ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve «obligatoire de mathématiques» de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

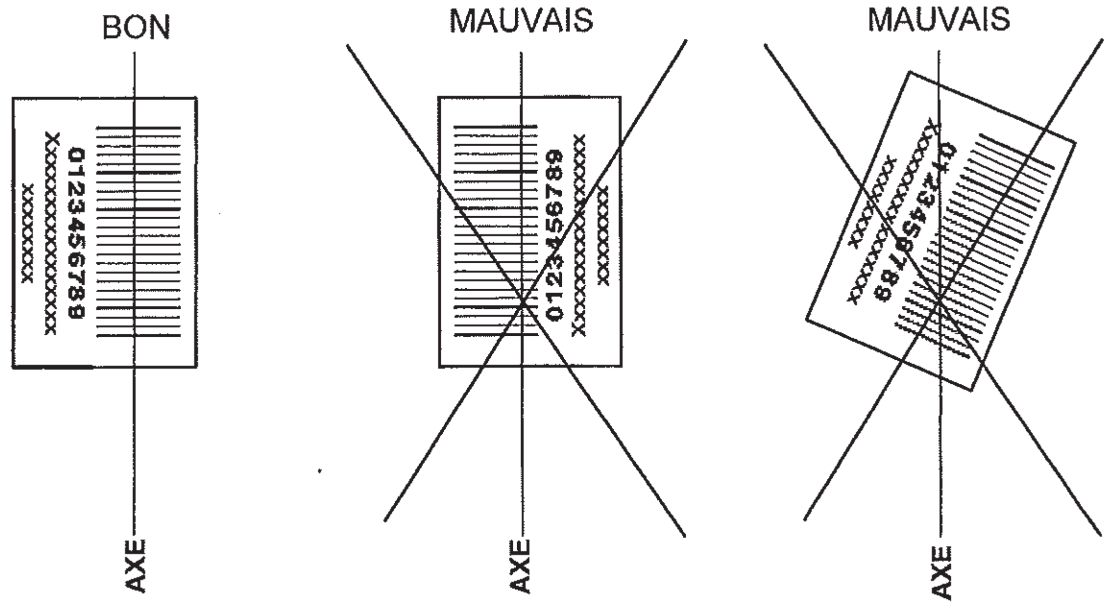
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE et **ATTENTION** vous devez noircir complètement la case en vue de la bonne lecture optique de votre QCM.

3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les brouillons qui vous sont fournis à la demande par le surveillant qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page SVP

NOTATION DES QUESTIONS

5) Cette épreuve comporte 20 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée au début du texte du sujet.
Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 20, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 21 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 20, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

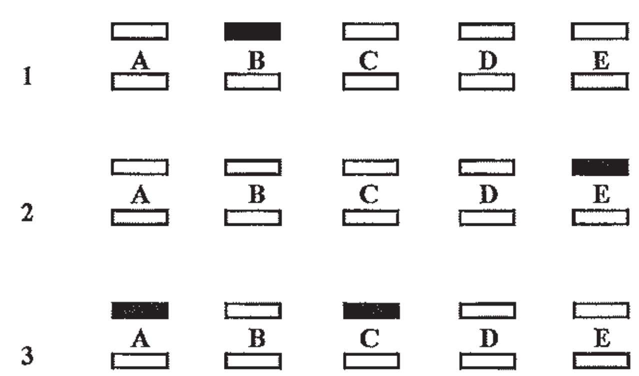
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Notations

Les lettres R, C, N et Z désignent respectivement les ensembles des réels, des complexes, des entiers naturels et des entiers relatifs.

Le symbole i représente le nombre complexe défini par $i^2 = -1$.

Partie I

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{(x^2+2)(x-1)}$

Question 1

a) L'ensemble de définition de f est $Df =]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2};0[\cup]0;1[\cup]1;\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$ car les fonctions $x^3 - 2x$ et $(x^2+2)(x-1)$ ne s'annulent pas sur ces intervalles

b) L'ensemble de définition de f est $Df =]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2};1[\cup]1;\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$ car la fonction $(x^2+2)(x-1)$ ne s'annule pas sur ces intervalles

c) L'ensemble de définition de f est $Df =]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2};0[\cup]0;\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$ car la fonction $x^3 - 2x$ ne s'annule pas sur ces intervalles

d) L'ensemble de définition de f est $Df =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ car la fonction $(x^2+2)(x-1)$ ne s'annule pas sur ces intervalles

Question 2

La fonction f a pour limites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

Question 3

La dérivée de $f(x)$ pour $x \in Df$ s'écrit

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{3x^2 - 2x + 2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{x^2+2} + \dfrac{16(x+1)}{(x^2+2)^2}\right)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{x^2+2} - \dfrac{8x^2 - 16x}{(x^2+2)^2}\right)$

d) $f'(x) = \dfrac{-x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 4}{(x^2+2)^2(x-1)^2}$

Tournez la page S.V.P.

