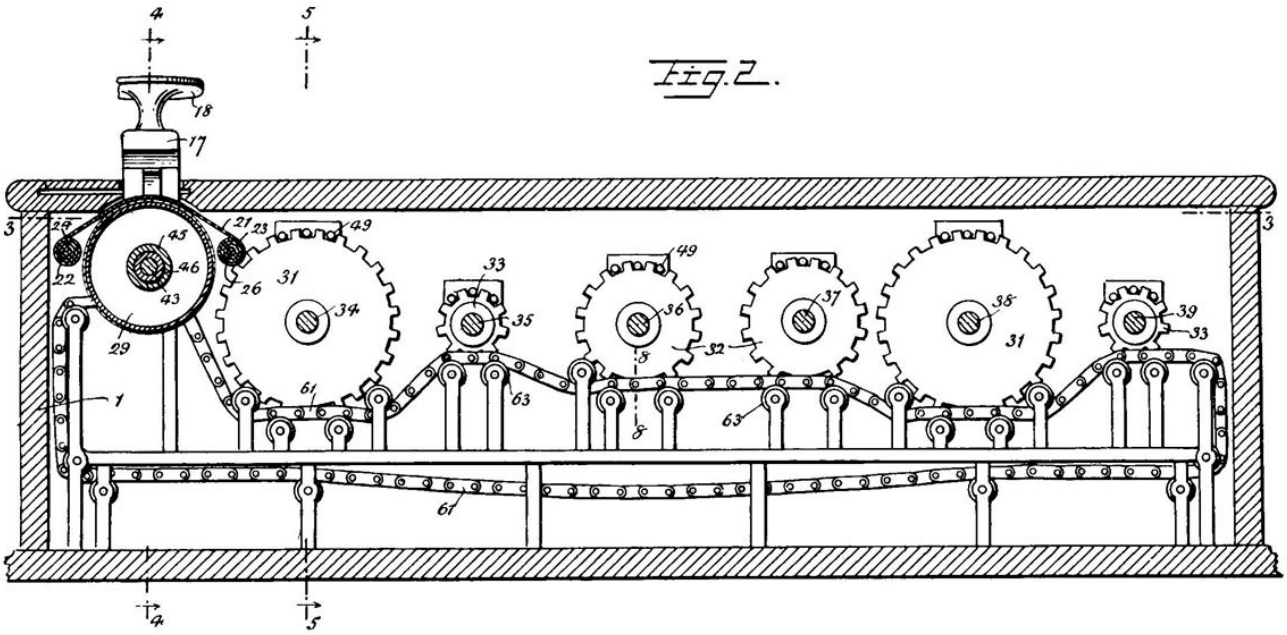
ISEN | école d'ingénieurs

ALL IS DIGITAL! TOULON

Cours de Mathématiques

Chapitre 1 : Algèbre linéaire



The mechanism of the cipher machine, U.S. Patent 1,845,947, that was invented by Lester Hill and Louis Weisner, for polygraphic substitution

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Table des matières

Partie A : Calcul matriciel (quelques rappels de cours et exercices)

I. Déterminant d'une matrice carrée

1) Matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. On appelle déterminant de la matrice A et on note det(A) ou $|A|$ le scalaire défini par : det(A)= $|A|$=ad-bc.

2) Matrice carrée d'ordre n>2

On appelle mineur d'indice (i,j) d'une matrice $A \in M_n(K)$ et on note Δ_{ij}, le déterminant de la matrice d'ordre n-1 obtenue en barrant la i^ème ligne et la j^ème colonne de A.
On appelle cofacteur d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ une matrice carrée d'ordre n, on calcule le déterminant de A de plusieurs façons différentes :

- **En développant par rapport à la $i^{ème}$ ligne : $\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}a_{ij}$**
- **En développant par rapport à la $j^{ème}$ colonne : $\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}a_{ij}$**

Remarques

- ✓ En pratique, on choisira de développer le déterminant d'une matrice par rapport à la ligne ou la colonne comportant le plus de zéros.
- ✓ Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients de sa diagonale.

2) Propriétés

Soit A, B deux matrices carrées de même ordre.
det(AB)=detA.detB ; det (^tA)=detA.

3) Théorème

Théorème Si une matrice carrée a deux lignes égales, son déterminant est nul.

II. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible

1) Définitions - théorème

- **On appelle matrice transposée d'une matrice carrée d'ordre n $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice carrée d'ordre n notée ${}^tA$ définie par : ${}^tA = (a_{ji})_{1\le j,i\le n}$.**
- **On appelle mineur d'indice (i,j) d'une matrice $A \in M_n(K)$ et on note Δ_{ij}, le déterminant de la matrice d'ordre n-1 obtenue en barrant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.**
- **On appelle cofacteur d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$**
- **On appelle comatrice d'une matrice $A \in M_n(K)$ et on note CoA, la matrice transposée de la matrice des cofacteurs : $CoA = {}^t\left[\left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}\right]$**

Définition Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n, à coefficients dans K telle que : $A.B=B.A=I_n$
La matrice B est alors unique, elle est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}.

Théorème A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, on a alors : $A^{-1} = \dfrac{CoA}{\det A}$

2) Propriété

Soit A, B deux matrices carrées de même ordre. $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

3) Application de base

Système d'équations linéaires et calcul matriciel

Soit le système $S_n \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

Soit les matrices ; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$.

On peut écrire : $B=AX$, et $X=A^{-1}B$.
On résoudra donc le système en écrivant sa matrice A, en déterminant l'inverse A^{-1}, puis en effectuant le produit $A^{-1}B$. Ceci suppose que A est inversible, c'est à dire que $\det A \neq 0$.
Le système S_n possède donc une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$, on dit que ce système est de Cramer.

<u>Remarque</u> : Lorsque la matrice inverse est compliquée ou trop longue à calculer, on peut appliquer la méthode des déterminants pour résoudre un système de Cramer (voir exercice 8)

III. <u>Méthode du pivot de Gauss pour faciliter le calcul de déterminant et de matrice inverse</u>

<u>Définitions</u> On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A, l'une des opérations suivantes :
a) l'échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j \quad i \neq j$
b) la multiplication d'une ligne par un scalaire α **:** $L_i \leftarrow \alpha.L_i$
c) la substitution d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne :
$$L_i \leftarrow L_i + \alpha.L_j$$
Ces opérations élémentaires peuvent aussi se faire sur les colonnes.

1) <u>Calcul du déterminant d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss</u> (Voir exercice 4)

<u>Théorème</u> Le déterminant d'une matrice ne change pas si l'on ajoute à l'une des lignes une combinaison linéaire des autres lignes.

L'objectif est de faire apparaître, à l'aide de l'opération c) le plus de 0 dans la matrice A, de façon à faciliter le calcul de son déterminant.
Dans l'exercice 4, on montre sur des matrices de dimension 3 que les opérations a) et b) précités dans la définition modifient la valeur du déterminant, contrairement à l'opération c).

