x \cdot \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + x^4 \varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$


Analyse Simplifier List Tracé de courbes
Intégrer...
Intégration de Risch...
Changer de variable...
Dériver...
Trouver la limite...
Trouver le minimum...
Obtenir une série...
Série
Expression : log(1+x)+sinh(x)
Variable : x
Point : 0
Spécial
profondeur : 5
Série entière
Ok
Annuler
wxMaxima 18.10.1[non sauvegardé*]
Fichier Edition View Cell Maxima Équations Algèbre Analyse Simplifier
Greek Letters
Mathematical Symbols
(%i3) taylor(log(1+x)+sinh(x), x, 0, 5);
(%o3)/T/ $2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{5x^5}{24}+...$
(%i5) taylor(log(1-x^2), x, 0, 6);
shift entrée
(%o5)/T/ $-x^2-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}+...$
(%i9) taylor(log((1-x^2)^0.5), x, 0, 6);
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
(%o9)/T/ $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+...$
(%i10) taylor(sin(x)·log((1+x)), x, 0, 4);
(%o10)/T/ $x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+...$

DL_4 en 0 de:

e). $\cos x . \sin(2x) =$

$\sin X = X - \frac{X^3}{6} + X^4 \varepsilon_1(X)$. On pose $X = 2x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on obtient alors:

$X = 2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ ✓

$\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + x^4 \varepsilon_2(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Alors: $\cos x . \sin(2x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon_3(x)\right) \times \left(2x - \frac{4x^3}{3} + x^4 \varepsilon_2(x)\right)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0$

$= 2x - \frac{4x^3}{3} - x^3 + x^4 \varepsilon(x)$

$\cos x . \sin(2x) = 2x - \frac{7x^3}{3} + x^4 . \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

DL_6 en 0 de:

f) $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + x^7 . \varepsilon(x)\right)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + x^6 . \varepsilon(x)$.

Page 72 du chapitre 3

Exercice 2 :

Rechercher le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

a) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ b) $\operatorname{Arctan}(\sin x)$ c) $e^{\cos x}$ d) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ e) $\tan x$

Exercice 3 : Application au calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x - x}{\tan x - \operatorname{Arcsin} x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right]$

Ex. 2 a) DL_3 en 0 de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

DL_3 en 0

$$\left\{\begin{array}{l}\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon_1(u)\\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 . \varepsilon_2(x)\end{array}\right. \quad \varepsilon_i(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \ i\in\{1,2\}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + x^3 . \varepsilon_2(x)}$$

$$\left\{\begin{array}{l}1\times u = -\frac{x^2}{6} + \dots\\ \cancel{\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}\times\frac{x^4}{36} + \dots}\\ \cancel{\frac{1}{3}u^3 = \dots}\end{array}\right.$$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + x^3 . \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

b) DL_3 en 0 de $\text{Arctan}(\sin x)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x + x^3\varepsilon_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x - \arctan 0 .$$

DL_3 en 0 de

$$\text{Arctan}(u) = u - \frac{u^3}{3} + u^3 . \varepsilon_3(u), \quad u \to 0$$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_4(x)}_{u}, \quad x \to 0, \ \sin x \to 0$$

$$\left\{\begin{array}{l}1\times u = x - \frac{x^3}{6} + \dots\\ 0\times u^2 = x^2 + \dots\\ -1/3\times u^3 = x^3 + \dots\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Arctan}(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\text{Arctan}(\sin x) = x - \frac{x^3}{2} + x^3 . \varepsilon(x)$$

DL$_3$ en 0 de :

c) DL$_3$ en 0 de $e^{\cos x}$: $\Longrightarrow$ $\begin{cases} e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 . \varepsilon_1(u) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 . \varepsilon_2(x) \end{cases}$

$$e^{\cos x} = e^{\overbrace{1 - \frac{x^2}{2} + x^3 . \varepsilon_2(x)}^{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}} = e^1 \times e^{\underbrace{-\frac{x^2}{2} + x^3 . \varepsilon_2(x)}_{u}}$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$u = -\frac{x^2}{2} + \dots$