Question 4

La courbe représentative de $f(x)$ admet

a) Une tangente d'équation $y = x$ au point d'abscisse $x=0$
b) Une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$
c) Une asymptote verticale au voisinage de 0
d) Une asymptote en $x = \sqrt{2}$

Question 5

La décomposition en éléments simples dans R de la fonction f est :

a) $f(x) = -\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}}{x^2+2}$

b) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{4x+8}{x^2+2}\right)$

c) $f(x) = -\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{x-\sqrt{2}} + \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{x+\sqrt{2}}$

d) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{x-\sqrt{2}} - \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{x+\sqrt{2}}$

Question 6

La décomposition en éléments simples dans C de la fonction f est :

a) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{x-\sqrt{2}} - \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{x+\sqrt{2}}$

b) $f(x) = \dfrac{-\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\sqrt{2}}{x+i\sqrt{2}} - \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\sqrt{2}}{x-i\sqrt{2}}$

c) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2(1-i\sqrt{2})}{x+i\sqrt{2}} - \dfrac{2(1+i\sqrt{2})}{x-i\sqrt{2}}\right)$

d) $f(x) = -\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2(1+i\sqrt{2})}{x-i\sqrt{2}} + \dfrac{2(1-i\sqrt{2})}{x+i\sqrt{2}}$

Question 7

Une primitive F de la fonction f est donnée par :

a) $F(x) = x + \dfrac{3}{(x-1)^2} - \dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{(x-\sqrt{2})^2} + \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{(x+\sqrt{2})^2} + K$, avec K réel

b) $F(x) = x - \dfrac{1}{3}\ln|x-1| + \dfrac{2}{3}\ln(x^2+2) - \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + K$, avec K réel

L'intégrale $I = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt$ vaut alors

c) $I = 1 + \ln(2) - \dfrac{2}{3}\ln(3) + \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $I = \dfrac{13}{4}$

Partie II

Dans cette partie, on notera u(t) l'échelon unité (ou échelon de Heavyside)
On notera L la transformation de Laplace, $S_1(p) = L(s_1(t))$ et $S_2(p) = L(s_2(t))$
On considère l'équation différentielle du 2$^{\text{ème}}$ ordre $y''-2y'+5y=0$ (E)

Question 8

L'équation caractéristique de (E) est

a) $r^2 - 2r + 5 = 0$

b) $r^2 + 2r - 5 = 0$

Les solutions de (E) sont de la forme

c) $y(t) = e^{-t}\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right)$, avec A et B réels

d) $y(t) = Ae^{\left(-1+\sqrt{6}\right)t} + Be^{\left(-1-\sqrt{6}\right)t}$, avec A et B réels

Question 9

On considère le système différentiel suivant

$$(I) \quad \begin{cases} 2s_1(t) - 5s_2(t) = s_1'(t) \\ s_1(t) = s_2'(t) \end{cases} \qquad \text{avec } s_1(0) = 2 \text{ et } s_2(0) = 0$$

En appliquant la transformation de Laplace à ce système, on obtient

a) $\begin{cases} 2pS_1(p) - 5pS_2(p) = S_1(p) \\ pS_1(p) = S_2(p) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2S_1(p) - 5S_2(p) = S_1'(p) \\ S_1(p) = S_2'(p) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (p-2)S_1(p) + 5S_2(p) = 2 \\ S_1(p) - pS_2(p) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (p+2)S_1(p) - 5S_2(p) = 0 \\ S_1(p) - pS_2(p) = 2 \end{cases}$

Question 10

La résolution de ce système donne

a) $S_1(p) = \dfrac{p}{p^2 - 2p + 5}$

b) $S_1(p) = \dfrac{i}{4}\left(\dfrac{p}{p-1+2i} - \dfrac{p}{p-1-2i}\right)$

c) $S_2(p) = \dfrac{2}{p^2 - 2p + 5}$

d) $S_2(p) = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{p-1+2i} - \dfrac{1}{p-1-2i}\right)$

Question 11

Les solutions du système différentiel sont alors données par

a) $s_1(t) = 2\mathrm{e}^t \cos(2t)u(t)$

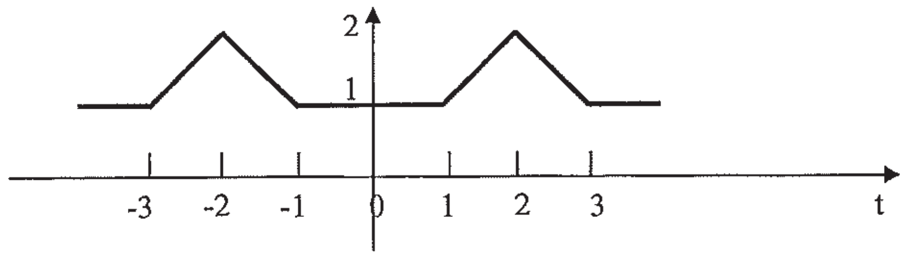
b) $s_1(t) = \mathrm{e}^t \cos(2t)u(t)$

c) $s_2(t) = \mathrm{e}^t \sin(2t)u(t)$

d) $s_2(t) = 2\mathrm{e}^t \sin(2t)u(t)$

Partie III

On considère la fonction s(t) suivante, périodique de période $T = 4$:



On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Question 12

La fonction s(t) est définie par

a) $\begin{cases} s(t) = 1 & \text{si } t \in [0;1] \\ s(t) = t & \text{si } t \in [1;2] \end{cases}$ et s(t) est paire

b) $\begin{cases} s(t) = 1 & \text{si } t \in [-1;0] \\ s(t) = t & \text{si } t \in [-2;-1] \end{cases}$ et s(t) est paire

c) $\begin{cases} s(t) = 1 & \text{si } t \in [-1;0] \\ s(t) = -t & \text{si } t \in [-2;-1] \end{cases}$ et s(t) est impaire

d) $\begin{cases} s(t) = -t & \text{si } t \in [-2;-1] \\ s(t) = 1 & \text{si } t \in [-1;1] \\ s(t) = t & \text{si } t \in [1;2] \end{cases}$

Question 13

Dans le développement en série de Fourier de s(t), les coefficients de Fourier sont donnés par

a) $a_n = 0$ pour $n \in N^*$ car s(t) est paire

b) $a_0 = \dfrac{5}{4}$

c) $a_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 s(t)\cos(n\omega t)\,dt$ pour $n \in N^*$

d) $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$ pour $n \in N^*$

Tournez la page S.V.P.

Question 14

La décomposition en série de Fourier de s(t) s'écrit

a) $s(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\cos(\frac{n\pi t}{2})$

b) $s(t)=\frac{5}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\cos(n\omega t)$

c) $s(t)=\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\cos(\frac{n\pi t}{2})$

d) $s(t)=\frac{5}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(\frac{n\pi t}{2})$

Question 15

Les valeurs moyenne m et efficace E de la fonction s sont

a) $m=\sqrt{\frac{5}{4}}$ et $E=\sqrt{\frac{5}{3}}$

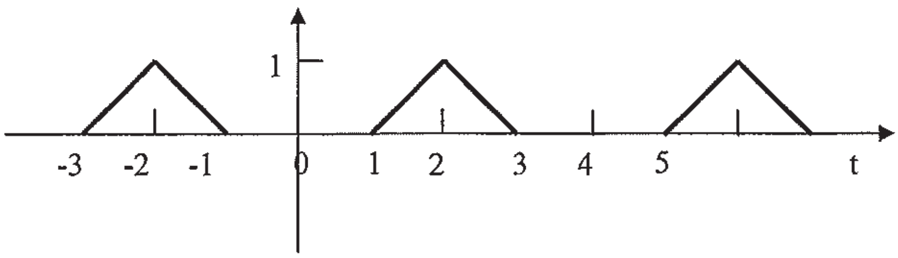
b) $m=\sqrt{\frac{5}{4}}$ et $E=\frac{5}{3}$

c) $m=\frac{5}{4}$ et $E=\sqrt{\frac{5}{3}}$

d) $m=\frac{5}{4}$ et $E=\frac{5}{3}$

Question 16

On considère la fonction $s_1(t)$ périodique de période 4 suivante :



La fonction $s_1(t)$ peut s'écrire

a) $s_1(t)=s(t+1)$

b) $s_1(t)=s(t)+1$

c) $s_1(t)=s(t-1)$

d) $s_1(t)=s(t)-1$

Question 17

La décomposition en série de Fourier de $s_1(t)$ s'écrit

a) $s_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} \cos(\frac{n\pi t}{2})$

b) $s_1(t) = \frac{9}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)}{n^2} \cos(\frac{n\pi t}{2})$

Les coefficients de Fourier sont donnés par

c) $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right)$ pour $n \in N^*$

d) $b_n = 0$ pour $n \in N^*$

Question 18

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi) - \cos(n\omega)}{n^2}$

a) Converge car son terme général tend vers 0

b) Converge car son terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$

c) Converge car c'est une série à termes positifs

d) Converge vers $\frac{3\pi^2}{T^2}$

Partie IV

Question 19

On considère le système linéaire (S):

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$$

Ce système s'écrit de façon matricielle $AX = B$, avec :

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Question 20

L'inverse A^{-1} de la matrice A :

a) vaut $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) vaut $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) vaut $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) vaut $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis