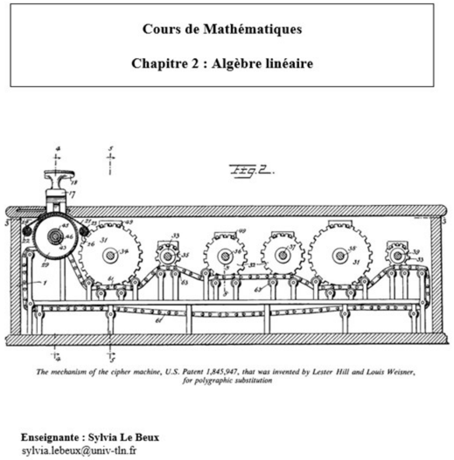
Poursuites d’études 9 : Les espaces vectoriels sur l’ensemble des réels (ou des complexes) – Partie 3/3

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !
- Travaillez à votre rythme ! N’hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…
- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.
- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d’amélioration, n’hésitez pas à me contacter !

- <u>Programme de la séance</u> :

  - Résolution des exercices sur les systèmes de vecteurs libres, générateurs et les bases. Dimension d’un (sous-) espace vectoriel.

Page 40 du polycopié

Exercice 2 :

1) Montrer que $V_1=(1,0,0)$ $V_2=(1,1,0)$ et $V_3=(1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Généraliser à $V_1=(a_1,0,0)$ $V_2=(b_1,b_2,0)$ et $V_3=(c_1,c_2,c_3)$ où $a_1b_2c_3 \neq 0$.
3) Montrer que les vecteurs $V_1=(1,2i,-i)$ $V_2=(2,1+i,1)$ et $V_3=(-1,1,-i)$ forment une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$
Calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $W=(1,2,0)$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, soit F, le sous espace défini par les équations $x + y + z = 2x + y - 3z = 0$.
1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en donner une base et sa dimension.
2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^4$, soit F, le sous espace vectoriel défini par les équations $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.
1) Donner une base de F, puis en déduire dimension.
2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 :

1) Montrer que $V_1=(1,0,0)$ $V_2=(1,1,0)$ et $V_3=(1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Généraliser à $V_1=(a_1,0,0)$ $V_2=(b_1,b_2,0)$ et $V_3=(c_1,c_2,c_3)$ où $a_1b_2c_3 \neq 0$.
3) Montrer que les vecteurs $V_1=(1,2i,-i)$ $V_2=(2,1+i,1)$ et $V_3=(-1,1,-i)$ forment une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$
Calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $W=(1,2,0)$.

① $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Les trois vecteurs V_1, V_2, V_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si ils sont libres. $\det(V_1,V_2,V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. (V_1,V_2,V_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$

② $\det(V_1,V_2,V_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 \neq 0$ par hypothèse donc " " "

③ $\mathbb{C}^3$ est un $\mathbb{C}$-ev. $\dim \mathbb{C}^3 = 3$.

$$\det(V_1,V_2,V_3) = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 2i & 1+i & 1 \\ -i & 1 & -i \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1-3i & 1+2i \\ 0 & 1+2i & -2i \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + iL_1 \end{matrix} = (1-3i)(-2i) - (1+2i)^2$$

$$= -2i - 6 - 1 - 4i + 4 = -3 - 6i \neq 0$$

(V_1,V_2,V_3) est donc une base de $\mathbb{C}^3$.

Coordonnés de $W=(1,2,0)$ dans $\mathcal{B}$:

On résout : $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = W$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}\,\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1 & L_1 \\ 2i\,\alpha_1 + (1+i)\alpha_2 + \alpha_3 = 2 & L_2 \\ -i\,\alpha_1 + \alpha_2 - i\,\alpha_3 = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1 & L_1 \\ (1-3i)\,\alpha_2 + (1+2i)\alpha_3 = 2-2i & L_2 \leftarrow L_2 - 2iL_1 \\ (1+2i)\alpha_2 - 2i\,\alpha_3 = i & L_3 \leftarrow L_3 + iL_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1 & L_1 \\ \boxed{(1-3i)}\,\alpha_2 + (1+2i)\alpha_3 = 2-2i & L_2 \\ \left(-2i - \dfrac{(1+2i)^2}{1-3i}\right)\alpha_3 = i - \dfrac{(2-2i)(1+2i)}{1-3i} & L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{1+2i}{1-3i} L_2 . \end{cases}$$

$$\frac{-2i-6-1-4i+4}{1-3i}\,\alpha_3 = \frac{i+3-6-2i}{1-3i} \iff \alpha_3 = \frac{-3-i}{-3-6i} \times \frac{-3+6i}{-3+6i} = \frac{15-15i}{45} = \frac{1-i}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = \dfrac{1-i}{3} \\ \alpha_2 = \left(2-2i - \dfrac{(1+2i)(1-i)}{3}\right) \times \dfrac{1}{1-3i} = \dfrac{3-7i}{3(1-3i)} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{3-7i}{1-3i} \times \dfrac{1+3i}{1+3i} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{24+2i}{10} \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{15}(12+i) \\ \alpha_1 = 1 - \dfrac{1}{15}(12+i) + \dfrac{1}{3}(1-i) = \dfrac{15-12-i+5-5i}{15} = \dfrac{8-6i}{15}. \end{cases}$$

