

I-2 -  $\Gamma \neq A$   $z \neq 1$

2-a) 
$$z = \frac{iz + 1 - i - 1}{z - 1} = \frac{(iz - i)(\overline{z - 1})}{(z - 1)(\overline{z - 1})}$$

$$= \frac{i(z - 1)(\overline{z - 1})}{(z - 1)(\overline{z - 1})}$$

$$z = i$$

I-2/b)  $|z| = 1$  et  $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

2-c)  $AN' = |z' - 1|$  et  $AN = |z - 1|$

$$|z| = \left| \frac{z' - 1}{z - 1} \right| = \frac{|z' - 1|}{|z - 1|} = \frac{AN'}{AN} = 1 \Leftrightarrow AN' = AN$$

$$(\vec{AN}, \vec{AN}') = \arg\left(\frac{z' - 1}{z - 1}\right) = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

2-d)  $F: \Gamma(z) \mapsto \Gamma'(z')$

$$\begin{cases} AN' = AN \\ (\vec{AN}, \vec{AN}') = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

F est la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

$z_{A'} = z_A$  (presque le centre d'une rotation et invariant)

$z_{B'} = 3+2i$  (voir figure)

$$(i(3-2i)+1-i = 2i+3)$$

$$I-4) \quad z_{C'} = -3-3i \Rightarrow z_C = -3+4i$$

$$z'_C = i z_C + 1 - i$$

$$i z_C = -3 - 3i - 1 + i$$

$$z_C = \frac{-4-2i}{i} \times \frac{(-i)}{(-i)} = -2+4i$$

$$I-5a) \quad z_I = \frac{z_{B'} + z_{C'}}{2} = \frac{3-2i + 3-3i}{2} = -\frac{5i}{2}$$

$[AI]$  est la médiane de  $ABC'$  issue de  $A$

$$5b) \quad \vec{AI} = z_I - z_A = -\frac{5i}{2} - 1$$

$$\vec{CB'} = z_{B'} - z_C = 3+2i + 2-4i = 5-2i$$

5c)  $(AI) \perp (CB')$  car

$$(\vec{AI}, \vec{CB'}) = \arg\left(\frac{z_{CB'}}{z_{AI}}\right) = \arg\left(\frac{5-2i}{-\frac{5i}{2}-1}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{10-4i}{-2-5i} \times \frac{-2+5i}{-2+5i}\right) = \arg\left(\frac{59i}{29}\right)$$

$$(\vec{AI}, \vec{CB'}) = \frac{\pi}{2}$$

5-d)  $\mathcal{D}$  est donc la hauteur de  $ABC'$  issue de  $A$ .  
"  $(AI)$

I-6)  $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D} = \{A\} \Leftrightarrow \mathcal{D}' = F(A, \mathcal{D})$   
 $\mathcal{D}'$  est la droite orthogonale à  $\mathcal{D}$  passant par  $A$ .

Exercice II.  $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$

1.a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty$   
 $f(x) = e^{2x} \underbrace{\left( 1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x} \right)}_{g(x)}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

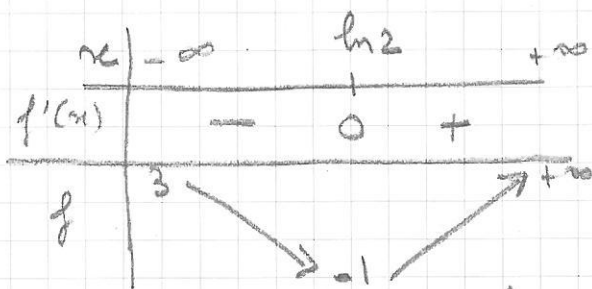
1.b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

1.c)  $D = y = 3$

2.a)  $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$

2.b)  $f'(x) = \underbrace{2e^x}_{g(x)} (e^x - 2)$

2.c)  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 2 \geq 0$  car  $g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\Leftrightarrow e^x \geq 2$   
 $\Leftrightarrow x \geq \ln 2$



$$f(\ln 2) = e^{2 \ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3$$

$$= e^{\ln 4} - 8 + 3$$

$$= 4 - 8 + 3$$

$$f(\ln 2) = -1$$

2.d)  $x_0 = \ln 2$  et  $y_0 = -1$

II-3)  $C = C_1$  car  $\pi(\ln 2; -1)$  est le minimum de  $C_1$  (mais pas de  $C_2$ )

De plus  $\ln 2 < 1$ .