$u^2 = \dots$

$u^3 = \dots$

$\Longrightarrow e^{\cos x} = e . \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3 . \varepsilon(x)\right)$

où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

$$X^\alpha = e^{\alpha \ln X} \; ; X > 0$$

d) DL$_3$ en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x} . \ln(1+x)} = e\left(e^{-x/2 + x^2/3 - x^3/4 + \cdots}\right)$$

DL$_4$ en 0 de $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x)$

$$\frac{1}{x} . \ln(1+x) = 1 \underbrace{- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3 . \varepsilon_1(x)}_{u \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

$1 \times u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots$

$\frac{1}{2} \times u^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + \cdots = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \cdots$

$\frac{1}{6} \times u^3 = -\frac{x^3}{8} + \cdots$

Donc $e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} = e\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right)\right]+x^3\varepsilon(x)$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{48}\right)x^3+x^3\varepsilon(x)\right)$$

$(1+x)^{1/x} = e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}-\frac{7x^3}{16}+x^3\varepsilon(x)\right)$ est le DL_3 en 0 de $(1+x)^{1/x}$.

e) DL_3 en 0 de $\tan x$:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overbrace{x-\frac{x^3}{6}}^{u}+x^3\varepsilon_1(x)}{\underbrace{1-\frac{x^2}{2}}_{v}+x^3\varepsilon_2(x)}$$

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^3}{6} & 1-\frac{x^2}{2} \\
\hline
-\left(x-\frac{x^3}{2}\right) & x+\frac{x^3}{3}+\cdots \\
\hline
\frac{x^3}{3} & \\
-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}\right) & \\
\hline
\frac{x^5}{6}\cdots &
\end{array}$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes de u et par v et on obtient : $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$

où $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$

(%i20) taylor(cos(x)·sin(2·x), x, 0, 4);

(%o20)/T/ $$2x - \frac{7x^3}{3} + \ldots$$

(%i12) taylor(sin(x)/x, x, 0, 6);

(%o12)/T/ $$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \ldots$$

(%i13) taylor(log(sin(x)/x), x, 0, 3);

(%o13)/T/ $$-\frac{x^2}{6} + \ldots$$

(%i14) taylor(atan(sin(x)), x, 0, 4);

(%o14)/T/ $$x - \frac{x^3}{2} + \ldots$$

(%i16) taylor(exp(cos(x)), x, 0, 3);

(%o16)/T/ $$\%e - \frac{\%e\, x^2}{2} + \ldots$$

(%i18) taylor((1+x)^(1/x), x, 0, 3);

(%o18)/T/ $$\%e - \frac{\%e\, x}{2} + \frac{11\, \%e\, x^2}{24} - \frac{7\, \%e\, x^3}{16} + \ldots$$

(%i19) taylor(tan(x), x, 0, 3);

(%o19)/T/ $$x + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Page 72 du chapitre 3

<u>Exercice 3</u> : Application au calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arc}\tan x - x}{\tan x - \operatorname{Arc}\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{+\text{ bas degré de } P}{+\text{ bas degré de } Q}.$$

Ex 3 a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 . \sin x}{x - \sin x} = \text{“} \frac{0}{0} \text{”}$ F.I

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

$x^2 . \sin x = x^3 - \cancel{\frac{x^5}{6}} + \dots$

$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \dots$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2 . \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3/6} = 6.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}\, x - x}{\tan x - \text{Arcsin}\, x} = \text{“} \frac{0}{0} \text{”}$ F.I