Donc $\quad W_B = \begin{pmatrix} \dfrac{8-6i}{15} \\ \dfrac{24+2i}{30} \\ \dfrac{1-i}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 16-12i \\ 24+2i \\ 10-10i \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, soit F, le sous espace défini par les équations $x + y + z = 2x + y - 3z = 0$.
1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en donner une base et sa dimension.
2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

① • $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z = 2x+y-3z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

• $0 \in F$

• $\forall \; V, V' \in F \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad V + \lambda V' = \begin{pmatrix} x+\lambda x' \\ y+\lambda y' \\ z+\lambda z' \end{pmatrix}$

Alors $\quad x+\lambda x' + y + \lambda y' + z + \lambda z' = \underbrace{x+y+z}_{=0 \text{ car } V \in F} + \lambda(\underbrace{x'+y'+z'}_{=0 \text{ car } V' \in F}) = 0$

et

$2(x+\lambda x') + y + \lambda y' - 3(z+\lambda z') = \underbrace{2x+y-3z}_{=0 \text{ car } V \in F} + \lambda(\underbrace{2x'+y'-3z'}_{=0 \text{ car } V' \in F}) = 0$

et $V + \lambda V' \in F$

F est donc un sev de $\mathbb{R}^3$.

Recherche d'une base de F :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y-z \iff x = 4z \\ -2y-2z+y-3z=0 \iff -y-5z=0 \iff y=-5z \end{cases}$$

$$V \in F \iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z \\ -5z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R}.$$

Donc $F = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } F} \Big\rangle$ et $\dim F = 1$.

② Pour compléter la base de F (V_1) en base de $\mathbb{R}^3$, il suffit d'y ajouter deux vecteurs (V_2, V_3) tels que $\det(V_1, V_2, V_3) \neq 0$. Par exple : $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^4$, soit F, le sous espace vectoriel défini par les équations $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

1) Donner une base de F, puis en déduire dimension.

2) La compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

① $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 \\ -2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$\iff -3x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$\iff x_4 = 3x_2 + x_3.$

$\iff V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{V_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_2}$

(V_1, V_2) engendre F. Est-il libre ? $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \iff \begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

(V_1, V_2) est donc une base de F et $\dim F = 2$.

② Base de $\mathbb{R}^4$ par exemple est : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ car $\begin{cases} \det(V_1, V_2, V_3, V_4) \neq 0 \\ \text{et } \dim \mathbb{R}^4 = 4. \end{cases}$

Exercice 5 :

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n.

1) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de E, et que $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ en est une base. Quelle est alors la dimension de E_n ?
2) Montrer que $Q=(x-1)(x-2)$, $R=(x-2)(x-3)$ et $S=(x-1)(x-3)$ forment une base de E_2. Quelles sont les coordonnées de ax^2+bx+c dans cette base ?

Exercice 6 :

Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, en donner une base. Comparer $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Généraliser à $\mathbb{C}^n$.

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Soit $F_a=\langle V_1, V_2, W_a\rangle$ où $V_1=(3,0,1,-1)$; $V_2=(4, 2, 4, 3)$ et $W_a=(1, 2,3, a)$. Déterminer la dimension de F_a et en donner une base suivant les valeurs de a.

Exercice 5 :

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n.

1) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de E, et que $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ en est une base. Quelle est alors la dimension de E_n ?

2) Montrer que $Q=(x-1)(x-2)$, $R=(x-2)(x-3)$ et $S=(x-1)(x-3)$ forment une base de E_2. Quelles sont les coordonnées de ax^2+bx+c dans cette base ?

① * • $E_n = \{ p \in \mathbb{R}[x] \ / \deg p \leq n \} \subseteq E$. E est un $\mathbb{R}$-ev.

• $0 \in E_n$

• $\forall p_1, p_2 \in E_n ; \lambda \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \deg(p_1 + \lambda p_2) \leq n & \text{donc } p_1 + \lambda p_2 \in E_n. \\ p_1 + \lambda p_2 \in \mathbb{R}[x] \end{cases}$

E_n est un sev de E.