2) <u>Calcul de la matrice inverse par la méthode du pivot de Gauss</u> (Voir exercice 6)

Exercices de la partie A du chapitre 1

Exercice 1

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ -13 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer, si cela est possible : A+B, A.B, B.A, A^2, B^2, $A.{}^tA$, ${}^tA.A$, $B.{}^tB$, ${}^tB.B$, AC, ${}^tC.B$

Exercice 2 Soit A et B, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'égalité : $(A-B).(A+B)=A^2-B^2$ est-elle vraie ?

Exercice 3 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Méthode du pivot de Gauss pour faciliter le calcul du déterminant d'une matrice carrée.

1) Soient les matrices : $Sr = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Ur = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où r est un nombre réel non nul. Calculer leur déterminant.

2) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, effectuer les produits suivants et donner le déterminant de la matrice obtenue en fonction de det(A) : $S_r.A$, $T_r.A$, $U_r.A$

3) Calculer le déterminant de la matrice B de l'exercice 3, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Cette méthode consiste à faire apparaître le plus de zéros dans la matrice A, à l'aide des opérations élémentaires décrites dans la question 2).

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculer, si c'est possible A^{-1}

1) A l'aide de la formule : $A^{-1} = \dfrac{CoA}{\det A}$.

2) Résoudre le système : $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x - 3y = 8 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Exercice 6 Méthode du pivot de Gauss pour faciliter le calcul de l'inverse d'une matrice carrée.

1) Soient les matrices : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ où k est un nombre réel non nul.

Montrer que ces matrices, ainsi que celles définies dans l'exercice 4 sont inversibles.

2) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, effectuer les produits suivants : $E_1.A$, $E_2.A$, $E_3.A$ $M_k.A$, $N_k.A$, $P_k.A$.

3) Calculer la matrice inverse de l'exercice 5 à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Cette méthode consiste à procéder par opérations élémentaires sur les lignes de la matrices A et simultanément sur les lignes de la matrice identité.

4) Résoudre le système $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x - 3y = 8 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Pour cela on procède par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A et simultanément sur les composantes du vecteur « second membre ».

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer, si c'est possible A^{-1}

1) A l'aide de la formule : $A^{-1} = \dfrac{CoA}{\det A}$.

2) Par la méthode du pivot de Gauss

Exercice 8 Systèmes de Cramer et déterminants.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit à résoudre le système linéaire : (S) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$.

1) Calculer det(A) ; Que peut-on dire du système (S) ?

2) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ où,

pour tout $i \in \{1,2,3\}$ la matrice A_i est la matrice obtenue en remplaçant la ième colonne de A par le vecteur colonne B.
Calculer les déterminants : $y_1 = \det(A_1)$, $y_2 = \det(A_2)$, $y_3 = \det(A_3)$.

3) On pose : $z_1 = \dfrac{y_1}{\det(A)}$, $z_2 = \dfrac{y_2}{\det(A)}$, $z_3 = \dfrac{y_3}{\det(A)}$. Montrer que (z_1, z_2, z_3) est solution du système (S) ;

4) Résoudre le système (S).

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$, en fonction du paramètre complexe m, le système de 3 équations à 3 inconnues x, y, z : $\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$

Exercice 10

1) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer B^n pour tout entier naturel n.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout entier naturel n.

3) Déterminer A^n pour tout entier relatif, si cela est possible.

Exercice 11 Application du calcul de matrices inverses à la cryptographie de Hill

Le but de ce problème est d'étudier, d'un point de vue mathématique, un algorithme de chiffrement dû à Lester Hill en 1929.

1) Description Supposons que nous avons un message à coder écrit avec les lettres A à Z (en majuscules). L'idée de Lester Hill est de grouper les lettres du message par bloc de m lettres, puis de les coder simultanément. Dans toute la suite, nous prenons m=2. D'abord, on remplace chaque lettre par un nombre compris entre 0 et 25 : A devient 0, B devient 1,..., Z devient 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On groupe les nombres ainsi obtenus 2 par 2 : x_1x_2, x_3x_4, ...,x_{2n-1},x_{2n}. Chaque groupe de deux nombres x_kx_{k+1} est codé en utilisant des combinaisons linéaires fixées au préalable :

$$\begin{cases} y_k = ax_k + bx_{k+1} \\ y_{k+1} = cx_k + dx_{k+1} \end{cases}$$

a, b, c, d sont des entiers. On retransforme alors les nombres obtenus en lettres par la même opération que précédemment (0 devient A, ...). Bien sûr, l'entier y_k n'est plus forcément compris entre 0 et 25, mais on le remplace alors par son reste module 26.

2) Mathématisation Au choix des combinaisons linéaires, on associe une matrice de chiffrement : A $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Puisque tous les calculs que nous effectuons sont modulo 26, on considère cette matrice d'entiers comme étant à coefficients dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. Le produit de deux matrices de $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ est défini comme usuellement. A tout vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ on associe $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est le bloc codé correspondant à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

> Rappel : les entiers modulo 26 sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$.
> $$\mathbb{Z}/26\mathbb{Z} = \{0; 1; 2; 3; \dots ; 25\}$$
> $26 \equiv 0 mod 26$ se lit "26 est congru à 0 modulo 26", il s'agit du reste de la division de 26 par 26.
> On note aussi : $\dot{26} = \dot{0}$ et se lit "la classe 26 modulo 26 est égale à la classe 0 modulo 26". On obtient donc aussi : $27 \equiv 1 mod 26$ ou $\dot{27} = \dot{1}$ etc... $57 \equiv 5 mod 26$...

3) Exemple On souhaite coder le mot ELECTION avec la clé (ou matrice) de chiffrement A $= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour cela,

- On remplace par des nombres, et on sépare en blocs de 2 : $\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$
- On calcule les vecteurs images : $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$
- On retranscrit les lettres : PAWITJDO

On peut remarquer un des intérêt du chiffrement de Hill sur l'exemple précédent : la lettre E est une fois codée avec P, l'autre fois avec W. C'est ce qu'on appelle un chiffrement poly alphabétique.

4) Questions

a) Coder MATHEMATIQUE avec la clé $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

b) Expliquer pourquoi les matrices de chiffrement $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ne peuvent convenir.

c) A $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ étant une matrice dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, on pose B $= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculer AB.

d) Montrer que A est inversible si, et seulement si, det A est inversible dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. Expliquer alors pourquoi le chiffrement de Hill est inversible.

e) Votre allié vous a envoyé le message suivant : UWGMWZRREIUB. Vous avez convenu avec lui d'utiliser le chiffrement de Hill, avec comme clé de chiffrement la matrice $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Quel message voulait-il vous transmettre ?

f) Attaque du chiffre de Hill : Vous avez intercepté le message suivant de vos ennemis : YKTZZUDCLWQOAGKIHXRVANYSPWBYDCLS. Votre espion vous a informé que pour communiquer, l'état-major adverse utilise le chiffrement de Hill. En outre, connaissant le côté protocolaire des messages militaires, vous êtes sûr que ce message commence par MONGENERAL. On note A la matrice de chiffrement.

