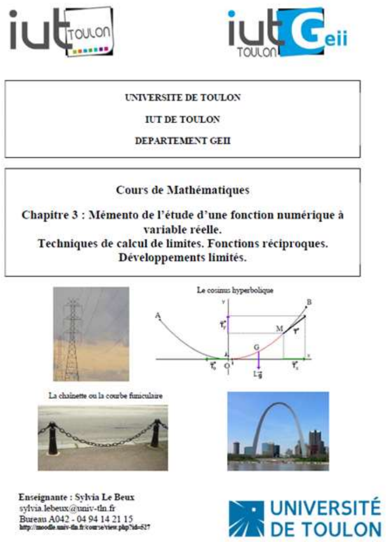
Poursuites d’études 8 : Les développements limités – Partie 4/4

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :



UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Mémento de l’étude d’une fonction numérique à variable réelle.
Techniques de calcul de limites. Fonctions réciproques.
Développements limités.

Le cosinus hyperbolique

La chainette ou la courbe funiculaire

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=517

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> : Applications

  - Position relative d’une courbe et de ses tangentes,
  - Développement asymptotique en l’infini.

Page 70 du chapitre 3

III. Applications :

1) Position relative d'une courbe et de sa tangente en 0 :

f est dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0)$ si et seulement si :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

C'est, par définition, le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)\, x + f(0)$$

On reconnaît la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par le signe de

$$d(x) = f(x) - [f'(0)\, x + f(0)]$$

- Si $d(x) > 0$ la courbe est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
- Si $d(x) < 0$ la courbe est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 4 : Application à l'étude d'une fonction

Page 72 du chapitre 3

1) Rechercher le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction : $f(x) = \dfrac{x}{1-e^x}$, en déduire l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0. Quelle est la position de T par rapport à C_f ?

2) Etudier la position relative de la courbe C d'équation $y = f(x) = x - 3 - 2.\ln(x+1)$ et de sa tangente au point A(0 ;-3)

1) DL_2 en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{1-e^x} = \dfrac{x}{1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)\right)}$

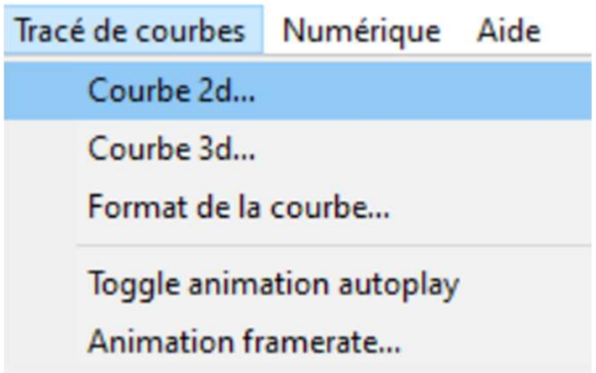
$$\begin{array}{l|l} x & -x-\frac{x^2}{2} \\ \hline -\left(x+\frac{x^2}{2}\right) & -1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\dots \\ \hline -\frac{x^2}{2} & \\ -\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}\right) & \\ \hline \frac{x^3}{4} & \end{array}$$