$\text{Arctan}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$

$\text{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{6} x^3 + \dots$

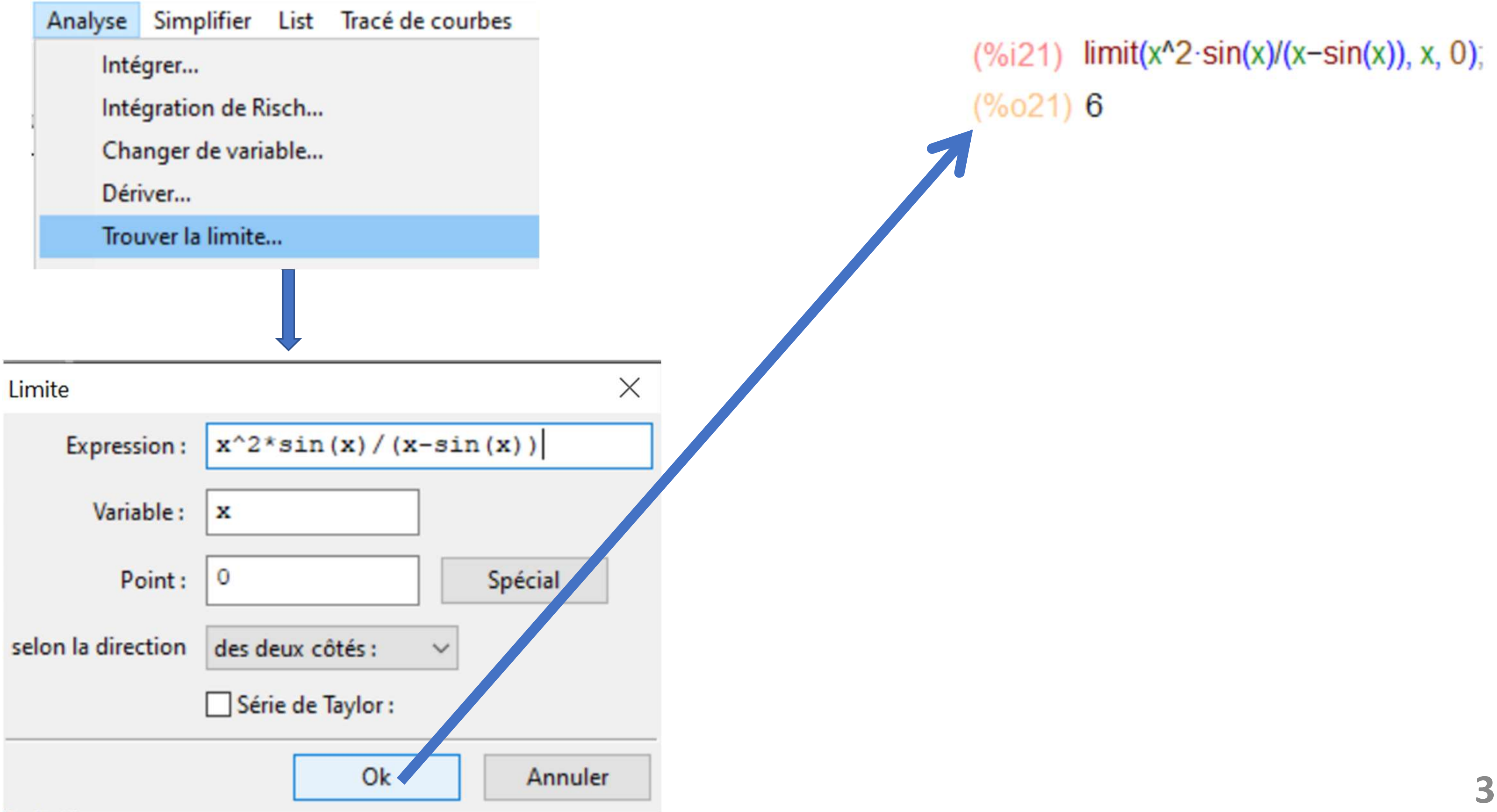
$\Rightarrow \begin{cases} \text{Arctan}\, x - x = -\frac{x^3}{3} + \dots \\ \tan x - \text{Arcsin}\, x = \frac{1}{6} x^3 + \dots \end{cases}$

car $(\text{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots$ donc $\text{Arcsin}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{6} x^3 + \dots$

$X = x^2$

$(1+X)^\alpha = 1 - \frac{1}{2} X + \dots$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}\, x - x}{\tan x - \text{Arcsin}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3/3}{x^3/6} = -2$


Analyse
Simplifier
List
Tracé de courbes
Intégrer...
Intégration de Risch...
Changer de variable...
Dériver...
Trouver la limite...
Limite
Expression :
x^2*sin(x)/(x-sin(x))
Variable :
x
Point :
0
Spécial
selon la direction
des deux côtés :
Série de Taylor :
Ok
Annuler
(%i21) limit(x^2·sin(x)/(x−sin(x)), x, 0);
(%o21) 6

WolframAlpha computational intelligence.