* Soit $p \in E_n$, alors $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_0 \times 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$; $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in [\![0,n]\!]$

Donc $p \in \operatorname{Vect}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$

et $\forall p \in \operatorname{Vect}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$, $\exists (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \ / \ p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \Rightarrow p \in E_n$.

$E_n = \operatorname{Vect}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$

$(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est-il un système libre de E_n ?

Si $\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Alors pour $X=0$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(\alpha_1 + \alpha_2 X + \dots + \alpha_n X^{n-1}) = 0$

Alors $\alpha_1 + \alpha_2 X + \dots + \alpha_n X^{n-1} = 0$ et en posant $X=0$, $\alpha_1 = 0$.

On démontre ainsi de proche en proche que : $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

$(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.

2 * $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ d'après 1.

Soit $Q = (X-1)(X-2)$, $R = (X-2)(X-3)$ et $S = (X-1)(X-3)$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si ils sont libres.

$\alpha_1 Q + \alpha_2 R + \alpha_3 S \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_1(x-1)(x-2) + \alpha_2(x-2)(x-3) + \alpha_3(x-1)(x-3) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

En particulier pour $x=1$: $2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$ et pour $x=3$: $2\alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$

pour $x=2$: $-\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = 0$

$\alpha_1 Q + \alpha_2 R + \alpha_3 S \equiv 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

(Q, R, S) est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

* Coordonnés de $P(X) = aX^2 + bX + c$ dans la base (Q, R, S):

On résout : $P = \alpha_1 Q + \alpha_2 R + \alpha_3 S$

$$\iff aX^2 + bX + c = \alpha_1 (X-1)(X-2) + \alpha_2 (X-2)(X-3) + \alpha_3 (X-1)(X-3) \quad \forall X \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } X=1: & a+b+c = 2\alpha_2 \\ \text{pour } X=2: & 4a+2b+c = -\alpha_3 \\ \text{pour } X=3: & 9a+3b+c = 2\alpha_1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha_2 = \dfrac{a+b+c}{2} \\ \alpha_3 = -(4a+2b+c) \\ \alpha_1 = \dfrac{9a+3b+c}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi les coordonnés de P dans la base $\mathcal{B}(Q, R, S)$ sont donc:

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{9a+3b+c}{2} \\ \dfrac{a+b+c}{2} \\ -(4a+2b+c) \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, en donner une base. Comparer $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Généraliser à $\mathbb{C}^n$.

* $\mathbb{C}^n$ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel car il est muni de :

une LCI : $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $(V, W) \longmapsto V+W$ et d'une LCE : $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $(V, \lambda) \longmapsto \lambda V$.

qui vérifient les propriétés (voir vidéos).

* Soit $V \in \mathbb{C}^n$: $V = \begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ a_2+ib_2 \\ \vdots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix}$; $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$$V = a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1} + a_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2} + \dots + a_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_n} + b_1 \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_{n+1}} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + b_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \end{pmatrix}}_{V_{2n}}$$

$\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_{2n})$

$(V_1, V_2, \ldots, V_{2n})$ est libre car :

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_{2n} V_{2n} = 0 \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{2n} = 0 \end{cases}$$

$\alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in [\![1, 2n]\!]$

$(V_1, V_2, \ldots, V_{2n})$ est donc une base du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}^n$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

* $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-ev.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^n$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$.

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Soit $F_a=<V_1, V_2, W_a>$ où $V_1=(3,0,1,-1)$; $V_2=(4, 2, 4, 3)$ et $W_a=(1, 2,3, a)$.
Déterminer la dimension de F_a et en donner une base suivant les valeurs de a.

$F_a \subseteq \mathbb{R}^4$ donc $\dim F_a \leq 4$.

F_a est engendré par V_1, V_2, W_a.

(V_1, V_2, W_a) est libre lorsque :

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 W_a = 0 \iff \begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ 0 = 0 \quad \text{ok.} \\ (-4+a)\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

1er Cas : $a-4=0$ Alors : $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \alpha_3$ et $\alpha_2 = -\alpha_3$

Par exemple si $\alpha_3 = 1$ on a : $V_1 - V_2 + W_a = 0$ et (V_1, V_2, W_a) est lié ainsi $\dim F \leq 2$.

(V_1, V_2) est-il libre ? oui car :

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \iff \begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ \quad 2\alpha_2 = 0 \iff \alpha_2 = 0 = \alpha_1. \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Alors (V_1, V_2) est une base de F et $\dim F = 2$.

<u>2e Cas</u> : $a \neq 4$ Alors $\alpha_3 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ et $\alpha_2 = -\alpha_3 = 0$

(V_1, V_2, W_a) est donc une base de F et $\dim F = 3$.