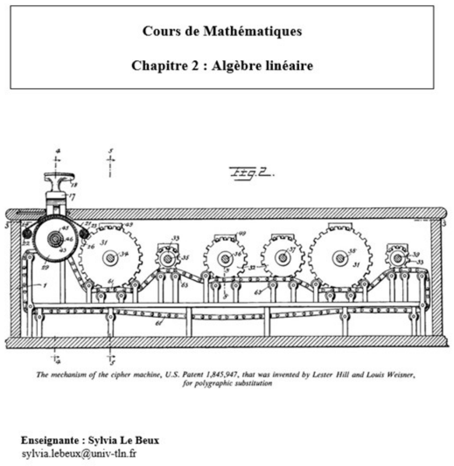
Poursuites d'études 9 : Les espaces vectoriels sur l'ensemble des réels (ou des complexes) – Partie 1/3

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> :

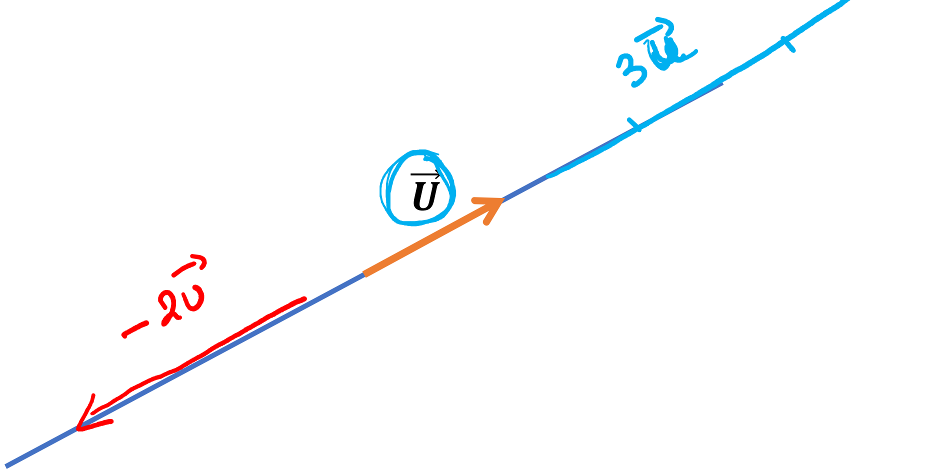
  - Exemples concrets : l'ensemble des vecteurs du plan et de l'espace.
  - Définitions – Exemples - Sous-espace vectoriel
  - Famille de vecteurs libre – Exemples et exercices.

On appelle **espace vectoriel** sur l'ensemble des réels, un ensemble de vecteurs E, muni de deux opérations :

La somme de vecteurs : $\forall\, \vec{\boldsymbol{V}}, \vec{\boldsymbol{W}} \in \boldsymbol{E} \quad \vec{\boldsymbol{V}} + \vec{\boldsymbol{W}} \in \boldsymbol{E}$

La multiplication d'un vecteur par un réel : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, \vec{\boldsymbol{V}} \in \boldsymbol{E} \quad \lambda.\vec{\boldsymbol{V}} \in \boldsymbol{E}$

Espace vectoriel de dimension 1

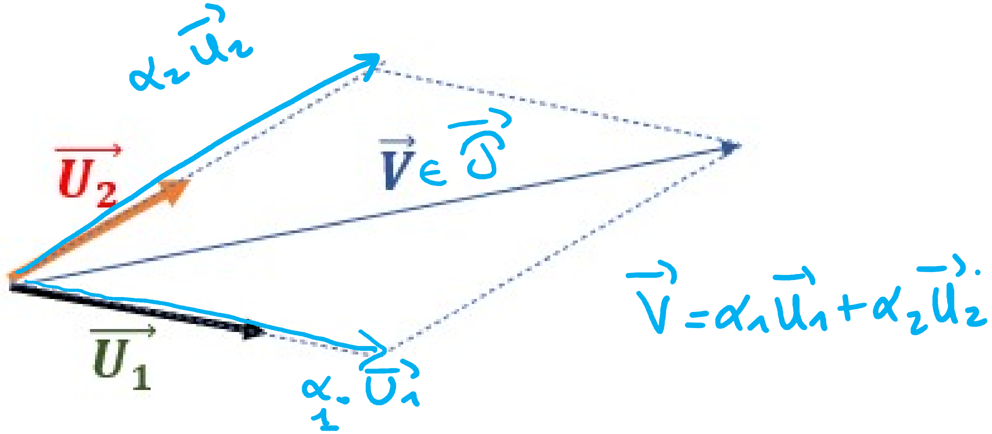


$\vec{D} = \{\vec{V} = \lambda.\vec{U}\ /\lambda \in \mathbb{R}\}$ $= \mathrm{Vect}(\vec{U})$.