LIMIT

Extended Keyboard | Upload | Examples | Random

Assuming "LIMIT" refers to a computation | Use as a general topic or referring to a mathematical definition or a word or referring to a course app instead

Computational Inputs:

» function to find limit of: (arctan(x)-x)/(tan(x)-arcsin(x))

» value to approach: 0

Also include: specify variable | specify direction | include second limit

Compute

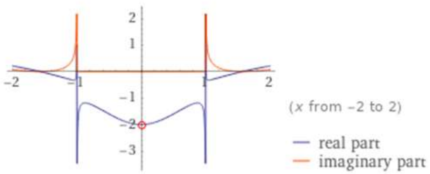
Limit: Step-by-step solution

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}(x) - x}{\tan(x) - \sin^{-1}(x)} = -2$$

$\tan^{-1}(x)$ is the inverse tangent function

$\sin^{-1}(x)$ is the inverse sine function

Plot:



Series expansion at x = 0: More terms

$$-2 + \frac{19\,x^2}{10} - \frac{5923\,x^4}{4200} + O(x^6)$$

(Taylor series)

Download Page | POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ $(b\neq 0)$ $\cos X = 1 - \dfrac{X^2}{2} + \dots$

$\cos(ax) = 1 - \overbrace{\dfrac{a^2x^2}{2}}^{u \xrightarrow[x\to 0]{} 0} + \dots$

$\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dots$

$\Rightarrow \ln(\cos(ax)) = -\dfrac{a^2x^2}{2} + \dots$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-a^2x^2/2}{-b^2x^2/2} = \dfrac{a^2}{b^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x.\ln x}{x^2-1} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ (F.I)

$X^2 + X - \dfrac{X^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x.\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{(X+1).\ln(X+1)}{(X+1)^2-1} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{(X+1)(X-\frac{X^2}{2}+\dots)}{X^2+2X} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\frac{X^2}{2}+X}{X^2+2X} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{X}{2X} = \dfrac{1}{2}$

$x = X+1 \Leftrightarrow X = x-1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

WolframAlpha computational intelligence.

limit ln(cos(a*x))/ln(cos(b*x)), x->0

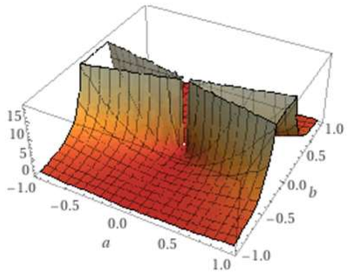
Extended Keyboard   Upload   Examples   Random

Limit: Step-by-step solution

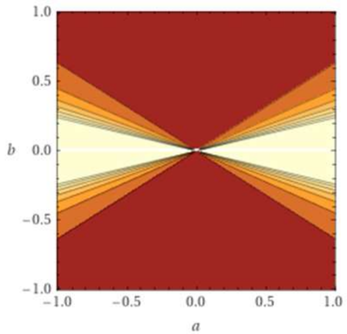
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(a\,x))}{\log(\cos(b\,x))} = \frac{a^2}{b^2}$$

$\log(x)$ is the natural logarithm

3D plot: Show contour lines



Contour plot:



Series expansion at x = 0:   More terms

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{6} a^2 x^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) + \frac{1}{180} a^2 x^4 \left(\frac{8\,a^4}{b^2} - 5\,a^2 - 3\,b^2\right) + O(x^6)$$

(Taylor series)

WolframAlpha computational intelligence.

limit x*ln(x)/(x^2-1), x->1

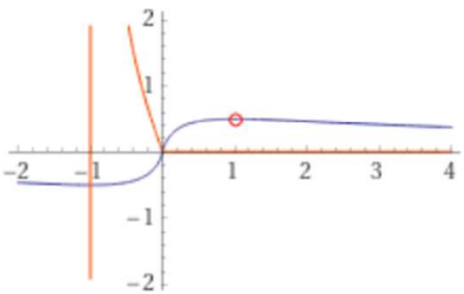
Extended Keyboard   Upload   Examples   Random

