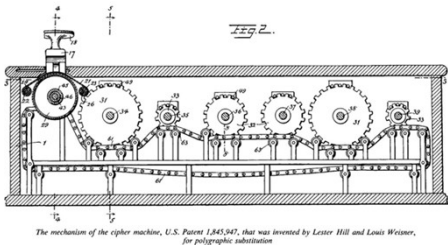


Poursuites d'études 9 : Les espaces vectoriels sur l'ensemble des réels (ou des complexes) – Partie 2/3

- Consignes à suivre pour les TD à distance :

Cours de Mathématiques

Chapitre 2 : Algèbre linéaire



Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière...
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

- Programme de la séance :

- Famille de vecteurs génératrice d'un (sous-) espace vectoriel.
- Base et dimension d'un (sous-) espace vectoriel.
- Exercices.

On appelle **espace vectoriel** sur l'ensemble des réels, un ensemble de vecteurs E , muni de deux opérations :

La somme de vecteurs : $\forall \vec{V}, \vec{W} \in E \quad \vec{V} + \vec{W} \in E$

La multiplication d'un vecteur par un réel : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{V} \in E \quad \lambda \cdot \vec{V} \in E$

Base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 = \textcircled{\mathbb{R}}\text{-ev}$.

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$ lorsque pour tout $\vec{V} \in E$ il existe un unique $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3$$

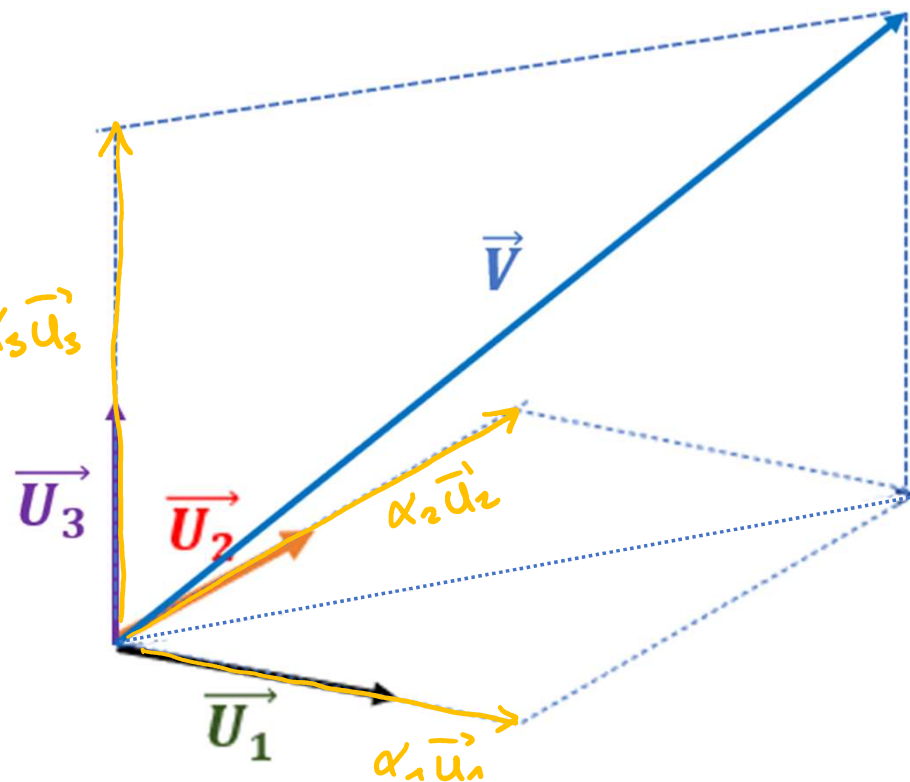
$\vec{V}_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base B .