est appelée droite vectorielle

$-2\vec{U} \in \vec{D}$; $3\vec{u} \in \vec{D}$

Espace vectoriel de dimension 2



$\vec{P} = \{\vec{V} = \lambda_1.\vec{U_1} + \lambda_2.\vec{U_2}\ ;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

est appelé plan vectoriel

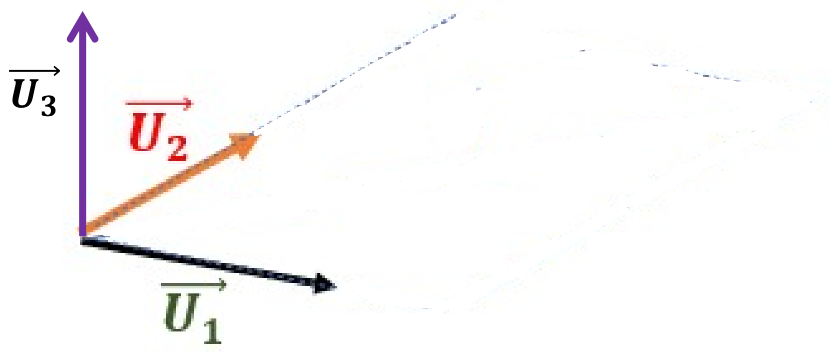
$(\vec{U_1}, \vec{U_2})$ est appelé base de $\vec{P}$ si et seulement si les 2 vecteurs sont linéairement indépendants

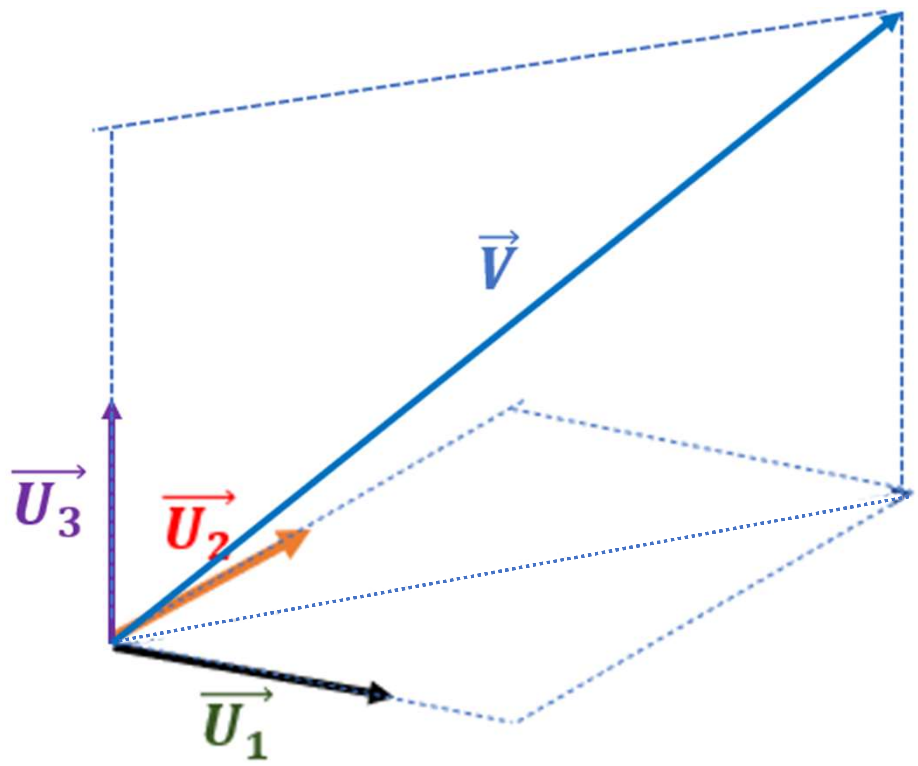
On appelle **espace vectoriel** sur l'ensemble des réels, un ensemble de vecteurs E, muni de deux opérations :

La somme de vecteurs : $\forall\, \vec{\boldsymbol{V}}, \vec{\boldsymbol{W}} \in \boldsymbol{E} \quad \vec{\boldsymbol{V}} + \vec{\boldsymbol{W}} \in \boldsymbol{E}$

La multiplication d'un vecteur par un réel : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, \vec{\boldsymbol{V}} \in \boldsymbol{E} \quad \lambda.\vec{\boldsymbol{V}} \in \boldsymbol{E}$

Espace vectoriel de dimension 3





$$\vec{E} = \{\vec{V} = \lambda_1.\overrightarrow{U_1} + \lambda_2.\overrightarrow{U_2} + \lambda_3.\overrightarrow{U_3};\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$

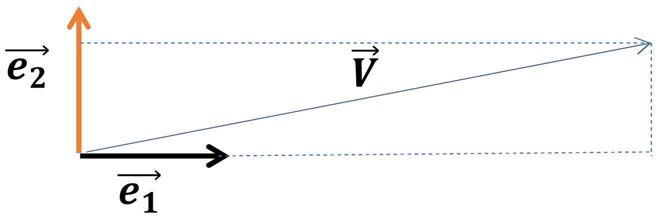
est appelé espace vectoriel de dimension 3.