Limit: Decimal form   Step-by-step solution

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\log(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

$\log(x)$ is the natural logarithm

Plot:



(x from -2 to 4)

— real part
— imaginary part

Series expansion at x = 1:   More terms

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{12}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{15}(x-1)^4 + \frac{1}{20}(x-1)^5 + O\left((x-1)^6\right)$$

(Taylor series)

e) $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ FI

$$L = \lim_{x \to \pi/4} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x} = \lim_{X \to 0} \frac{\ln\left(\tan\left(X + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$X = x - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{4}]{} 0$

$\to \sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) = \sin X \cos\frac{\pi}{4} + \cos X \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin X + \cos X)$

$\to \cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right) = \cos X \cos\frac{\pi}{4} - \sin X \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos X - \sin X)$

$\Rightarrow \sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(X + \pi/4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 \sin X) = \sqrt{2} \cdot \sin X$

$\to \tan\left(X + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \tan X}{1 - \tan X} \Rightarrow \ln\left(\tan\left(X + \pi/4\right)\right) = \underbrace{\ln(1 + \tan X)}_{X + \dots} - \underbrace{\ln(1 - \tan X)}_{(-X) + \dots}$

$\to \ln(1 + u) = u + \dots$ $\qquad \underset{X \to 0}{\tan X} = \underbrace{X}_{u} + \dots$ $\qquad \sin X = X + \dots$

$L = \lim_{X \to 0} \dfrac{2X}{\sqrt{2}X} = \sqrt{2}.$

$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1.$

WolframAlpha computational intelligence.

limit ln(tan(x))/(sin(x)-cos(x)), x->pi/4

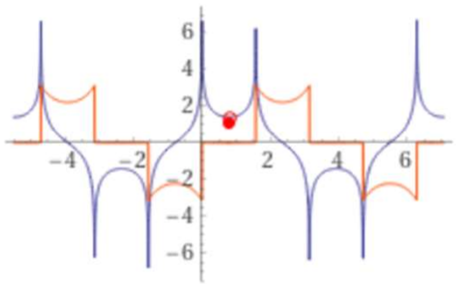
Extended Keyboard Upload Examples Random

Limit: Approximate form Step-by-step solution

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\log(\tan(x))}{\sin(x) - \cos(x)} = \sqrt{2}$$

$\log(x)$ is the natural logarithm

Plot:



(x from −5.5 to 7.1)

real part

imaginary part

Series expansion at x = π/4: More terms

$$\sqrt{2} + \frac{5\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{3\sqrt{2}} + \frac{287\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{180\sqrt{2}} + O\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6\right)$$

(Taylor series)

$$f)\quad \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right] = \text{"}+\infty-\infty\text{"} \quad \text{FI}$$

$$\forall x>0 \quad \sqrt{(x+a)(x+b)}-x = x\left(\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}}{\underset{x>0}{x}}-1\right) \qquad x=\sqrt{x^2}$$

$$= x\left(\sqrt{\frac{(x+a)(x+b)}{x^2}}-1\right)$$

$$= x\left(\sqrt{\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2}}-1\right)$$

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}-x = x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{a+b}{x}+\cancel{\frac{ab}{x^2}}}_{\substack{u\to0\\ x\to+\infty}}}-1\right) = \cancel{x}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{\cancel{x}}+\dots-\cancel{1}\right)$$

DL_1 en 0

$$\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u+\dots$$

$$u=\frac{a+b}{x}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x = \frac{a+b}{2}$$

WolframAlpha computational intelligence.

limit sqrt((x+a)*(x+b))-x, x->infini

Extended Keyboard Upload Examples Random

Assuming limit refers to a continuous limit | Use the discrete instead

Input:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$$

Result:

(no result found in terms of standard mathematical functions)

Limit: Step-by-step solution

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\frac{a+b}{2}$$