II-4)  $T_0: y = f(0) + x f'(0)$

$$f(0) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$f'(0) = 2 - 4 = -2$$

) Donc  $T_0: y = -2x$

II-5)  $C \cap \Delta = \{E\}$

on résout  $e^{2x} - 4e^x + 3 = 3$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x(e^x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 0 \text{ ou } e^x = 4$$

$$\Leftrightarrow \text{impossible ou } x = \ln 4$$

donc  $E(\ln 4; 3)$

II.6.a)  $J = \int_0^{\ln 4} (3 - f(x)) dx$

$$= \int_0^{\ln 4} (-e^{2x} + 4e^x) dx$$

$$= \left[ -\frac{e^{2x}}{2} + 4e^x \right]_0^{\ln 4}$$

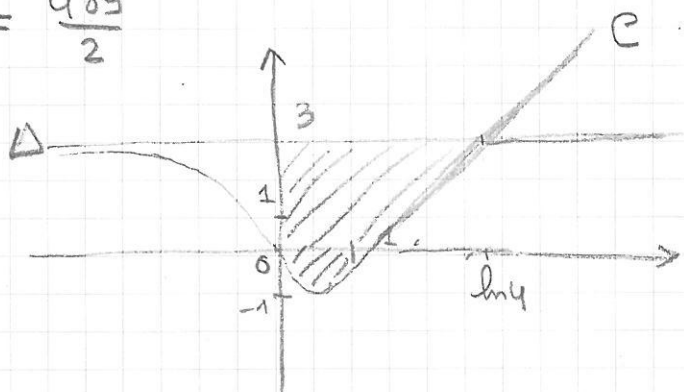
$$= -\frac{e^{2 \ln 4}}{2} + 4e^{\ln 4} + \frac{1}{2} - 4$$

$$= -\frac{e^{\ln 16}}{2} + 16 = \frac{7}{2}$$

$$= -\frac{16}{2} + 16 = \frac{7}{2}$$

$$= -\frac{23}{2} + \frac{512}{2}$$

$$J = \frac{489}{2}$$



Exercice III.

$$\text{III.1.d)} \quad p = P(T \leq 1) = 1 - e^{-1/3}$$

$$1.b) \quad P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-1/3 t}) = e^{-1/3 t}$$

$$\text{III.2) } \frac{a)}{P(A)} = P(T > 1) = e^{-1/3}$$

$$P(B) = P(T > 3) = e^{-1}$$

$$2.b) \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$(A \cap B) = (T > 1) \cap (T > 3) = (T > 3) = B$$

$$\text{donc } P_A(B) = \frac{e^{-1}}{e^{-1/3}} = e^{-1+1/3} = e^{-2/3}$$

III.3)

$$3.a) \quad P(T \leq 1) = 1 - e^{-1/3} \approx 0,2835$$

28,35% poupées seront remboursées.

$$3.b) \quad P(T \leq t) \leq \frac{8}{100}$$

$$1 - e^{-1/3 t} \leq \frac{8}{100}$$

$$-e^{-1/3 t} \leq \frac{8}{100} - 1 = -\frac{92}{100}$$

$$e^{-1/3 t} \geq \frac{92}{100}$$

$$-\frac{1}{3} t \geq \ln\left(\frac{92}{100}\right)$$

$$t \leq -3 \ln\left(\frac{92}{100}\right) \approx 0,2501.$$

$t_0 = 3$  mois. (soit le 1/4 d'une année)

III.4)

u.a.  $X =$  n<sup>o</sup>me de poupées remboursées sur 3.

$$P(X=3) = p^3 = (1 - e^{-1/3})^3$$

$$u.b. \quad P(X=1) = C_3^1 p(1-p)^2 = C_3^1 (1 - e^{-1/3}) (e^{-1/3})^2 = 3(1 - e^{-1/3}) e^{-2/3}$$

$$\frac{3!}{2!1!} = 3$$

4-c

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$C_3^0 (1-p)^3$	$C_3^1 p^1 (1-p)^2$	$C_3^2 p^2 (1-p)$	$C_3^3 p^3$
	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	$p^3$

3!

$$4-d) E(x) = 0x(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 6p^2(1-p) + 3p^3$$

$$= 3p(1-2p+p^2) + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$$

$$= 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$$

$$E(x) = 3p$$



Intercalaire N°.....

Nom :.....

Prénom:.....

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ex IV (1)

Exercice IV

IV.1.a.

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \times (-1) + 1 \times (2) + (-2) \times (-1) \\ = -4 + 2 + 2 = 0$$

Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{m}_1$  sont donc orthogonaux.

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 1 + 1 \times 2 + (-2) \times 3 \\ = 4 + 2 - 6 = 0$$

idem.

Le vecteur  $\vec{m}_1$  est donc un vecteur normal au plan perpendiculaire plan(ABC)

1.b) Soit  $\pi \in (ABC)$ , soit  $\pi(x, y, z)$

$\vec{AP} \perp \vec{m}_1$  d'après 1.a)

$$\Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{m}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) + y - 2(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + y - 2z - 6 = 0 \text{ c'est l'équation}$$

du plan (ABC).

IV-2  $P: x - 2y + z = 0$ .

2.a)  $\vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan P.

$$2-b) \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times 1 \\ = 4 - 2 - 2 = 0$$

$\vec{m}_1$  et  $\vec{m}_2$  sont perpendiculaires, et ce sont les vecteurs normaux respectivement aux plans (ABC) et P

Donc le plan (ABC) et P sont perpendiculaires.

2.c)  $A(1, 0, -1)$   $P: x - 2y + z = 0$   
 $1 - 0 - 1 = 0$  Donc  $A \in P$

$B(0, 2, -2)$   $0 - 4 - 2 \neq 0$  Donc  $B \notin P$ .

$$C(2, 2, 2) \quad 2 - 4 + 2 = 0 \quad \text{donc } C \in P. \quad \underline{\text{Ex IV (2)}}$$

$$2-d) \quad D_1 = (AC) \\ \vec{U} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ par exemple.}$$

IV-3).

$$N \in D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 1 + \alpha \\ y_N = \alpha \\ z_N = 2 - \alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$N \in P \Leftrightarrow x_N - 2y_N + z_N = 0$$

$$1 + \alpha - 2\alpha + 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_N = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ y_N = \frac{3}{2} \\ z_N = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } N = \left( \frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

IV-4  $K(3, 2, 0) \in \mathcal{D}_2$  ssi il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel

$$\text{que : } \begin{cases} 3 = 1 + \alpha \\ 2 = \alpha \\ 0 = 2 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

donc  $K \in \mathcal{D}_2$ .

IV-5.a  $\vec{KL}$  est normal à  $P$  ssi  $\vec{KL}$  est colinéaire à  $\vec{m}_2$  (vecteur normal à  $P$ )

$$\vec{KL} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} (1/3)(-2) - 1 \times (-2/3) &= 0 \\ (-2/3)(1) - 1/3 \times (-2) &= 0 \\ (1/3)(1) - 1/3 \times 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ OK}$$

Donc  $\vec{KL}$  est normal à  $P$ .

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires ssi  $\vec{u}' = k\vec{u}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ yz' - y'z = 0 \\ zx' - z'x = 0 \end{cases}$$