① $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **générateur** de E :

$$\forall \vec{V} \in E \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 /$$

$$\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3$$

② $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** de E



Soit $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$, tel que $\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$
 $\vec{V} = \alpha'_1 \vec{u}_1 + \alpha'_2 \vec{u}_2 + \alpha'_3 \vec{u}_3 \quad (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \alpha'_1) \vec{u}_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) \vec{u}_2 + (\alpha_3 - \alpha'_3) \vec{u}_3$$

Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre lorsque : $\beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{u}_2 + \beta_3 \vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.
 $\alpha_i = \alpha'_i \quad i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$

3) Base et dimension d'un espace vectoriel

Page 16 du polycopié

Définitions : Soit E , un K -espace vectoriel. Soit $V_1, V_2, \dots, V_p$ p vecteurs de E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ p scalaires de K .

a) Tout vecteur de la forme $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p$, est appelé combinaison linéaire de $V_1, V_2, \dots, V_p$.

b) On appelle système de vecteurs, ou famille de vecteurs de E , tout p -uplet de vecteurs de E . On pourra noter $S_p = (V_1, V_2, \dots, V_p)$ un tel système.

c) Un système de vecteurs de E : $S_p = (V_1, V_2, \dots, V_p)$ est dit lié ou linéairement dépendant si et seulement si il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de K non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p = 0.$$

d) Un système de vecteurs de E : $S_p = (V_1, V_2, \dots, V_p)$ est dit libre ou linéairement indépendant lorsque : $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

Définition Soit E un espace vectoriel.

On dit qu'un système de p vecteurs de E : $S_p = (V_1, V_2, \dots, V_p)$ est un système générateur de E si et seulement si pour tout vecteur V de E , il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de K tel que : $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p$.

On dit aussi que le système de vecteurs S_p engendre E , ou encore que E est engendré par S_p .

Cette définition reste valable dans le cas d'un sous espace vectoriel.

Exemples

$V_0 \ V_2 \ V_3 \ \dots \ V_n$
 $\downarrow \downarrow \downarrow \dots \downarrow$
 $\checkmark \ S_{n+1} = (1, x, x^2, x^3 \dots x^n)$ engendre $E = \mathbb{R}_n[X]$, car : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $n+1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tel que : $P(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \dots + \alpha_n \cdot x^n$
 $\underbrace{\alpha_0}_{V_0} \underbrace{\alpha_1}_{V_1} \dots \underbrace{\alpha_n}_{V_n}$

polynômes à coeff réels de deg $\leq n$: $\mathbb{R}$ -ev.

$\checkmark \ S_{n+1} = (1, x, x^2, x^3 \dots x^n)$ engendre-t-il $E = \mathbb{R}[X]$? $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ -ev Non :

... contre-exemple : $p(x) = x^{n+1} \in \mathbb{R}[x]$ ne peut pas s'écrire comme C.L. de vecteurs de S_{n+1} .

$\checkmark \ S_2 = (V_1 = (1, 0, 0); V_2 = (0, 1, 0))$ engendre-t-il $E = \mathbb{R}^3$? ... Non : $V = (0, 0, 1)$ ne peut pas s'écrire c. l. de vecteurs de S_2 .

✓ $S_3 = (V_1=(1,0,0); V_2=(0,1,0); V_3=(0,0,1))$ engendre-t-il $E=\mathbb{R}^3$? *Oui*

..... $V \in \mathbb{R}^3$: $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot V_1 + y \cdot V_2 + z \cdot V_3$; $x, y, z \in \mathbb{R}$

✓ $S_4 = (V_1=(1,0,0); V_2=(0,1,0); V_3=(0,0,1); V_4=(1,1,1))$ engendre-t-il $E=\mathbb{R}^3$? *Oui*

..... $V \in \mathbb{R}^3$ $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underset{\in \mathbb{R}}{x} \cdot V_1 + \underset{\in \mathbb{R}}{y} \cdot V_2 + \underset{\in \mathbb{R}}{z} \cdot V_3 + \underset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot V_4$

..... $= \underset{\in \mathbb{R}}{(x-1)} V_1 + \underset{\in \mathbb{R}}{(y-1)} V_2 + \underset{\in \mathbb{R}}{(z-1)} V_3 + \underset{\in \mathbb{R}}{1} \cdot V_4$

.....