- Justifier que $\begin{pmatrix} 24 & 19 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$=A$\begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$. (1)
- Que suffirait-il pour trouver A ? Pourquoi est-ce impossible ici ?
- Retrouver A en exploitant une autre égalité comme (1).
- Décrypter le message complet.

Remarque Pour chiffrer les messages, nous avons utilisé des paires de caractères. La sécurité serait meilleure en regroupant les caractères par trois ou même par quatre. Dans ces cas, les calculs se feraient avec des matrices 3*3, 4*4 respectivement, ce qui serait laborieux à faire à la main. Avec les ordinateurs actuels, en revanche, il est possible de travailler avec des matrices d'ordre très élevé et leurs inverses.
Le chiffre de Hill souffre d'une faiblesse importante : si le récepteur dispose d'un fragment même petit de texte en clair, il est possible de déchiffrer le message dans sa totalité.

Source "Le monde est mathématiques " - tome : Codage et cryptographie

Partie B : Des espaces vectoriels à la diagonalisation d'une matrice

I. Espace vectoriel sur K où K=$\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

1) Définition

On appelle espace vectoriel sur K (ou un K-espace vectoriel), tout ensemble E d'éléments nommés vecteurs, muni de deux opérations :

<u>L'addition</u>, loi de composition interne : $\begin{array}{c} E\times E \to E \\ (V,W)\mapsto V+W \end{array}$ **possédant les propriétés suivantes : pour tout U,V,W vecteurs de E :**

a) Commutativité : $U+V=V+U$
b) Associativité : $(U+V)+W=U+(V+W)$
c) 0 est l'élément neutre : $V+0=0+V=V$
d) Opposé : chaque vecteur V a un opposé noté (-V) tel que : $V+(-V)=0$.

<u>La multiplication par un scalaire</u>, loi de composition externe : $\begin{array}{c} E\times K \to E \\ (V,\alpha)\mapsto \alpha.V \end{array}$ **possédant les propriétés suivantes : pour tout V,W vecteurs de E et α,β scalaires de K :**

a) $\alpha.(V+W)=\alpha.V+\alpha.W$
b) $(\alpha+\beta).V=\alpha.V+\beta.V$
c) $\alpha.(\beta.V)=(\alpha.\beta).V$
d) $1.V=V$

Exemples

- ✓ $E=\{0\}$ est le plus petit des espaces vectoriels.
- ✓ n est un entier naturel non nul. E=$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel, muni des deux lois :

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

- ✓ E=$\mathbb{R}^n$ muni des deux lois précédentes ne peut être un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

- ✓ $E=\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel et aussi un $\mathbb{C}$ –espace vectoriel.
- ✓ E, l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- ✓ $E=\mathbb{C}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients complexe est un $\mathbb{C}$ –espace vectoriel.
- ✓ $E=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel.

2) Sous espaces vectoriels

Définition : Soit E, un K-espace vectoriel. On dit que F est un sous espace vectoriel de E, si et seulement si :
a) $F \subseteq E$
b) $F \neq \emptyset$
c) F est stable pour l'addition dans E : $\forall\ V,W \in F,\quad V+W \in F$
d) F est stable pour le produit par un scalaire de K : $\forall\ \alpha \in K,\ \forall\ V \in F,\ \alpha.V \in F$.

Définition condensée : Soit E, un K-espace vectoriel. On dit que F est un sous espace vectoriel de E, si et seulement si :
a) $F \subseteq E$
b) $F \neq \emptyset$
c) F est stable par combinaison linéaire à coefficients dans K :
$$\forall\ V,W \in F,\ \forall\ \alpha \in K,\quad V+\alpha.W \in F.$$

Remarque : Si F est un sous espace vectoriel de E, alors le vecteur nul appartient à F.
La contraposée est intéressante…

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Exemples

✓ Soit E=$\mathbb{R}^3$,

$$F = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0 \right\},\quad F' = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{vmatrix} x_1 = 2t - 1 \\ x_2 = 3t + 1 \text{ où t est réel.} \\ x_3 = t - 4 \end{vmatrix} \right\},$$

$$F'' = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{vmatrix} x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0 \\ 2.x_1 + 5.x_3 = 1 \end{vmatrix} \right\},\quad F''' = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{vmatrix} x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0 \\ 2.x_1 + 5.x_3 = 0 \end{vmatrix} \right\},$$

$$F^{(4)} = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{vmatrix} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t \text{ où t est réel.} \\ x_3 = t \end{vmatrix} \right\}.$$

Quels sont les sous espaces vectoriels de E ?

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ Soit E=$\mathbb{R}^n$,
$F = \{V / x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E.

✓ Soit E le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions. Parmi les sous ensembles de E suivants, lesquels sont des sous espaces vectoriels de E ?

$F = C^0(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$) …………………………………

$F = C^1(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continument dérivables sur $\mathbb{R}$) …………………

$F = \{f \in E / f(1) = 0\}$ ………………………………………………………………………

$F = \left\{ f \in E / \int_8^{10} f(x)dx = 0 \right\}$ ……………………………………………………………

- ✓ E est un K-espace vectoriel et $F = \{0\}$. F est un sous espace vectoriel de E.
- ✓ E est un K-espace vectoriel, si F et F' sont des sous espaces vectoriels de E, alors $F \cap F'$ est aussi un sous espace vectoriel de E.
- ✓ E est un K-espace vectoriel, si F et F' sont des sous espaces vectoriels de E, alors $F + F' = \{V + V', \text{avec } V \in F \text{ et } V' \in F'\}$ est aussi un sous espace vectoriel de E.

3) Base et dimension d'un espace vectoriel

Définitions : Soit E, un K-espace vectoriel. Soit $V_1, V_2, \ldots, V_p$ p vecteurs de E et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ p scalaires de K.

a) Tout vecteur de la forme $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_p V_p$, est appelé combinaison linéaire de $V_1, V_2, \ldots, V_p$.

b) On appelle système de vecteurs, ou famille de vecteurs de E , tout p-uplet de vecteurs de E. On pourra noter $S_p = (V_1, V_2, \ldots, V_p)$ un tel système.

c) Un système de vecteurs de E : $S_p = (V_1, V_2, \ldots, V_p)$ est dit lié ou linéairement dépendant si et seulement si il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de K non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_p V_p = 0.$$

d) Un système de vecteurs de E : $S_p = (V_1, V_2, \ldots, V_p)$ est dit libre ou linéairement indépendant lorsque : $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_p V_p = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$.

Remarque

$S_p = (V_1, V_2, \ldots, V_p)$ est lié si et seulement si : ………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

Exemples

- ✓ Soit $E = \mathbb{R}^3$. $V_1 = (4, 1, -8)$; $V_2 = (2, -1, 4)$ et $V_3 = (3, 0, -2)$. Montrer que le système $S_3 = (V_1, V_2, V_3)$ est lié .

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

- ✓ Soient dans E= $\mathbb{R}^4$ les vecteurs V_1=(1,1,1,1) ; V_2=(1,1,1,0) et V_3=(1,1,0,0). Montrer que le système S_3=(V_1,V_2,V_3) est libre.

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

<u>Définition</u> Soit E un espace vectoriel.
On dit qu'un système de p vecteurs de E : S_p=(V_1,V_2,…,V_p) est un <u>système générateur de E</u> si et seulement si pour tout vecteur V de E, il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ de K tel que : $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p$.
On dit aussi que le système de vecteurs S_p engendre E, ou encore que E est engendré par S_p.
Cette définition reste valable dans le cas d'un sous espace vectoriel.

Exemples

- ✓ $S_{n+1}=(1,x,x^2,x^3 \dots x^n)$ engendre $E=\mathbb{R}_n[X]$, car : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe n+1 réels $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ tel que : $P(x) = \alpha_0.1 + \alpha_1.x + ... + \alpha_n x^n$
- ✓ $S_{n+1}=(1,x,x^2,x^3 \dots x^n)$ engendre-t-il $E=\mathbb{R}[X]$? ……………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………..
- ✓ S_2=(V_1=(1 ,0 ,0) ; V_2=(0 ,1 ,0)) engendre-t-il $E=\mathbb{R}^3$? ……………………………........

  ………………………………………………………………………………………
- ✓ S_3 =(V_1=(1 ,0 ,0) ; V_2=(0 ,1 ,0) ; V_3=(0 ,0 ,1)) engendre-t-il $E=\mathbb{R}^3$? ………………

  ………………………………………………………………………………………
- ✓ S_4 =(V_1=(1 ,0 ,0) ; V_2=(0 ,1 ,0) ; V_3=(0 ,0 ,1) ;V_4=(1 ,1 ,1)) engendre-t-il $E=\mathbb{R}^3$?

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

<u>Définition</u> Soit E un espace vectoriel.
On dit qu'un système de n vecteurs de E : S_n=($V_1,V_2,\dots,V_n$) forme une <u>base de E</u> si et seulement si pour tout vecteur V de E, il existe n scalaires <u>uniques</u> $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ de K tel que : $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n$.

Exemples

- ✓ S_2=(V_1=(1 ,0 ,0) ; V_2=(0 ,1 ,0)) forme-t-il une base de $E=\mathbb{R}^3$? ……………………….

  ……………………………………………………………………………………………..

  ……………………………………………………………………………………………..
- ✓ S_4 =(V_1=(1 ,0 ,0) ; V_2=(0 ,1 ,0) ; V_3=(0 ,0 ,1) ;V_4=(1 ,1 ,1)) forme-t-il une base de $E=\mathbb{R}^3$?

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

- ✓ S_3 =(V_1=(1 ,0 ,0) ; V_2=(0 ,1 ,0) ; V_3=(0 ,0 ,1)) forme-t-il une base de E=$\mathbb{R}^3$? …… …

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

<u>Conséquences importantes et dimension d'un espace vectoriel</u> **a) Un système de vecteurs de E est une base de E, si et seulement il est à la fois libre et générateur de E.** **b) Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs, on appelle ce nombre <u>dimension de l'espace vectoriel E</u> que l'on note : <u>dimE</u>** **c) Soit E=K^n, tout système de n vecteurs libres de E forme une base de E, et dimE=n.**

<u>Exemple</u>

- ✓ S_4 =(V_1=(1,1,1,1) ; V_2=(1,1,1,0) et V_3=(1,1,0,0) ;V_4=(0,0,0,1)) forme-t-il une base de E=$\mathbb{R}^4$?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

<u>Rappel</u> Un système linéaire de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ **possède une unique solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si et seulement si le déterminant de sa matrice associée est non nul :**

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \neq 0.$$

<u>Exemples</u>

- ✓ Soient E= $\mathbb{R}^2$; $V_1=(2,3)$ et $V_2=(3,2)$. $B=(V_1,V_2)$ forme-t-il une base de E ?

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

- ✓ Soient E= $\mathbb{R}^3$; $V_1=(1,-1,0)$; $V_2=(0,-1,1)$ et $V_3=(1,1,1)$. $B=(V_1,V_2,V_3)$ forme-t-il base de E ?

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

<u>Vocabulaire</u> On appelle <u>base canonique</u> de K^n, le système de vecteurs suivant :
$C=(e_1=(1,0,\dots,0)$; $e_2=(0,1,0,\dots,0)$; $e_3=(0,0,1,0,\dots,0)$; ………. ; $e_n=(0,\dots,0,1))$

En effet, ……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

<u>Définition</u> Soit B=($V_1, V_2, \ldots, V_n$) une base de K^n, soit V un vecteur de E. Alors : il existe n uniques scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que : $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n$,
les scalaires α_i sont appelés les coordonnées de V dans la base B.

Nous noterons : $V_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

<u>Exemples</u>

- ✓ Soit E= $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur V=(2 ,-2 ,1) dans la base canonique.

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

- ✓ Soit E= $\mathbb{R}^3$; V_1=(1 ,-1 ,0) ; V_2=(0 ,-1 ,1) et V_3=(1 ,1 ,1). Déterminer dans la base B=(V_1, V_2, V_3) les coordonnées du vecteur V=(2 ,-2 ,1).

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

4) Base et dimension d'un sous espace vectoriel

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous espace vectoriel de E. Alors F est aussi de dimension finie et dimF $\leq$ dimE.
De plus, si dimF=dimE, alors F=E.

Exemple Soit E= $\mathbb{R}^3$. $F = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un sous espace vectoriel de E,

déterminer une famille génératrice de F, puis en déduire sa dimension.

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

5) Application à la résolution d'Equations Différentielles Linéaires à coefficients constants sans second membre

- ✓ Soit F, L'ensemble des solutions des EDLCC du premier ordre et sans second membre : $a.y'(x) + b.y(x) = 0$ avec $a \neq 0$.
  Soit E, l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. F est un sous espace vectoriel de E de dimension 1 dont une base est $\left(e^{-\frac{b}{a}x} \right)$
- ✓ Soit F, L'ensemble des solutions des EDLCC du second ordre et sans second membre : $a.y''(x) + b.y'(x) + c.y(x) = 0$ avec $a \neq 0$.
  Soit E, l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. F est un sous espace vectoriel de E de dimension 2 dont une base est :
  $\left(e^{r_1 x} ; e^{r_2 x}\right)$ où r_1 et r_2 sont les racines réelles distinctes dans le cas $\Delta > 0$
  $\left(e^{r_1 x} ; xe^{r_1 x}\right)$ où r_1 est la racine réelle dans le cas $\Delta = 0$
  $(e^{\alpha x} \cos(\beta x) ;\ e^{\alpha x} \sin(\beta x))$ où $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont les racines complexes dans le cas $\Delta < 0$

II. Applications linéaires :

1) Définitions

Définition **Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K.**

Soit $\begin{array}{l} \mathbf{f : E \to F} \\ \mathbf{V \mapsto W = f(V)} \end{array}$ **, une application de E dans F.**

On dit que f est linéaire si et seulement si :

$$\forall\, \mathbf{V, W \in E \text{ et } \forall \alpha \in K} \quad \begin{cases} \mathbf{f(V+W) = f(V) + f(W)} \\ \mathbf{f(\alpha.V) = \alpha.f(V)} \end{cases}$$

Définition condensée $\begin{array}{l} \mathbf{f : E \to F} \\ \mathbf{V \mapsto W = f(V)} \end{array}$ **est une application linéaire de E dans F.**

si et seulement si : $\forall\, \mathbf{V, W \in E \text{ et } \forall \alpha \in K \;\; f(V + \alpha.W) = f(V) + \alpha.f(W)}$

Vocabulaire et notation

- ✓ On note $\mathcal{L}$(E,F) l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- ✓ Une application linéaire de E dans F est aussi appelée morphisme de E vers F
- ✓ Une application linéaire de E dans E est aussi appelée endomorphisme de E, et l'ensemble des endomorphismes est noté End(E).