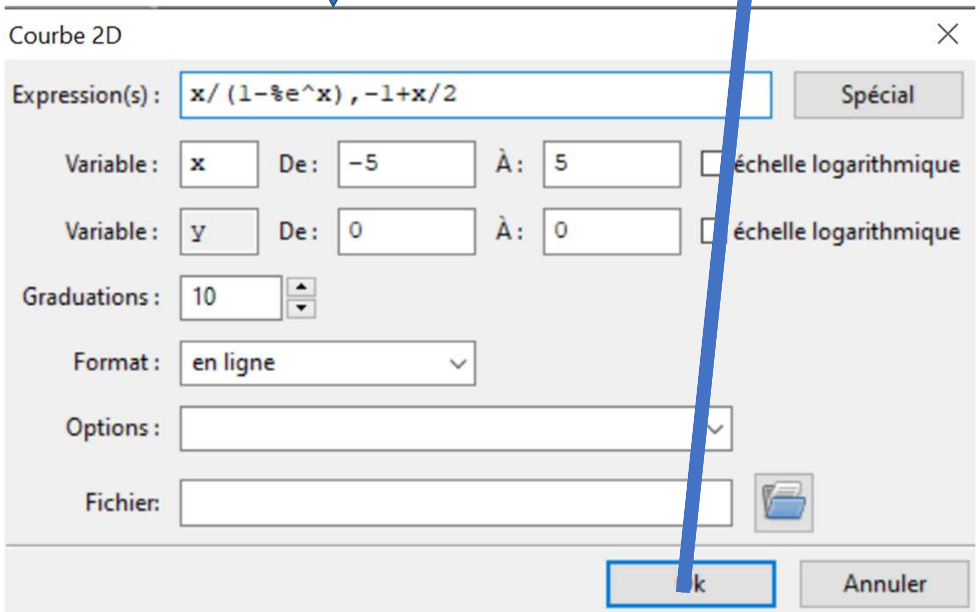
$f(x) = \underbrace{-1+\frac{x}{2}}_{\text{équation de } T} - \frac{x^2}{4} + x^2.\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

position de C_f par rapport à T : $f(x) - \left(-1+\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{4} + \underline{x^2.\varepsilon(x)}$

quand x est proche de 0 : $f(x) - \left(-1+\frac{x}{2}\right) < 0$

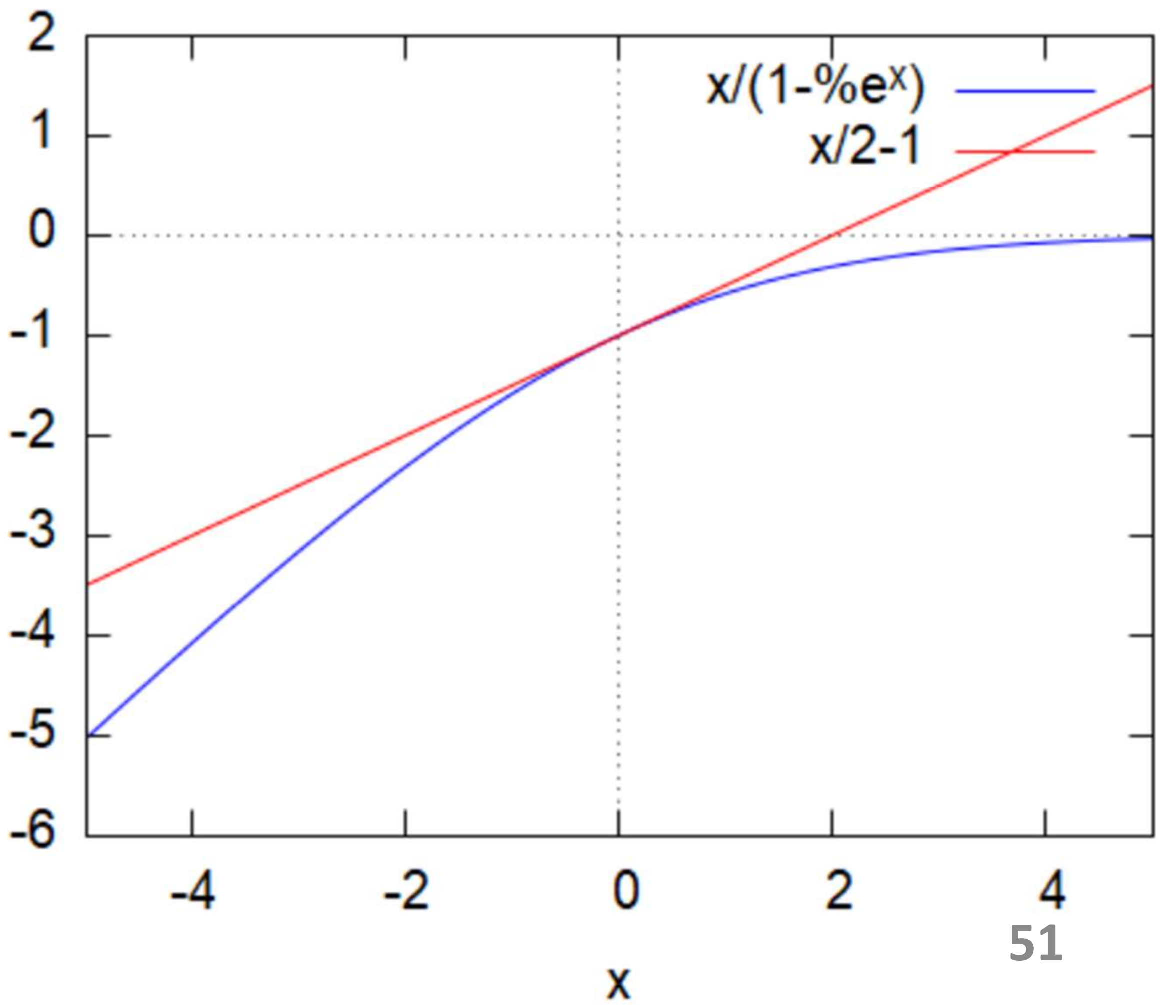
C_f est en-dessous de T en 0.