.....

.....

.....

Définition Soit E un espace vectoriel.

On dit qu'un système de n vecteurs de E : $S_n = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ forme une base de E si et seulement si pour tout vecteur V de E , il existe n scalaires uniques $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de K tel que : $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$.

Exemples

✓ $S_2 = (V_1 = (1, 0, 0) ; V_2 = (0, 1, 0))$ forme-t-il une base de $E = \mathbb{R}^3$? ... Non

..... car S_2 n'engendre pas $\mathbb{R}^3$

✓ $S_4 = (V_1 = (1, 0, 0) ; V_2 = (0, 1, 0) ; V_3 = (0, 0, 1) ; V_4 = (1, 1, 1))$ forme-t-il une base de $E = \mathbb{R}^3$? Non

..... S_4 engendre $\mathbb{R}^3$ Mais $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xV_1 + yV_2 + zV_3 + 0 \cdot V_4$
..... $= (x-z)V_1 + (y-z)V_2 + (z-z)V_3 + 3 \cdot V_4$

..... La décomposition de V comme C.L. de vecteurs de S_4 n'est pas unique

✓ $S_3 = (V_1=(1,0,0); V_2=(0,1,0); V_3=(0,0,1))$ forme-t-il une base de $E=\mathbb{R}^3$?

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot V_1 + y \cdot V_2 + z \cdot V_3 \quad (x, y, z) \text{ est } \underline{\text{unique}}.$$

Si non $V = x' V_1 + y' V_2 + z' V_3 \quad (x', y', z') \in \mathbb{R}^3.$

$$0 = \underbrace{(x-x')}_{\beta_1} V_1 + \underbrace{(y-y')}_{\beta_2} V_2 + \underbrace{(z-z')}_{\beta_3} V_3.$$

Comme $\beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \beta_3 V_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{donc } S_3 \text{ est une} \\ \text{base de } \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

Conséquences importantes et dimension d'un espace vectoriel

- a) Un système de vecteurs de E est une base de E , si et seulement il est à la fois libre et générateur de E .
- b) Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs, on appelle ce nombre dimension de l'espace vectoriel E que l'on note : $\dim E$
- c) Soit $E=K^n$, tout système de n vecteurs libres de E forme une base de E , et $\dim E=n$.

Exemple

- ✓ $S_4 = (V_1=(1,1,1,1) ; V_2=(1,1,1,0) \text{ et } V_3=(1,1,0,0) ; V_4=(0,0,0,1))$ forme-t-il une base de $E=\mathbb{R}^4$?

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$. S_4 est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si S_4 est libre.

S_4 est libre si et seulement si $\det(V_1, V_2, V_3, V_4) \neq 0$.

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad S_4 \text{ est lié et ne forme pas une base de } \mathbb{R}^4$$

- ✓ Soient $E = \mathbb{R}^2$; $V_1 = (2, 3)$ et $V_2 = (3, 2)$. $B = (V_1, V_2)$ forme-t-il une base de E ?

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

$$\det(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

(V_1, V_2) est libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^2$.

- ✓ Soient $E = \mathbb{R}^3$; $V_1 = (1, -1, 0)$; $V_2 = (0, -1, 1)$ et $V_3 = (1, 1, 1)$. $B = (V_1, V_2, V_3)$ forme-t-il une base de E ?

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0.$$

(V_1, V_2, V_3) est libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Vocabulaire On appelle base canonique de K^n , le système de vecteurs suivant :
 $C = (e_1 = (1, 0, \dots, 0) ; e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) ; e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0) ; \dots ; e_n = (0, \dots, 0, 1))$

Page 21 du polycopié

$$\left. \begin{array}{l} E = \mathbb{R}^n \text{ } \mathbb{R}\text{-ev.} \\ E = \mathbb{C}^n \text{ } \mathbb{C}\text{-ev.} \end{array} \right\} \dim E = n. \quad C = (e_1, \dots, e_n)$$

$$\det(e_1, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (I_n) = 1 \neq 0.$$

C est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Définition Soit $B = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base de K^n , soit V un vecteur de E . Alors : il existe n uniques scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que : $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$,
 les scalaires α_i sont appelés les coordonnées de V dans la base B .

