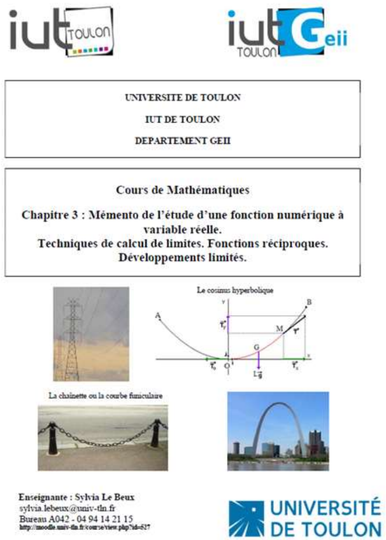
Poursuites d'études 8 : Résolution des exercices du concours d'entrée à Centrale Supélec - 2019

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :


UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Mémento de l'étude d'une fonction numérique à variable réelle.
Techniques de calcul de limites. Fonctions réciproques.
Développements limités.

Le cosinus hyperbolique

La chainette ou la courbe funiculaire

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

UNIVERSITÉ DE TOULON

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> : Calcul de limites avec développements limités.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

Q. 4.1

$$\lim_{x\to 1}(3^x+4^x-6^x)^{\tan(\pi x/2)} = \text{"} 1^{\pm\infty} \text{"} \quad \text{F.I}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(3^x+4^x-6^x\right)^{\tan(\pi x/2)} = \lim_{x\to 0}\left(3^{x+1}+4^{x+1}-6^{x+1}\right)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)} = \lim_{x\to 0} e^{f(x)\cdot\ln(g(x))}$$

DL1 en 0 de :

$$3^{x+1} = 3.3^x = 3.e^{x\ln 3} = 3(1+x\ln 3+\cdots)$$

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{1+\varepsilon_1(x)}{-\frac{\pi}{2}x+\varepsilon_2(x)} \quad \text{où } \varepsilon_i(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \forall i\in\{1,2\}$$

DL1 en 0 de :

$$g(x) = 3(1+x\ln 3)+4(1+x\ln 4)-6(1+x\ln 6)+x\varepsilon_3(x) \quad \text{où } \varepsilon_3(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$g(x) = 1+x(\underbrace{3\ln 3+4\ln 4-6\ln 6}_{=\ln\left(\frac{3^3.4^4}{6^6}\right)=\ln\left(\frac{3^3 2^8}{3^6 2^6}\right)})+x\varepsilon_3(x) = 1+x.\ln\left(\frac{4}{27}\right)+x\varepsilon_3(x)$$

$$g(x) = 1 + x\ln\left(\frac{4}{27}\right) + x\,\varepsilon_3(x) \quad \text{où } \varepsilon_3(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\ln(g(x)) = x.\ln\left(\frac{4}{27}\right) + x.\,\varepsilon_4(x) \quad \text{où } \varepsilon_4(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$f(x).\ln(g(x)) = \frac{1+\varepsilon_1(x)}{-\frac{\pi}{2}x + \varepsilon_2(x)} \cdot \left(x\ln\left(\frac{4}{27}\right) + x\,\varepsilon_3(x)\right)$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x).\ln(g(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln\left(\frac{4}{27}\right)}{-\frac{\pi}{2}x} = -\frac{2}{\pi}.\ln\left(\frac{4}{27}\right) = \ln\left(\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{2}{\pi}}\right)$

et $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{f(x).\ln(g(x))} = e^{\ln\left(\left(\frac{729}{16}\right)^{1/\pi}\right)} = \sqrt[\pi]{\frac{729}{16}}.$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(3^x + 4^x - 6^x\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \sqrt[\pi]{\frac{729}{16}}$

Computational Inputs:

» function to find limit of: (3^x+4^x-6^x)^tan(pi*x/2)

» value to approach: 1

Also include: specify variable | specify direction | include second limit

Compute

Input:

$$\lim_{x\to 1} (3^x + 4^x - 6^x)^{\tan(\pi \times x/2)}$$

Result: More digits

$$\sqrt[\pi]{\frac{729}{16}} \approx 3.37249$$

Limit: Approximate form | Step-by-step solution

$$\lim_{x\to 1} (3^x + 4^x - 6^x)^{\tan((\pi x)/2)} = \sqrt[\pi]{\frac{729}{16}}$$

Q. 4.2

$$\lim_{x\to\pi/4,\ x<\pi/4} (\tan(x))^{\tan(2x)} = \text{"}1^{\infty}\text{"} \quad \text{FI}$$

$$\lim_{\substack{x\to\pi/4 \\ x<\pi/4}} (\tan x)^{\tan(2x)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to 0^-} e^{f(x)\cdot\ln(g(x))}$$

DL₁en0:

$$g(x) = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \pi/4}{1-\tan x \tan \pi/4} = \frac{\tan x + 1}{1-\tan x} = \frac{x+1+\varepsilon_1(x)}{1-x+\varepsilon_2(x)}$$

$$\ln(g(x)) = \ln(1+x+\varepsilon_1(x)) - \ln(1-x+\varepsilon_2(x))$$

$$= x-(-x)+\varepsilon_3(x) \qquad \text{où } \varepsilon_i(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\ln(g(x)) = 2x+\varepsilon_3(x) \qquad \forall i \in [\![1,5]\!]$$

$$f(x) = \tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(2x)}{-\sin(2x)} = \frac{1+\varepsilon_4(x)}{-2x+\varepsilon_5(x)}$$

$$f(x).\ln(g(x)) = \frac{1+\varepsilon_4(x)}{-2x+\varepsilon_5(x)}.(2x+\varepsilon_3(x))$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x).\ln(g(x)) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{-2x} = -1$

et $\lim\limits_{x\to 0} e^{f(x).\ln(g(x))} = e^{-1}$.

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} (\tan x)^{\tan(2x)} = e^{-1}$.

Computational Inputs:

» function to find limit of: tan(x)^tan(2*x)

» value to approach: pi/4

Also include: specify variable | specify direction | include second limit

Compute

Limit: Approximate form | Step-by-step solution

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan^{\tan(2x)}(x) = \frac{1}{e}$$