$(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ *est appelé base de* $\vec{E}$ si et seulement si les 3 vecteurs sont linéairement indépendants

Base canonique d'un espace vectoriel

Espace vectoriel de dimension 2

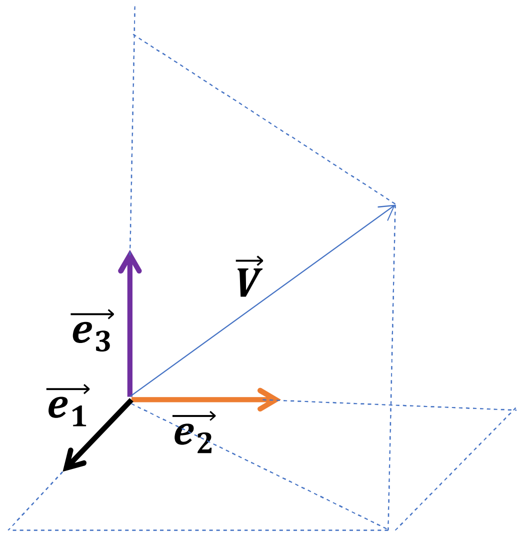
On appelle **base canonique de** $\mathbb{R}^2$ le système de vecteurs $(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}})$ **où** $\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ ***et*** $\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$



$$\vec{V} = \lambda_1 . \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 . \overrightarrow{e_2} \quad ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Espace vectoriel de dimension 3

On appelle **base canonique de** $\mathbb{R}^3$ le système de vecteurs $(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \overrightarrow{\mathbf{e_3}})$ **où** $\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$; $\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ ***et*** $\overrightarrow{\boldsymbol{e_3}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$



$$\vec{V} = \lambda_1 . \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 . \overrightarrow{e_2} + \lambda_3 . \overrightarrow{e_3} \; ; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$V_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

I. Espace vectoriel sur K où K=$\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

Page 13 du polycopié

1) Définition

On appelle espace vectoriel sur K (ou un K-espace vectoriel), tout ensemble E d'éléments nommés vecteurs, muni de deux opérations :

L'addition, loi de composition interne : $\begin{array}{l} E \times E \to E \\ (V, W) \mapsto V + W \end{array}$ **possédant les propriétés suivantes : pour tout U, V, W vecteurs de E :**

a) Commutativité : $U + V = V + U$

b) Associativité : $(U + V) + W = U + (V + W)$

c) 0 est l'élément neutre : $V + 0 = 0 + V = V$

d) Opposé : chaque vecteur V a un opposé noté (-V) tel que : $V + (-V) = 0$.

La multiplication par un scalaire, loi de composition externe : $\begin{array}{l} E \times K \to E \\ (V, \alpha) \mapsto \alpha.V \end{array}$ **possédant les propriétés suivantes : pour tout V,W vecteurs de E et α, β scalaires de K :**

a) $\alpha.(V + W) = \alpha.V + \alpha.W$

b) $(\alpha + \beta).V = \alpha.V + \beta.V$

c) $\alpha.(\beta.V) = (\alpha.\beta).V$

d) $1.V = V$

Exemples

- ✓ $E = \{0\}$ est le plus petit des espaces vectoriels.
- ✓ n est un entier naturel non nul. $E=\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel
- ✓ $E=\mathbb{R}^n$ muni des deux lois précédentes ne peut être un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel.
- ✓ $E=\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel et aussi un $\mathbb{C}$ –espace vectoriel.

LCI $\quad E\times E \longrightarrow E$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\big(\underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{V},\underbrace{(y_1,\dots,y_n)}_{W}\big) \longmapsto (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n$$

LCE $\quad E\times \mathbb{C} \longrightarrow E$

$\mathbb{R}^n \qquad\qquad \mathbb{R}^n$

$$\big((1,\dots,1);i\big) \longmapsto (i,\dots,i) \notin \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{R}^n$ n'est pas un $\mathbb{C}$_ev.

- E, l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.
- $E=\mathbb{C}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients complexe est un $\mathbb{C}$ –espace vectoriel.
- $E=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel.

- $E = \left\{ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = f(x) \end{array} \right\}$ est $\mathbb{R}$-ev.

- $E = \mathbb{C}[X] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots ; a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$. $\forall n \in \mathbb{N}$.
est un $\mathbb{C}$-ev.