Nous noterons : $V_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Exemples

- ✓ Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur $V = (2, -2, 1)$ dans la base canonique.

$$e = (e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$V = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 - 2e_2 + 1e_3.$$

donc $V_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ✓ Soit $E = \mathbb{R}^3$; $V_1 = (1, -1, 0)$; $V_2 = (0, -1, 1)$ et $V_3 = (1, 1, 1)$. Déterminer dans la base $B = (V_1, V_2, V_3)$ les coordonnées du vecteur $V = (2, -2, 1)$. donc $V_B = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$: $V = \frac{5}{3}V_1 + \frac{2}{3}V_2 + \frac{1}{3}V_3$

$$\det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ donc } B \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

On cherche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 2 & \textcircled{1} \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -2 & \textcircled{2} \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 & \textcircled{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 - \alpha_3 & \textcircled{1} \\ \alpha_2 = 1 - \alpha_3 & \textcircled{3} \\ -2 + \alpha_3 - 1 + \alpha_3 + \alpha_3 = -2 & \textcircled{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_3 = 1/3; \alpha_1 = 5/3; \alpha_2 = 2/3$$

Remarque: $B = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $V \in \mathbb{R}^3$

$$V_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{V = x v_1 + y v_2 + z v_3} = x(e_1 - e_2) + y(-e_2 + e_3) + z(e_1 + e_2 + e_3)$$

$V_e = ??$ je cherche $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $V = x e_1 + y e_2 + z e_3$.

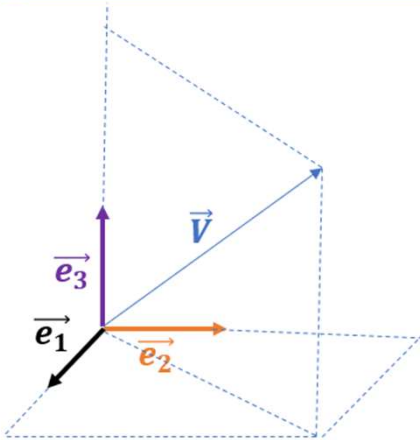
$$V = (x+z) \cdot e_1 + (-x-y+z) e_2 + (y+z) \cdot e_3$$

$$V_e = \begin{pmatrix} x+z \\ -x-y+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

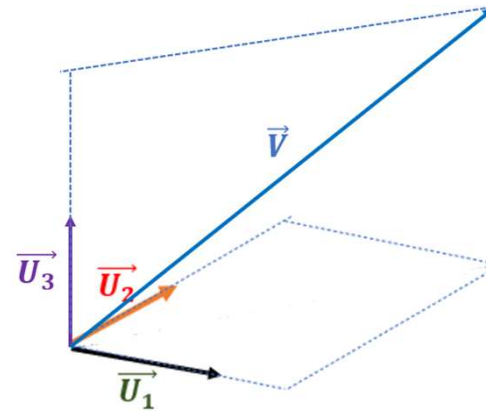
Peut la matrice de passage de B vers E .
 $\bar{P}' V_e = \bar{P}' P \times V_B \Leftrightarrow V_B = \bar{P}' V_e$ ⁴³

Changement de base en dimension 3

Base de départ : la base canonique $\mathcal{C}$



Base d'arrivée : $B = (U_1, U_2, U_3)$



?

$$\vec{V} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3 ; x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\vec{V}_e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

P est la matrice de passage de la base B vers la base $\mathcal{C}$:

$$\vec{V} = X.\vec{U}_1 + Y.\vec{U}_2 + Z.\vec{U}_3 ; X, Y, Z \in \mathbb{R}$$

$$\vec{V}_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\times P$

$$\vec{V} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3 ; x, y, z \in \mathbb{R}$$

$\times P^{-1}$

$$\vec{V} = X.\vec{U}_1 + Y.\vec{U}_2 + Z.\vec{U}_3 ; X, Y, Z \in \mathbb{R}$$

$$V_B = P^{-1} \cdot V_e$$

4) Base et dimension d'un sous espace vectoriel

Page 22 du polycopié

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et F un sous espace vectoriel de E . Alors F est aussi de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Exemple Soit $E = \mathbb{R}^3$. $F = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un sous espace vectoriel de E ,

déterminer une famille génératrice de F , puis en déduire sa dimension.

$$\begin{aligned} V \in F &\Leftrightarrow x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_3 - 3x_2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 3x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_2}; \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \\ (V_1, V_2) &\text{ engend. } F \text{ ou } F = \langle V_1, V_2 \rangle \text{ ou } F = \text{Vect}(V_1, V_2). \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(v_1, v_2) est libre ou lié ?

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \iff \begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

(v_1, v_2) est libre et générateur de F , c'est donc une base de F .

Alors $\dim F = 2 \leq \dim \mathbb{R}^3$.

5) Application à la résolution d'Equations Différentielles Linéaires à coefficients constants sans second membre

- ✓ Soit F, L'ensemble des solutions des EDLCC du premier ordre et sans second membre : $a.y'(x) + b.y(x) = 0$ avec $a \neq 0$. $\Leftrightarrow y_0(x) = \lambda \cdot e^{-\frac{b}{a}x}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. F est un sous espace vectoriel de E de dimension 1 dont une base est $\left(e^{-\frac{b}{a}x} \right)$

- ✓ Soit F, L'ensemble des solutions des EDLCC du second ordre et sans second membre : $a.y''(x) + b.y'(x) + c.y(x) = 0$ avec $a \neq 0$. $\Leftrightarrow ar_1^2 + br_1 + c = 0$.

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. F est un sous espace vectoriel de E de dimension 2 dont une base est :

$(e^{r_1x}; e^{r_2x})$ où r_1 et r_2 sont les racines réelles distinctes dans le cas $\Delta > 0$ $F = \left\{ \lambda_1 e^{r_1x} + \lambda_2 e^{r_2x} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$
 $(e^{r_1x}; xe^{r_1x})$ où r_1 est la racine réelle dans le cas $\Delta = 0$

$(e^{\alpha x} \cos(\beta x); e^{\alpha x} \sin(\beta x))$ où $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont les racines complexes dans le cas $\Delta < 0$

Exercice 2 :

- 1) Montrer que $V_1=(1,0,0)$ $V_2=(1,1,0)$ et $V_3=(1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
 - 2) Généraliser à $V_1=(a_1,0,0)$ $V_2=(b_1,b_2,0)$ et $V_3=(c_1,c_2,c_3)$ où $a_1b_2c_3 \neq 0$.
 - 3) Montrer que les vecteurs $V_1=(1,2i,-i)$ $V_2=(2,1+i,1)$ et $V_3=(-1,1,-i)$ forment une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$
- Calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $W=(1,2,0)$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, soit F , le sous espace défini par les équations $x + y + z = 2x + y - 3z = 0$.

- 1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en donner une base et sa dimension.
- 2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^4$, soit F , le sous espace vectoriel défini par les équations $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

- 1) Donner une base de F , puis en déduire dimension.
- 2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n .

- 1) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de E , et que $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ en est une base. Quelle est alors la dimension de E_n ?
- 2) Montrer que $Q=(x-1)(x-2)$, $R=(x-2)(x-3)$ et $S=(x-1)(x-3)$ forment une base de E_2 . Quelles sont les coordonnées de ax^2+bx+c dans cette base ?

Exercice 6 :

Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, en donner une base. Comparer $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Généraliser à $\mathbb{C}^n$.

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Soit $F_a = \langle V_1, V_2, W_a \rangle$ où $V_1 = (3, 0, 1, -1)$; $V_2 = (4, 2, 4, 3)$ et $W_a = (1, 2, 3, a)$. Déterminer la dimension de F_a et en donner une base suivant les valeurs de a .