Propriété immédiate **Si f∈ $\mathcal{L}$(E,F), alors f(0)=0**

En effet, ……………………………………………………………………………………

2) Exemples

- ✓ L'application identité : $\begin{array}{l} Id_E : E \to E \\ V \mapsto Id_E(V) = V \end{array}$ est un endomorphisme de E (ou une application linéaire de E dans E).
- ✓ L'application f, définie par : $\begin{array}{l} f : IR^3 \to IR^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix} \end{array}$ est-elle une application linéaire ?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

✓ L'application dérivation, définie par : $\begin{aligned}\frac{d}{dx} : IR[X] &\rightarrow IR[X] \\ P &\mapsto P'\end{aligned}$ est linéaire :

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3) Propriétés

Soient E et F, deux espaces vectoriels sur K. Soit B=(u_1, u_2, …, u_n) une base de vecteurs de E.
a) Soient f∈ $\mathcal{L}$(E,F) et g ∈ $\mathcal{L}$(E,F).

$$f=g \text{ si et seulement si } \forall\ 1 \le i \le n\ \ f(u_i) = g(u_i)$$

b) Soit f∈ $\mathcal{L}$(E,F) . f est l'application nulle si et seulement si $\forall\ 1 \le i \le n\ \ f(u_i) = 0$
c) L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un K-espace vectoriel. $\mathcal{L}$(E,F) est un K-espace vectoriel.
d) La composition d'applications linéaires est une application linéaire :
Soient E,F,G, trois espaces vectoriels sur K. Soient f∈ $\mathcal{L}$(F,G) et g ∈ $\mathcal{L}$(E,F).

$$\text{Alors } f \circ g \in \mathcal{L}(E,G) . \quad \begin{aligned} f \circ g : E &\rightarrow F \rightarrow G \\ V &\mapsto g(V) \mapsto f(g(V)) \end{aligned}$$

c) Si f∈ $\mathcal{L}$(E,F) est bijective, alors f^{-1}∈ $\mathcal{L}$(F,E)

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

4) Noyau et Image d'une application linéaire

Définitions Soient E et F, deux espaces vectoriels sur K et f∈ $\mathcal{L}$(E,F).
On appelle noyau de f et on note Ker(f) l'ensemble défini par :

$$\mathbf{Ker(f) = \{V \in E \,/\, f(V) = 0\}}$$

On appelle image de f et on note Im(f), l'ensemble défini par :

$$\mathbf{Im(f) = \{\, f(V) \,/\, V \in E\}}$$

Remarques

- ✓ Ker(f) est un sous espace vectoriel de ……………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

- ✓ Im(f) est un sous espace vectoriel de ……………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Exemples

- ✓ L'application identité : $\begin{array}{l} Id_E : E \to E \\ \quad V \mapsto Id_E(V) = V \end{array}$. Ker(Id_E)=………Im(Id_E)= …………..

- ✓ L'application f, définie par : $\begin{array}{l} f : IR^3 \to IR^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix} \end{array}$.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

✓ L'application dérivation, définie par : $\begin{aligned}\frac{d}{dx} : IR_n[X] &\to IR_n[X] \\ P &\mapsto P'\end{aligned}$ est linéaire :

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Vocabulaire Soit f∈ $\mathcal{L}$(E,F), on appelle rang de f et on note rang(f) la dimension du sous espace Image de f.

Théorème Soit f∈ $\mathcal{L}$(E,F). dimE=dimKer(f)+rang(f)

Exemple

✓ L'application f, définie par : $\begin{aligned} f : IR^3 &\to IR^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix}\end{aligned}$.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

L'application dérivation, définie par : $\begin{aligned}\frac{d}{dx} : IR_n[X] &\to IR_n[X] \\ P &\mapsto P'\end{aligned}$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

5) Application linéaire injective, surjective, bijective

Définitions / Propositions **Soit f $\in \mathcal{L}(E,F)$**
a) f est dite injective si et seulement si $f(V) = f(V') \Leftrightarrow V = V'$
conséquences : f est injective si et seulement si Ker(f)= $\{0\}$
f est injective si et seulement si dim(Ker(f))=0
b) f est dite surjective si et seulement si $\forall\, W \in F\ \exists\ V \in E\ /\ W = f(V)$
conséquences : f est surjective si et seulement si Im(f)=F
f est surjective si et seulement si rang(f)=dimF
c) f est dite bijective si et seulement si $\forall\, W \in Im(f)\, \exists!\, V \in E\ /\ W = f(V)$
conséquences : f est bijective si et seulement si Ker(f)= $\{0\}$ et Im(f)=F
f est bijective si et seulement si dimE=dimF et dim(Ker(f))=0

En effet, ……………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

Vocabulaire

- ✓ Une application linéaire bijective est aussi appelée isomorphisme.
- ✓ Un endomorphisme bijectif est aussi appelé automorphisme. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Exemples

L'application identité : $\begin{array}{l} Id_E : E \to E \\ \quad V \mapsto Id_E(V) = V \end{array}$. Ker(Id_E)=………Im(Id_E)= …………..

……………………………………………………………………………………………...

- ✓ L'application f, définie par : $\begin{array}{l} f : IR^3 \to IR^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix} \end{array}$.

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

- ✓ L'application dérivation, définie par : $\begin{array}{l} \frac{d}{dx} : IR_n[X] \to IR_n[X] \\ \quad P \mapsto P' \end{array}$ est linéaire :

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………

III . Matrice associée à une application linéaire :

1) Définition

Soit f une application linéaire de K^p dans K^n : $\begin{array}{l} f : K^p \to K^n \\ \quad V \mapsto W = f(V) \end{array}$

On munit K^p de la base B_p=(V_1,V_2,…,V_p).

On munit K^n de la base B_n=(W_1,W_2,…,W_n).

Soit $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p$, les coordonnées de V dans la base B_p sont :

$$V_{B_p} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

On cherche W_{B_n}, les coordonnées de f(V) dans la base B_n :

$f(V) = f(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p)$**, et comme f est une application linéaire,**

$$f(V) = \alpha_1 f(V_1) + \alpha_2 f(V_2) + ... + \alpha_p f(V_p).$$

<u>Il suffit donc de connaître les $f(V_i)$ pour connaître f(V) pour tout V.</u>

Supposons que : $\begin{cases} f(V_1) = a_{11} W_1 + a_{21} W_2 + ... + a_{n1} W_n \\ f(V_2) = a_{12} W_1 + a_{22} W_2 + ... + a_{n2} W_n \\ ... \\ f(V_p) = a_{1p} W_1 + a_{2p} W_2 + ... + a_{np} W_n \end{cases}$**, alors :**

$$f(V) = \alpha_1 (a_{11} W_1 + a_{21} W_2 + ... + a_{n1} W_n) + ... + \alpha_p (a_{1p} W_1 + a_{2p} W_2 + ... + a_{np} W_n)$$

$$f(V) = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + ... + \alpha_p a_{1p}) W_1 + ... + (\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + ... + \alpha_p a_{np}) W_n$$

Les coordonnées de f(V) dans la base B_n sont donc : $f(V)_{B_n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + ... + \alpha_p a_{1p} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + ... + \alpha_p a_{2p} \\ ... \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + ... + \alpha_p a_{np} \end{pmatrix}$

Afin de faciliter cette écriture, on note :

$$f(V)_{B_n} = A.V_{B_p}$$

où A est le tableau de nombres suivant : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}.$

On a donc : $\mathbf{A.V_{B_p}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{1p}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{2p}} \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{np}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \mathbf{...} \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{a_{11}} + \alpha_2 \mathbf{a_{12}} + \mathbf{...} + \alpha_p \mathbf{a_{1p}} \\ \alpha_1 \mathbf{a_{21}} + \alpha_2 \mathbf{a_{22}} + \mathbf{...} + \alpha_p \mathbf{a_{2p}} \\ \mathbf{...} \\ \alpha_1 \mathbf{a_{n1}} + \alpha_2 \mathbf{a_{n2}} + \mathbf{...} + \alpha_p \mathbf{a_{np}} \end{pmatrix} = \mathbf{f(V)_{B_n}}$

A s'appelle <u>la matrice de l'application f de K^p muni de la base B_p dans K^n muni de la base B_n.</u>
Elle possède n lignes et p colonnes, on note : $\mathbf{A \in M_{n,p}(K)}$.

<u>Rappel important</u> : Dans l'utilisation des indices double a_{ij}, i indique la ligne et j la colonne.
On remarque aussi que les colonnes de A représentent les coordonnées des vecteurs $f(V_i)$ dans la base B_n.

2) <u>Exemples</u> :

- ✓ Soit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques respectives C_3 et C_2, et soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : (IR^3, C_3) \to (IR^2, C_2)$$
$$V_{C_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto W_{C_2} = \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de f :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Déterminer l'image par f du triplet (1,2,3) :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ Soit f, une application définie par les images des vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$: $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i'} - \vec{j'} + 2.\vec{k'} \\ f(\vec{j}) = \vec{j'} + \vec{k'} \\ f(\vec{k}) = \vec{i'} - \vec{j'} \end{cases}$. Déterminer la matrice associée à f, ainsi que l'image du vecteur : $V = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ où x, y, z sont des réels.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3) Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Soient E= K^n,
B=(V_1,V_2,…,V_n) appelée « ancienne base de E ».
B'=(V_1',V_2',…,V_n') appelée « nouvelle base de E ».
On suppose connaître les coordonnées des vecteurs V_1',V_2',…,V_n' dans la base B :

$$\begin{cases} V_1' = a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + ... + a_{n1}V_n \\ V_2' = a_{12}V_1 + a_{22}V_2 + ... + a_{n2}V_n \\ ... \\ V_n' = a_{1n}V_1 + a_{2n}V_2 + ... + a_{nn}V_n \end{cases}.$$

<u>Définition</u> On appelle <u>matrice de passage de la base B' vers la base B</u> la matrice carrée d'ordre n, notée $P_{B'\to B}$, dont les vecteurs colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs V_i' dans la base B : $P_{B'\to B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

En fait, $P_{B'\to B}$ représente l'application identité par rapport aux bases B' et B :

$$\begin{aligned} Id : E,B' &\to E,B \\ V_{B'} &\mapsto V_B = P_{B'\to B}.V_{B'} \end{aligned}$$

<u>En pratique</u> Soit V un vecteur de E, on connaît V_B ses coordonnées dans « l'ancienne base » B, on cherche $V_{B'}$ ses coordonnées dans la « nouvelle base »B' : $V_{B'} = P_{B' \to B}^{-1} . V_B$.

<u>Exemple</u> Soit E=$\mathbb{R}^3$.
Soit B=(V_1,V_2, V_3), la base canonique de E.
B'=(V_1',V_2',V_3') où : V_1'=(1,1,1), V_2'=(3,2,1), V_3'=(3,1,0). (donc det(V_1',V_2',V_3')$\neq$0)
Soit V=(7,3,1), un vecteur de E, calculer ses coordonnées dans la base B'.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

5) <u>Action d'un changement de base sur une matrice</u>

Soient E= K^n,
B_E=(V_1,V_2,…,V_n) appelée « ancienne base de E ».
B_E'=(V_1',V_2',…,V_n') appelée « nouvelle base de E ».
On connaît la matrice de passage de B_E' vers B_E, que l'on note : $P = P_{B'_E \to B_E}$
Soient F= K^p,
B_F=(W_1,W_2,…,W_p) appelée « ancienne base de F ».
B_F'=(W_1',W_2',…,W_p') appelée « nouvelle base de F ».
On connaît la matrice de passage de B_F' vers B_F, que l'on note : $Q = P_{B'_F \to B_F}$
Soit f une application linéaire de E dans F. On connaît A, la matrice de f relativement aux bases B_E et B_F, on cherche A', la matrice de f relativement aux bases B_E' et B_F'. On a le diagramme suivant :

On a alors : $A' = Q^{-1}AP$., on dit que les matrices A et A' sont équivalentes.

Cas particulier Si E=F, alors P=Q et $A' = P^{-1}AP$, on dit alors que A et A' sont semblables.

Exemples

- ✓ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A', la matrice de f dans la base $B' = (V_1', V_2', V_3')$ où

  $V_1' = (0,1,0)$, $V_2' = (1,-2,1)$ et $V_3' = (-1,-2,1)$.

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

- ✓ Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques est $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Exprimer B' la matrice de g par rapport aux bases $B_3'=(V_1',V_2',V_3')$ et $B_2'=(W_1',W_2')$ où $V_1'=(1,0,0)$, $V_2'=(1,-2,1)$, $V_3'=(1,2,1)$, $W_1'=(1,1)$ et $W_2'=(1,-1)$. Soit $\mathbf{V}_{\mathbf{B'_3}}=(3,0,2)$, les coordonnées d'un vecteur V dans la base B'_3 , calculer les coordonnées de g(V) dans la base B_2'.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

6) Déterminant d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme de E. A la matrice de f dans une base B de E, et A' la matrice de f dans une base B'. Soit P, la matrice de passage de B' vers B. Alors $A'=P^{-1}AP$ et $\det(A')=\det(P^{-1}).\det(A).\det(P)=\det(A)$. Ce scalaire ne dépend donc pas de la base choisie, c'est pourquoi on l'appelle déterminant de l'endomorphisme f et on le note det(f) .