- $E = \mathbb{R}_n[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] ; \deg P \leq n \}$. est $\mathbb{R}$-ev.

- $E = \{ P \in \mathbb{R}[X] ; \deg P = n \}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev.
Contre-exple : $P_1(x) = X^n$ et $P_2(x) = -X^n$ $(P_1 + P_2)(x) = 0 \in E$

- $$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = \left\{ \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{p\ \text{col}}\right\} n \text{ lignes.} \right\}.$$

les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

est un $\mathbb{R}$-ev.

2) Sous espaces vectoriels

Page 14 du polycopié

Définition : Soit E, un K-espace vectoriel. On dit que F est un sous espace vectoriel de E, si et seulement si :

a) $F \subseteq E$

b) $F \neq \emptyset$

c) F est stable pour l'addition dans E : $\forall\ V, W \in F,\quad V+W \in F$

d) F est stable pour le produit par un scalaire de K : $\forall\ \alpha \in K,\ \forall\ V \in F,\ \ \alpha.V \in F.$

Définition condensée : Soit E, un K-espace vectoriel. On dit que F est un sous espace vectoriel de E, si et seulement

a) $F \subseteq E$

b) $F \neq \emptyset$

c) F est stable par combinaison linéaire à coefficients dans K :

$$\forall\ V, W \in F,\ \forall\ \alpha \in K,\quad V + \alpha.W \in F.$$

Remarque : Si $\underbrace{\text{F est un sous espace vectoriel de E}}_{A}$, alors $\underbrace{\text{le vecteur nul appartient à F}}_{B}$.

La contraposée est intéressante. $A \Rightarrow B$

non $B \Rightarrow$ non A $\qquad 0 \notin F \Rightarrow F$ n'est pas un sev de E.

F sev de E, alors si $V \in F$, $\alpha \in K$: $V + \alpha V \in F$ ($\alpha = -1$) $\Rightarrow V - V = 0 \in F$.

Pour montrer F est un K-ev on pourra montrer que F est un sev de E.

Exple: $\mathbb{C}[X]$ est $\mathbb{C}$-ev.

$\mathbb{C}_n[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] ; \deg P \leq n\}$ est un sev de $\mathbb{C}[X]$.

$\mathbb{C}_n[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

$\forall\, P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X],\ \alpha \in \mathbb{C} \implies P_1 + \alpha P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$.

$\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$-ev. $\Longleftarrow$

Exemples

Page 15 du polycopié

✓ Soit E=$\mathbb{R}^3$; $\mathbb{R}$- ev.

$$F = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \underline{x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0} \right\}, \quad F' = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \left| \begin{array}{l} x_1 = 2t - 1 \\ x_2 = 3t + 1 \text{ où t est réel.} \\ x_3 = t - 4 \end{array} \right. \right\},$$

Quels sont les sous espaces vectoriels de E ?

• F : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ car $0 + 3.0 - 0 = 0$.

a) $F \subset \mathbb{R}^3$.

b) $F \neq \phi$ $\quad 0 \in F$

c) $\left.\begin{array}{l} V, W \in F \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $\quad V + \alpha W = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 \\ x_3 + \alpha y_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$x_1 + \alpha y_1 + 3(x_2 + \alpha y_2) - (x_3 + \alpha y_3)$

$\underbrace{(x_1 + 3x_2 - x_3)}_{= 0} + \alpha (y_1 + 3y_2 - y_3)$

$0 + \alpha . 0 . = 0$

Donc $V + \alpha W \in F$ et F est sev de $\mathbb{R}^3$

• F' : $0 \notin F'$

$\left\{ \begin{array}{l} 2t - 1 = 0 \\ 3t + 1 = 0 \\ t - 4 = 0 \iff t = 4. \end{array} \right.$

$0 \notin F'$.

F' n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.

$$F'' = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{vmatrix} x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0 \\ 2.x_1 + 5.x_3 = 1 \end{vmatrix} \right\}, \quad F''' = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{vmatrix} x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0 \\ 2.x_1 + 5.x_3 = 0 \end{vmatrix} \right\},$$

$$F^{(4)} = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{vmatrix} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t \text{ où t est réel.} \\ x_3 = t \end{vmatrix} \right\}.$$

Quels sont les sous espaces vectoriels de E ?

- F'' : $0 \notin F''$ et F'' n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.
- F''' : $0 \in F''' \Rightarrow F''' \neq \emptyset$
  $F''' \subset \mathbb{R}^3$ et $\forall\ V, W \in F''', \alpha \in \mathbb{R}$ alors $V + \alpha W \in F'''$. $\Big\}$ F''' est un sev de $\mathbb{R}^3$.
- $F^{(4)}$: $F^{(4)}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

Page 16 du polycopié

- Soit $E=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ - ev.

  $F=\{V / x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=0\}$ est un sous espace vectoriel de E. oui

  $0_{\mathbb{R}^n} \in F$; $\forall\ V, W \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $V+\alpha W \in F$.

- Soit E le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions. Parmi les sous ensembles de E suivants, lesquels sont des sous espaces vectoriels de E ?.

  $F=C^0(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$) …$0 \in F$……… $F \subset E$……… oui

  $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $f+\alpha g \in C^0(\mathbb{R})$.

  $F=C^1(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continument dérivables sur $\mathbb{R}$) …est un sev de E.

  $F=\{f \in E / f(1)=0\}$ ……est un sev de E.……………………………………

  $F=\left\{f \in E / \int_8^{10} f(x)dx=0\right\}$ .est un sev de E.……………………………………

- E est un K-espace vectoriel et $F=\{0\}$. F est un sous espace vectoriel de E.
- E est un K-espace vectoriel, si F et F' sont des sous espaces vectoriels de E, alors $F \cap F'$ est aussi un sous espace vectoriel de E.
- E est un K-espace vectoriel, si F et F' sont des sous espaces vectoriels de E, alors $F+F'=\{V+V', \text{avec } V \in F \text{ et } V' \in F'\}$ est aussi un sous espace vectoriel de E.

• $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; xy = 0\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}^2$? Non

• $(0,0) \in H$.

• $H \neq \emptyset$

• $H \subset \mathbb{R}^2$

car :

$\left.\begin{array}{l} V = (1,0) \in H \\ W = (0,1) \in H \end{array}\right\} \quad V + W = (1,1) \notin H$

• Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F est un sev de E ; G " . $F \cup G$ est-il un sev de E ?

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

NON

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \overset{\text{sev}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \overset{\text{sev}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$

$F \cup G$ est-il un sev de $\mathbb{R}^2$?

$(0,0) \in F \cup G$. $\quad F \cup G \neq \emptyset$

$F \cup G \subseteq \mathbb{R}^2$.

$V = (1,0) \in G \Rightarrow V \in F \cup G$.

$W = (0,1) \in F \qquad W$

mais $V + W = (1,1) \notin F \cup G$.

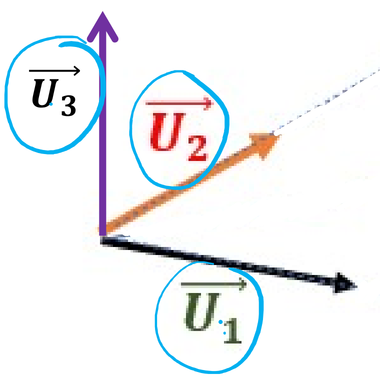
$F \cup G$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

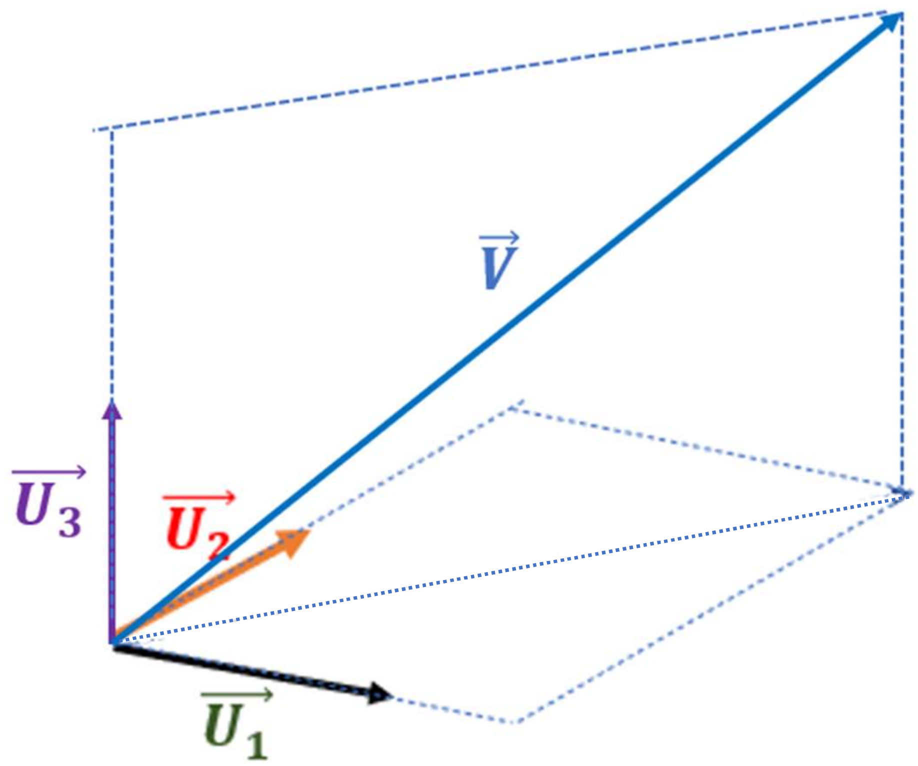
On appelle **espace vectoriel** sur l'ensemble des réels, un ensemble de vecteurs E, muni de deux opérations :