(%i2) wxplot2d([x/(1-%e^x),-1+x/2], [x,-5,5])$

plot2d: expression evaluates to non-numeric value so
mewhere in plotting range.



2) Etudier la position relative de la courbe C d'équation y = f(x) = x – 3 – 2.ln(x+1) et de sa tangente au point A(0 ;-3)

DL_2 en 0 de $f(x) = x - 3 - 2\left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)\right)$

$f(x) = \underbrace{-3 - x}_{\text{équation de } T \text{ à } \mathcal{C}_f \text{ en } A(0,-3)} + x^2 + x^2 \cdot \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

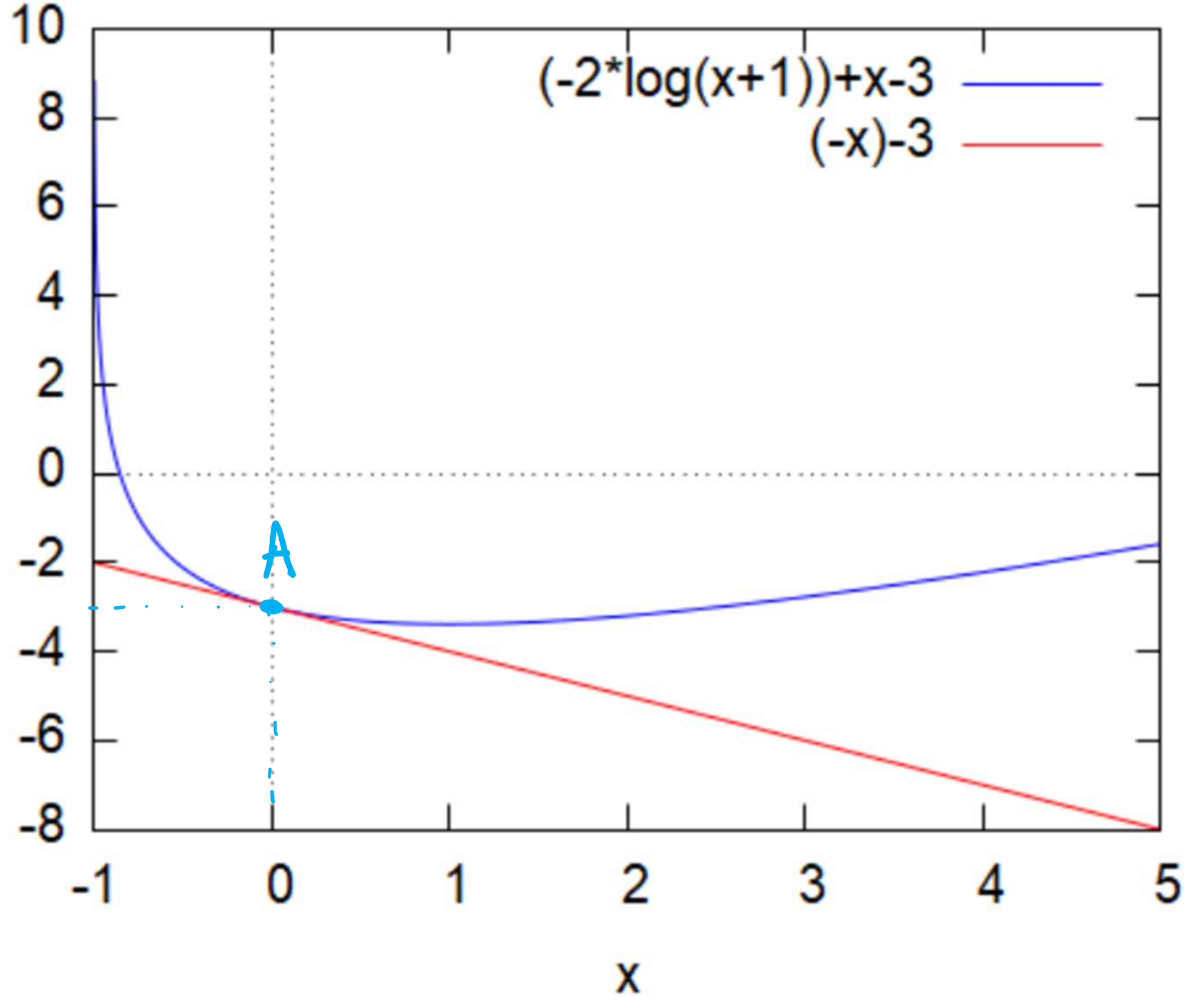
$f(0) = 0 - 3 - 2\ln 1 = -3.$ ok

Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T au voisinage de 0 :

$f(x) - (-3 - x) = x^2 + x^2\varepsilon(x).$

$f(x) - (-3 - x) > 0$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T au voisinage de 0 wxplot2d([x−3−2·log(x+1),−x−3], [x,−1,5])$



Page 70 du chapitre 3

2) Développement asymptotique en l'infini

Considérons une fonction f définie au voisinage de $+\infty$, admettant un DL d'ordre n au voisinage de 0.
On pose alors t=1/x et on utilise le DL d'ordre n de f au voisinage de 0 :

$\xrightarrow{x \to +\infty} 0$

$$f(x) = \underline{ax + b} + \underbrace{\frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p}}\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) = 0$$

Alors :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$
   Donc la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ vers $+\infty$
2. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$ est donnée par le signe de

$$d(x) = f(x) - (ax + b)$$

Si $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ et si $d(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ.

Au voisinage de $+\infty$, $d(x) = \frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p}\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) = \frac{c}{x^p}\left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)\right]$ a même signe que $\frac{c}{x^p}$
On procède de façon analogue au voisinage de $-\infty$.

3) Etudier au voisinage de l'infini $f(x) = x + 2\sqrt{x^2 - x}$

Page 72 du chapitre 3

4) Rechercher le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 2 de $\dfrac{f(x)}{|x|}$ où

$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. En déduire les équations des asymptotes à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.
Quelle est la position des asymptotes par rapport à C_f ?

3) $f(x) = x + 2\sqrt{x^2 - x} = x\left(1 + 2\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}\right)$

$x > 0$ donc $x = \sqrt{x^2}$ et $f(x) = x\left(1 + 2\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2}}\right) = x\left(1 + 2\sqrt{1 - \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0}}\right)_{x\to+\infty}$

On pose $u = -\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

DL_2 en 0 de $\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + u^2 \cdot \varepsilon_1(u)$. $\varepsilon_1(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \alpha(\alpha-1)\dfrac{u^2}{2} + \dots$

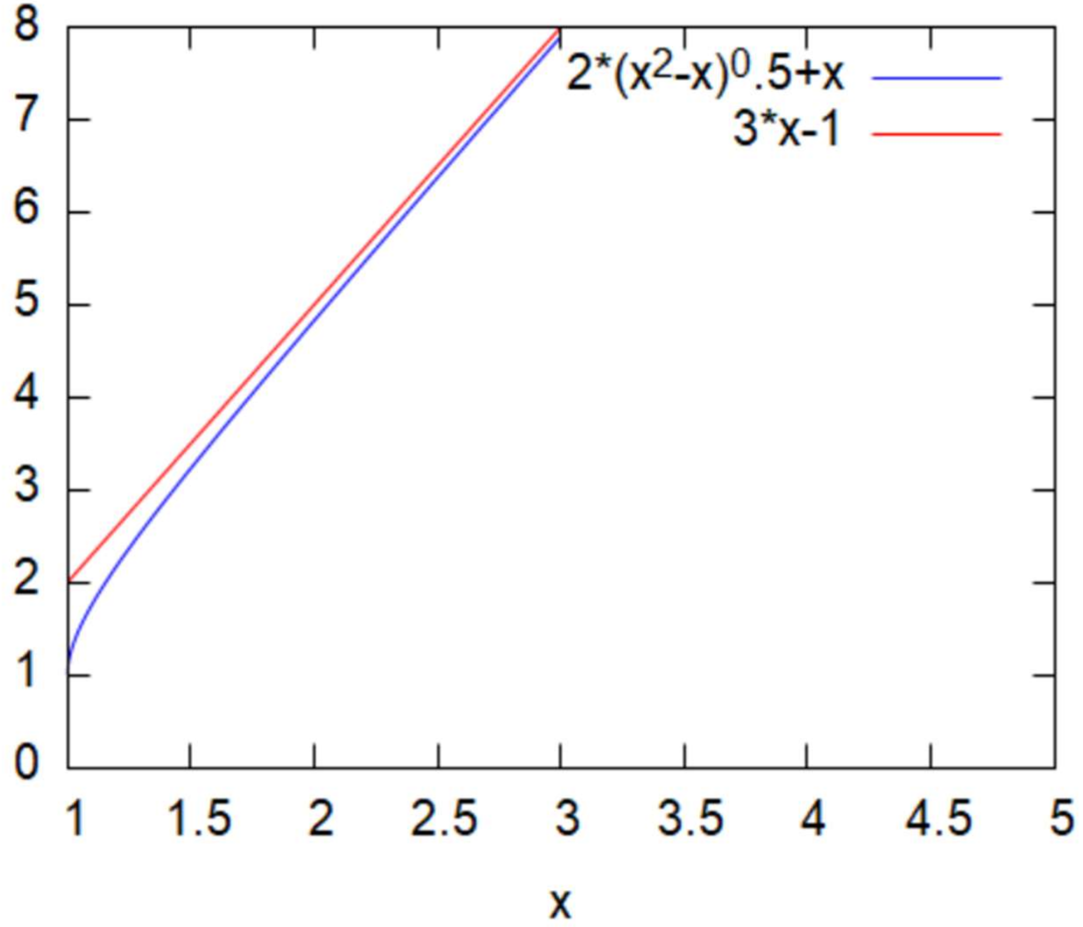
$x>0$ $f(x) = x\left(1 + 2\left(1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{8x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\cdot\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ où $\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$f(x) = \underbrace{3x - 1}_{\text{equat° de l'asymptote à } C_f \text{ en } +\infty} - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{x}\cdot\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

equat° de l'asymptote à C_f en $+\infty$: $f(x) - (3x-1) = -\dfrac{1}{4x} < 0$

C_f est en-dessous de l'asymptote en $+\infty$.

wxplot2d([x+2·(x^2−x)^0.5,3·x−1], [x,1,5],[y,0,8])$



4) Rechercher le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 2 de $\dfrac{f(x)}{|x|}$ où

$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. En déduire les équations des asymptotes à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.
Quelle est la position des asymptotes par rapport à C_f ?

En $+\infty$. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\underbrace{\sqrt{x^2}}_{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$; $\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

$x>0$

On pose $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ $\qquad \sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+u^2\varepsilon(u)$.

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}-\left(\frac{1}{8x^2}\right)+\frac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right)$$ où $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

$$f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)$$

éq de l'asymptote à C_f en $+\infty$.

Position : $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)>0$

C_f est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$

En $-\infty$ $\sqrt{x^2}=-x$ $\quad x<0$

$$f(x)=-x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x)=-x-\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2(x)$$

éq de l'asymptote en $-\infty$. $\quad \varepsilon_2(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

$f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)>0$ C_f est au-dessus en $-\infty$

```
wxplot2d([(x^2+x+1)^0.5,x+0.5,-x-0.5], [x,-5,5],[y,0,5])$
```