IV. Diagonalisation d'une matrice carrée

1) Matrice diagonale, caractéristiques

Définition **Une matrice diagonale est une matrice carrée $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, dont tous les termes n'appartenant pas à la diagonale principale (de a_{11} à a_{nn}) sont nuls.**

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Propriétés **- La somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.**

- **Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale telle que $C=AB=BA$, avec $c_{ii}=a_{ii}.b_{ii}$ et $c_{ij}=0$ pour $i\neq j$.**
- **La puissance d'une matrice diagonale est une matrice diagonale :**

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2^k & 0\dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k\end{pmatrix}.$$

- **Image d'un vecteur : $W=f(V)$ où $A=mat_B(f)$ avec B une base de $E=\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:**

$$\text{Si } V_B=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \dots\\x_n\end{pmatrix}, \text{alors } W_B=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \dots\\y_n\end{pmatrix} \text{avec } \forall i, y_i=\lambda_i x_i.$$

2) Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

Introduction Soit $E=K^n$, B une base de E, f un endomorphisme de E. Soit $A=mat_B f$. On dit que f (ou A) est diagonalisable sur K lorsqu'il existe une base $B'=(V_1',V_2',\dots,V_n')$ de E telle que : $A'=mat_{B'}f=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$. On a alors : $f(V_i')=\lambda_i V_i'$ pour tout i.

Définitions

- **On appelle <u>vecteur propre</u> d'un endomorphisme f tout vecteur V non nul de E tel que f(V)=λ V, ($\lambda \in$K).**
- **On appelle <u>valeur propre</u> d'un endomorphisme f tout nombre déterminé par l'équation ci-dessus.**
- **On appelle <u>sous-espace propre</u> associé à la valeur propre λ, l'ensemble $E_\lambda = \{V \in E / f(V) = \lambda V\}$. E_λ est un sous espace vectoriel de E (on peut alors en extraire une base).**

<u>Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres</u>

L'équation f(V)=λ V peut aussi s'écrire : f(V)=λ Id(V), donc f(V)-λ Id(V)=0, soit g(V)=0, en posant g=f-λ Id.
Si A est la matrice de f (dans la base B=($V_1,\ldots,V_n$)) et G la matrice de g, on a : G=A-λ I_n,

c'est à dire : $G = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn-\lambda} \end{pmatrix}$.

g(V)=0 si et seulement si G.V_B=0 si et seulement si :

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-\lambda \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } V_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système d'équations est un système homogène ; il possède des solutions non nulles si et seulement si detG=det(A-λ Id)=0 (équation caractéristique).

<u>En résumé</u> Pour déterminer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A,

a) Il faut donc d'abord <u>résoudre l'équation caractéristique</u> det(A-λ Id)=0. Les valeurs λ obtenues sont appelées les <u>valeurs propres</u> de A .
b) Il faut ensuite déterminer les <u>vecteurs propres de A</u>, c'est-à-dire résoudre l'équation : (A-λ I_n)(V)=0.

<u>Exemples</u>

- ✓ Soit dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base (V_1,V_2) l'endomorphisme f de matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

  Rechercher les valeurs propres, vecteurs propres, et sous-espaces propres associés. Peut-on trouver une base de diagonalisation de A ?

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de B. B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de C. C est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Remarque det(A- λ Id) est un polynôme de variable λ, de degré n, on l'appelle polynôme caractéristique de A (ou de f).

3) Diagonalisation d'une matrice carrée

Détermination de la nouvelle base et de la matrice associée

Pour qu'un endomorphisme f puisse avoir une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, il faut et il suffit que l'on puisse définir une base B'=(V_1',V_2',…,V_n') telle que :

$$\begin{cases} f(V_1^{'}) = a_1 V_1^{'} + 0.V_2^{'} + \dots + 0.V_n^{'} = a_1 V_1^{'} \\ f(V_2^{'}) = 0.V_1^{'} + a_2 V_2^{'} + 0.V_3^{'} + \dots + 0.V_n^{'} = a_2 V_2^{'} \\ \dots. \\ f(V_n^{'}) = 0.V_1^{'} + \dots + 0.V_{n-1}^{'} + a_n V_n^{'} = a_n V_n^{'} \end{cases}.$$

Soit en général $f(V_i^{'}) = a_i V_i^{'}$, ce qui définit les vecteurs propres. D'où :
La base de diagonalisation B' est constituée des n vecteurs propres et les a_i sont les valeurs propres λ_i $(\lambda_i \in K)$.

Conditions de diagonalisation d'une matrice

Une matrice A d'ordre n, est diagonalisable sur K si et seulement si :
a) l'équation det(A-λ Id) =0 possède n solutions : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ dans K
et
b) $\forall$ i, dim(E_{λ_i}) = k_i où E_{λ_i} est le sous espace propre associé à la valeur propre λ_i de multiplicité k_i

Cas particulier Si les n valeurs propres sont toutes simples dans K, alors A est diagonalisable dans K.

Exemple
La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est –elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$?

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

Exercices de la partie B du chapitre 1

Exercice 1 :

1) Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $V_1=(2,1,3)$; $V_2=(0,\lambda,2)$ et $V_3=(-2,1,3)$, quelle condition doit remplir λ pour que (V_1,V_2,V_3) soit un système libre ?
2) Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système (V_1,V_2,V_3) avec : $V_1=(\lambda,1,-1)$; $V_2=(-1,\lambda,1)$ et $V_3=(1,1,\lambda)$. Déterminer les conditions dans lesquelles ce système est libre ou lié.
3) Soit dans $\mathbb{C}^2$ les vecteurs $Z_1=(2-i,i)$; $Z_2=(1+i,-1)$; $Z_3=(1-3i,1+i)$. Les systèmes (Z_1,Z_2) et (Z_1,Z_3) sont-ils libres ou liés ?

Exercice 2 :

1) Montrer que $V_1=(1,0,0)$ $V_2=(1,1,0)$ et $V_3=(1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Généraliser à $V_1=(a_1,0,0)$ $V_2=(b_1,b_2,0)$ et $V_3=(c_1,c_2,c_3)$ où $a_1b_2c_3 \neq 0$.
3) Montrer que les vecteurs $V_1=(1,2i,-i)$ $V_2=(2,1+i,1)$ et $V_3=(-1,1,-i)$ forment une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$
Calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $W=(1,2,0)$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, soit F, le sous espace défini par les équations $x+y+z=2x+y-3z=0$.
1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en donner une base et sa dimension.
2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^4$, soit F, le sous espace vectoriel défini par les équations $x_1+x_2+x_3-x_4=2x_1-x_2+x_3-x_4=0$.
1) Donner une base de F, puis en déduire dimension.
2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 :

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n.

1) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de E, et que $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ en est une base. Quelle est alors la dimension de E_n ?
2) Montrer que $Q=(x-1)(x-2)$, $R=(x-2)(x-3)$ et $S=(x-1)(x-3)$ forment une base de E_2. Quelles sont les coordonnées de ax^2+bx+c dans cette base ?

Exercice 6 :

Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, en donner une base. Comparer $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Généraliser à $\mathbb{C}^n$.

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Soit $F_a=<V_1, V_2, W_a>$ où $V_1=(3 ,0 ,1 , -1)$; $V_2=(4, 2, 4, 3)$ et $W_a=(1, 2,3, a)$.
Déterminer la dimension de F_a et en donner une base suivant les valeurs de a.

Exercice 8 :

Soit f, l'application définie par : L'application f, définie par : $\begin{aligned} f: IR^2 &\to IR^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$.

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Donner une base de Ker(f).
3) Donner une base de Im(f).
4) f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 9 :

Soit f, l'application définie par : L'application f, définie par : $\begin{aligned} f: IR^3 &\to IR^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y-z \end{pmatrix} \end{aligned}$.

1) Donner une base de Ker(f).
2) Donner une base de Im(f).
3) f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 10 :

Soit f, l'application définie par : $\begin{aligned} f: IR^3 &\to IR^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 9.x_1+10.x_2-6.x_3 \\ x_1+2.x_2+2.x_3 \\ -2.x_1-x_2+5.x_3 \\ 2.x_1+3.x_2+.x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$.

1) Donner une base de Ker(f).
2) Donner une base de Im(f).
3) f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 11 :

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts, soit $E_n=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n et soit $V_{n+1}=\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que l'application suivante :
$\begin{aligned} f: E_n &\to V_{n+1} \\ P &\mapsto (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{aligned}$.est linéaire et injective. En déduire qu'elle est bijective. Dans le cas où n=2, donner l'application réciproque.

Exercice 12 : Pour chacune des applications linéaires des exercices précédents, préciser sa matrice dans les bases canoniques des espaces $\mathbb{R}^n$ considérés.

Exercice 13 : Soit f, une application définie par les images des vecteurs d'une base de l'espace dans lequel on se place. Déterminer la matrice associée à f, son noyau et son image.

1) $\begin{cases} f(i) = i'+j' \\ f(j) = i'-j' \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(i) = i'-j'+2k' \\ f(j) = j'+k' \\ f(k) = i'-j' \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(i) = i'+2j'+k' \\ f(j) = i'-j' \end{cases}$

Exercice 14 : Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $B=(V_1,V_2,V_3)$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice dans cette base : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit le vecteur V de $\mathbb{R}^3$ tel que $V_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

1) Déterminer les coordonnées dans la base B de W=f(V).
2) Déterminer dimKerf, puis en déduire dim(Im(f)) (appelé aussi le rang de f).

Exercice 15 : Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ (associée par exemple dans la base canonique à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$) telle que : $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On change de base par la matrice de passage : $P=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A', matrice de u dans cette nouvelle base, puis toutes les matrices B' telles que $(B')^2=A'$. En déduire alors toutes les matrices B, dans la base initiale, telles que : $B^2=A$.

Exercice 16 : Soit u, une application linéaire de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1,e_2,e_3) est : $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs $e_1'=2.e_1+3.e_2+e_3$, $e_2'=3.e_1+4.e_2+e_3$, $e_3'=e_1+2.e_2+2.e_3$ forment une base de E. Calculer la matrice de u par rapport à cette nouvelle base.

<u>Exercice 17</u> : Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui à tout vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x-z \\ 2x+y \\ z-x \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Ecrire la matrice de g par rapport à la base canonique, puis celle de $g \circ g$

2) Soit $V_1=(0,1,0)$, $V_2=(1,-2,1)$, $V_3=(-1,-2,1)$. Montrer que (V_1,V_2,V_3) forme une base de $\Re^3$. Ecrire alors la matrice de g dans cette base puis celle de $g \circ g$.

<u>Exercice 18</u> :

1) Soit dans $\mathbb{R}^2$ la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser M.

2) Soit $Z = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}$, matrice d'une application linéaire f dans $\mathbb{C}^2$ rapporté à sa base canonique. Diagonaliser Z.

<u>Exercice 19</u> : On donne un réel a et l'endomorphisme u_a de End($\mathbb{R}^3$) dont la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est : $A_a=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les valeurs propres de A_a (ou de u_a).

2) Etudier suivant le réel a, si la diagonalisation de A_a est possible, en précisant clairement les différents cas.

Partie C : Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires

1) Méthode

Soit un système différentiel linéaire de la forme :

$$(S_n)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases},$$

dans lequel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions de la variable t. On peut résoudre un tel système par le calcul matriciel. On travaille pour cela dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit : $V_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $W_C = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$, en posant $x'_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$, $x'_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$, ..., $x'_n = \dfrac{dx_n}{dt}$.

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

On peut écrire alors : $W_C = A.V_C$.(1)
Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, il existe alors une base B' de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$D = mat_{B'}f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$ (où f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A dans la base canonique.)

(1) s'écrit alors dans la base B' : $W_{B'} = D.V_{B'}$.

En notant : $V_{B'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ et $W_{B'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ ... \\ y'_n \end{pmatrix}$, en posant $y'_1 = \dfrac{dy_1}{dt}$, $y'_2 = \dfrac{dy_2}{dt}$, ..., $y'_n = \dfrac{dy_n}{dt}$.

(1) équivaut au système différentiel à variables séparables suivant : $S_n \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n \end{cases}$.

Après l'avoir résolu, on obtient donc $V_{B'}$, puis V_C par changement de base : $V_C=P.V_{B'}$ où P est la matrice de passage de B' vers C.

3) <u>Exemple</u> Résoudre les systèmes suivants :

✓ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 5y \end{cases}$ avec x(0)=1 et y(0)=0.

✓ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) - y(t) + 3z(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x(t) - 2y(t) + 9z(t) \end{cases}$ vérifiant les conditions (initiales) : x(0)=y(0)=0 et $\dfrac{dz}{dt}(0) = -27$.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Exercices de la partie C du chapitre 1

Exercice 1 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 3y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 4y_2 + 3y_3 \end{cases}$ où y_1, y_2 et y_3 sont des fonctions de la variable réelle t, telles que $y_1(0)=1$, $y_2(0)=-1$ et $y_3(0)=0$.

Exercice 2 On peut utiliser le calcul matriciel pour étudier les suites récurrentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

pour cela on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) Exprimer X_{n+1} à l'aide de X_n et A, en déduire l'expression de X_n à l'aide de X_{n-1} et A, puis X_n à l'aide de X_{n-2} et A…en déduire que $X_n=A^n.X_0$.

2) Diagonaliser la matrice A, en déduire A^n, puis en déterminer les expressions des suites u_n et v_n en fonction de n.

3) Etudier alors la nature de ces suites.

Exercice 3 :

1) A l'aide du calcul matriciel, résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 0\,;\, y'(0) = 1 \text{ et } y''(0) = 0 \end{cases}$$

On posera $V(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, le vecteur inconnu d'un système d'équations différentielles.

2) Que dire des solutions de l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} y(k+3) - 2y(k+2) - y(k+1) + 2y(k) = 0 \\ y(0) = 0\,;\; y(1) = 1 \text{ et } y(2) = 0 \end{cases}$$

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..