La somme de vecteurs : $\forall \vec{\boldsymbol{V}}, \vec{\boldsymbol{W}} \in \boldsymbol{E} \quad \vec{\boldsymbol{V}} + \vec{\boldsymbol{W}} \in \boldsymbol{E}$

La multiplication d'un vecteur par un réel : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{\boldsymbol{V}} \in \boldsymbol{E} \quad \lambda.\vec{\boldsymbol{V}} \in \boldsymbol{E}$

Espace vectoriel de dimension 3





$$\vec{E} = \{\vec{V} = \lambda_1.\overrightarrow{U_1} + \lambda_2.\overrightarrow{U_2} + \lambda_3.\overrightarrow{U_3};\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$

est appelé espace vectoriel de dimension 3.

$(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ *est appelé base de* $\vec{E}$ si et seulement si les 3 vecteurs sont linéairement indépendants

3) Base et dimension d'un espace vectoriel

Définitions : Soit E, un K-espace vectoriel. Soit $V_1,V_2,\dots,V_p$ p vecteurs de E et $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ p scalaires de K.

a) Tout vecteur de la forme $V=\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\dots+\alpha_pV_p$, est appelé combinaison linéaire de $V_1,V_2,\dots,V_p$.

b) On appelle système de vecteurs, ou famille de vecteurs de E , tout p-uplet de vecteurs de E. On pourra noter $S_p=(V_1,V_2,\dots,V_p)$ un tel système.

c) Un système de vecteurs de E : $S_p=(V_1,V_2,\dots,V_p)$ est dit lié ou linéairement dépendant si et seulement si il existe p scalaires $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ de K non tous nuls tels que :

$$\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\dots+\alpha_pV_p=0.$$

d) Un système de vecteurs de E : $S_p=(V_1,V_2,\dots,V_p)$ est dit libre ou linéairement indépendant lorsque : $\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\dots+\alpha_pV_p=0 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_p=0$.

Remarque

$V_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $V_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $V_3=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-1.V_1+1.V_2.$

$S_p=(V_1,V_2,\dots,V_p)$ est lié si et seulement si : $\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\dots+\alpha_pV_p=0.$

Soit $\alpha_i\neq 0$ $i\in[\![1,p]\!]$ $\alpha_iV_i=-(\alpha_1V_1+\dots+\alpha_{i-1}V_{i-1}+\alpha_{i+1}V_{i+1}+\dots+\alpha_pV_p)$

$i\in\mathbb{N}$ $1\le i\le p$ $V_i=-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}V_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_p}V_2-\dots-\frac{\alpha_p}{\alpha_i}V_p$

Exemples

Page 17 du polycopié

✓ Soit $E=\mathbb{R}^3$. $V_1=(4,1,-8)$; $V_2=(2,-1,4)$ et $V_3=(3,0,-2)$. Montrer que le système $S_3=(V_1,V_2,V_3)$ est lié .

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0 \iff \alpha_1 \begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} & V_1 & V_2 & V_3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$

$\iff (S) \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -8\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \iff \alpha_3 = -2\alpha_1 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ -8\alpha_2 + 4\alpha_2 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\alpha_3 = -2\alpha_2$

$0 = 0.$

$\iff \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \quad \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ \alpha_3 = -2\alpha_2 \end{cases}$

(S) possède ~~aucune~~ ~~solⁿ~~ ou une infté.

Comme $(0,0,0)$ est solution

par exemple $\alpha_2 = 1$: $V_1 + V_2 - 2V_3 = 0$

Donc (V_1, V_2, V_3) est lié.

Page 20 du polycopié

<u>Rappel</u> **Un système linéaire de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$**

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

possède une unique solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si et seulement si le déterminant de sa matrice associée est non nul :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$S = \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \det A = 0.$$

$$S \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 1.x - y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1/3 ; 1/3) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = -3 \neq 0$$

$$S \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases} \iff (x ; -1-2x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

✓ Soient dans E= $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $V_1=(1,1,1,1)$; $V_2=(1,1,1,0)$ et $V_3=(1,1,0,0)$. Montrer que le système $S_3=(V_1,V_2,V_3)$ est libre.

Page 17 du polycopié

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Donc S_3 est libre.

Exercices de la partie B du chapitre 1

Page 40 du polycopié

Exercice 1 :

1) Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $V_1=(2,1,3)$; $V_2=(0,\lambda,2)$ et $V_3=(-2,1,3)$, quelle condition doit remplir λ pour que (V_1,V_2,V_3) soit un système libre ?
2) Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système (V_1,V_2,V_3) avec : $V_1=(\lambda,1,-1)$; $V_2=(-1,\lambda,1)$ et $V_3=(1,1,\lambda)$. Déterminer les conditions dans lesquelles ce système est libre ou lié.
3) Soit dans $\mathbb{C}^2$ les vecteurs $Z_1=(2-i,i)$; $Z_2=(1+i,-1)$; $Z_3=(1-3i,1+i)$. Les systèmes (Z_1,Z_2) et (Z_1,Z_3) sont-ils libres ou liés ?

Exercices de la partie B du chapitre 1

Page 40 du polycopié

Exercice 1 :

1) Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $V_1=(2,1,3)$; $V_2=(0,\lambda,2)$ et $V_3=(-2,1,3)$, quelle condition doit remplir λ pour que (V_1,V_2,V_3) soit un système libre ?
2) Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système (V_1,V_2,V_3) avec : $V_1=(\lambda,1,-1)$; $V_2=(-1,\lambda,1)$ et $V_3=(1,1,\lambda)$. Déterminer les conditions dans lesquelles ce système est libre ou lié.
3) Soit dans $\mathbb{C}^2$ les vecteurs $Z_1=(2-i,i)$; $Z_2=(1+i,-1)$; $Z_3=(1-3i,1+i)$. Les systèmes (Z_1,Z_2) et (Z_1,Z_3) sont-ils libres ou liés ?

$\boxed{\mathbb{R}^3 \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev}}$

Ex1 ① (v_1, v_2, v_3) est libre si et seulement si $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\lambda & -4 \\ \boxed{1} & \lambda & 1 \\ 0 & 2-3\lambda & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2\lambda & -4 \\ 2-3\lambda & 0 \end{vmatrix} = -4(2-3\lambda) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

(v_1, v_2, v_3) est libre ssi $\lambda \neq 2/3$.

② (v_1, v_2, v_3) est libre ssi $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (1+\lambda^2)(\lambda+1) + (1-\lambda)(\lambda+1) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2+1+1-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \text{ou} \\ \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Delta < 0. \end{cases}$$

(v_1, v_2, v_3) est libre ssi $\lambda \neq -1$.

$\mathbb{C}^2$: $\mathbb{C}$-ev

Ex 3 • (z_1, z_2) est libre ssi $\det(z_1,z_2) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2-i & 1+i \\ i & -1 \end{vmatrix} = -(2-i) - i(1+i) = -2+i-i+1 \neq 0.$$

(z_1,z_2) est donc libre $\qquad \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}$-ev ;

• (z_1, z_3) est libre ssi $\det(z_1, z_3) \neq 0.$

$$\begin{vmatrix} 2-i & 1-3i \\ i & 1+i \end{vmatrix} = (2-i)(1+i) - i(1-3i) = 3+i-i+3i^2 = 0$$

(z_1,z_3) est donc lié ; en effet :

$$z_3 = \underbrace{(-i+1)}_{\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.} z_1.$$

$$\frac{1+i}{i} \times \frac{-i}{-i} = -i+1$$

$$1+i = i(-i+1)$$

$$1-3i = (2-i)(-i+1)$$

Exercice 3

Concours Supélec 2019

Q. 3.1 Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E = \mathbb{R}$-ev $= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$.

2. $f_n : x \mapsto (\sin(x))^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$

$f_1 : x \longmapsto \sin x$

$f_2 : x \longmapsto \sin^2 x$

$f_3 : x \longmapsto \sin^3 x$

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$

$\Longleftrightarrow \dots$

$\Longleftrightarrow \dots$

$\Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

3. $(x \mapsto (\sin(x))^n), (x \mapsto (\cos(x))^n)$, $n \in \{1, \dots, 4\}$.

Q. 3.2 Soit $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ une famille de fonctions. On pose

$$\mathrm{A} : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (f_i(x_j))_{1 \le i, j \le 3}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction déterminant de A, det(A), pour que la famille $(f_i)_{1 \le i \le 3}$ soit libre.

Q 3.1 ① (v_1, v_2, v_3) est libre si et seulement si $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$.

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

(v_1, v_2, v_3) est donc lié.

Q 3.1 ② (f_1, f_2, f_3) est libre si et seulement si :

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \equiv 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \equiv 0 \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0.$$

$$\iff \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \sin^3 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \sin x (\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \sin^2 x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \sin^2 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en particulier pour $x = 2\pi$: $\alpha_1 = 0$

$$\implies \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \sin^2 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin x\,(\alpha_2 + \alpha_3 \sin x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_2 + \alpha_3 \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier pour $x = 2\pi$ $\quad \alpha_2 = 0$

donc $\quad \alpha_3 \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

et $\quad \alpha_3 = 0.$

Ainsi on a montré que : $\quad \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

$\Longleftarrow$ la réciproque est immédiate

(f_1, f_2, f_3) est donc libre.

Q3.1) 3) $\forall x \in \mathbb{R}$

(*) $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \sin^3 x + \alpha_4 \sin^4 x + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos^2 x + \beta_3 \cos^3 x + \beta_4 \cos^4 x = 0$

$$\left.\begin{array}{ll}
x=0 \Rightarrow & \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=0 \quad (1) \\
x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \quad (1) \\
x=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow & -\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0 \quad (2) \\
x=\pi \Rightarrow & -\beta_1+\beta_2-\beta_3+\beta_4=0 \quad (2)
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}
\underset{(1)+(2)}{\beta_2=-\beta_4} \text{ et } \underset{(1)+(2)}{\alpha_2=-\alpha_4}. \\
\underset{(1)-(3)}{\beta_1=-\beta_3} \text{ et } \underset{(1)-(3)}{\alpha_1=-\alpha_3}.
\end{array}\right.$$

Ainsi (*) : $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin^2 x - \alpha_1 \sin^3 x - \alpha_2 \sin^4 x + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos^2 x - \beta_1 \cos^3 x - \beta_2 \cos^4 x = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 \sin x (\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}) + \alpha_2 \sin^2 x (\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}) + \beta_1 \cos x (\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}) + \beta_2 \cos^2 x (\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x \sin^2 x (\alpha_2+\beta_2) + \sin x \cos x (\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \cos x \sin x \left[\cos x \sin x (\alpha_2+\beta_2) + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x\right] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \cos x . \sin x (\alpha_2+\beta_2) + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On pose $x=\frac{\pi}{2}$ et on obtient : $\beta_1=0$. On pose $x=0$ et on obtient $\alpha_1=0$

Ainsi $\cos x . \sin x (\alpha_2+\beta_2) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff \alpha_2+\beta_2 = 0$

$\implies \alpha_2 = -\beta_2$ avec $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

la famille $\left\{ (x \longmapsto \sin^n x)_{1 \leq n \leq 4}, (x \longmapsto \cos^n x)_{1 \leq n \leq 4} \right\}$ est donc lié.

en effet : $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \sin^3 x + \alpha_4 \sin^4 x + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos^2 x + \beta_3 \cos^3 x + \beta^4 \cos^4 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff \alpha_1 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = 0$ et $\alpha_2 = -\alpha_4 = -\beta_2 = \beta_4$

Remarque : Avec un peu d'intuition, on aurait pu le trouver plus rapidement.

$$\sin^2 x - \sin^4 x - \cos^2 x + \cos^4 x = \sin^2 x (1-\sin^2 x) - \cos^2 x (1-\cos^2 x)$$

$$0.\sin x + 1.\sin^2 x + 0 \sin^3 x - 1.\sin^4 x + 0.\cos x - 1.\cos^2 x + 0.\cos^3 x + 1.\cos^4 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Q3.2

$\left(f_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\right)_{1\leq i\leq 3}$.

$A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto \left(f_i(x_j)\right)_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & f_1(x_3) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & f_2(x_3) \\ f_3(x_1) & f_3(x_2) & f_3(x_3) \end{pmatrix}$

$(f_i)_{1\leq i\leq 3}$ est libre si et seulement si : $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \equiv 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

ou encore $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Brouillon.

On sait que pour $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$
$\begin{cases} \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1) + \alpha_3 f(x_3) = 0 \\ \alpha_1 f_1(x_2) + \alpha_2 f_2(x_2) + \alpha_3 f(x_3) = 0 \\ \alpha_1 f_1(x_3) + \alpha_2 f_2(x_3) + \alpha_3 f(x_3) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0,0,0)$ ssi

$(\det A)(x_1,x_2,x_3) \neq 0$

Montrons que : $(f_i)_{1\leq i\leq 3}$ est libre $\underset{\Longleftrightarrow}{\underline{ssi}}$ $\exists (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3 \,/\, \det A(x_1,x_2,x_3)\neq 0$.

① $\Longleftarrow$ Si $\exists (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3 / (\det(A))(x_1,x_2,x_3)\neq 0$ alors le système :

$$(S) \Longleftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_i f_i(x_j) = 0\right)_{1\leq i\leq 3}$$

admet une unique solution $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ et $(f_i)_{1\leq i\leq 3}$ est alors libre.

② $\Longrightarrow$ Montrons la contraposée :

$\forall (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ $(\det A)(x_1,x_2,x_3)=0$ alors (S) admet ~~aucune~~ solution ou une infinité $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ de solutions et $(f_i)_{1\leq i\leq 3}$ est lié.

impossible car $(0,0,0)$ est solution de (S)