UTLN Master Maths 1. 2022-23.

Corrigé CT M72 06/01/2023.

Question de Cours B.3).

Si supp $\varphi \subset [-N, N]$, on a $\langle H(\cdot - n), \varphi \rangle = \int_n^\infty \varphi(x)\,dx = \int_n^N \varphi(x)\,dx$

donc $\langle H(\cdot - n), \varphi \rangle = 0$ si $n \geq N$

or pour $0 \leq n \leq N$, $|\langle H(\cdot - n), \varphi \rangle| \leq \int_0^N \varphi(x)\,dx \leq N \sup|\varphi|$.

On en déduit que $\left|\langle \sum_n H(\cdot - n), \varphi \rangle\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \langle H(\cdot - n), \varphi \rangle\right| \leq N^2 \sup|\varphi|$

donc $\sum_n H(\cdot - n)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (ou même dans $\mathcal{M}_+(\mathbb{R})$ mesures positives)

Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on peut dériver terme à terme, et comme $H'(x-n) = \delta_n$ (Dirac au point n) on a $\left(\sum_{n\geq 0} H(x-n)\right)' = \sum_{n \geq 0} \delta_n$

Rem : on peut remplacer $\sum_{n \in \mathbb{N}} H(x-n)$ par $\sum_{n \in \mathbb{Z}} H(x-n)$, résultat analogue

De même $\langle (x-n)_+, \varphi \rangle = \int_n^\infty (x-n)\varphi(x)\,dx = \int_n^N (x-n)\varphi(x)\,dx$

or $\langle (x-n)_+, \varphi \rangle = 0$ si $n \geq N$. Pour $0 \leq n \leq N$

$$|\langle (x-n)_+, \varphi \rangle| = \left|\int_0^{N-n} y\,\varphi(y+n)\,dy\right| \leq \left(\int_0^N y\,dy\right) \sup|\varphi|$$

$$\leq \frac{N^2}{2} \sup|\varphi|.$$

d'où

$$\left|\langle \sum_n (x-n)_+, \varphi \rangle\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \langle (x-n)_+, \varphi \rangle\right| \leq N \times \frac{N^2}{2} \sup|\varphi|$$

donc convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Comme $(x-n)_+' = H(x-n)$ on a aussi

$$\left(\sum_n (x-n)_+\right)' = \sum_n H(x-n)$$

Rem : On peut aussi remplacer $n \in \mathbb{N}$ par $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1 : $K(\mathbb{R})$ et $K(]-1,1[)$ ne sont pas complets pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1) $I \subset \mathbb{R}$ $\|\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|$ est clairement une norme sur $K(I)$, et $(K(I), \|\cdot\|_\infty)$ est complet si I est compact.

2) $\varphi \in K(\mathbb{R})$, supp $\varphi \subset [0,1]$, on pose

$$\varphi_n(x) = \varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2) + \dots + \frac{1}{n}\varphi(x-n).$$

on a

$$\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x) = \frac{1}{p+1}\varphi(x-p-1) + \dots + \frac{1}{p+q}\varphi(x-p-q).$$

comme les support des $\varphi(\cdot - n)$ sont disjoints (supp $\varphi \subset [0,1]$) pour chaque $x \in \mathbb{R}$, un seul terme contribue à la somme, avec un coefficient $\leq \frac{1}{p+1}$. Donc

$$|\varphi_{p+q}(x) - \varphi_p(x)| \leq \frac{1}{p+1} \sup_{[0,1]} |\varphi|$$

et la suite $(\varphi_n)_n$ est de Cauchy dans $K(\mathbb{R})$.

3) Supposons (par l'absurde) $\varphi_n \to \psi$ dans $(K(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, avec donc $\psi \in K(\mathbb{R})$, $\varphi_n \to \psi$ uniformément sur un compact $I \subset \mathbb{R}$, donc $\int (\varphi_n - \psi)\,dx \to 0$.

Par ailleurs $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = \int \sum \frac{1}{j}\varphi(x-j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\int \varphi(x-j)\,dx =$
$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\left(\int_0^1 \varphi(y)\,dy\right)$. Si $\int_0^1 \varphi(y)\,dy \neq 0$, on en déduit que

$$\left|\int \varphi_n(x)\,dx\right| = \left|\left(\int_0^1 \varphi(y)\,dy\right)\right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty \quad \text{(série harmonique)}$$

et donc aussi $\int (\varphi_n - \psi)\,dx$. Absurde.

4) a) Soit $\theta : E \to F$ isomorphisme d'e.v.n. Alors θ isométrie $\Rightarrow$ θ^{-1} isométrie. Clair :

$\theta^{-1} v = u \Leftrightarrow v = \theta u \Rightarrow \|\theta u\| = \|v\| = \|u\|$

b) $(E, \|\cdot\|_E)$ complet.

$v_n = \theta u_n$ de Cauchy dans F. $\|v_{p+q} - v_p\| = \|\theta u_{p+q} - \theta u_p\|$ $= \|\theta(u_{p+q} - u_p)\| = \|u_{p+q} - u_p\|$, donc (u_n) de Cauchy,

donc $u_n \to u$. Par continuité de θ, $\theta u_n \to \theta u$, donc $v_n \to \theta u$

5) $(K(]-1,1[), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet d'après ainsi fait de 4) et 1) car si $u_n \circ \tan \frac{\pi x}{2}$ converge dans $K(]-1,1[)$ $\Leftrightarrow$ u_n converge dans $K(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : $\mathcal{F}$ de Fourier de $x_+^n = u_n$

1 a) cf. Question de cours B.3 : $u_0 = H$, $u'_{n+1} = (n+1) u_n$.

b) il est clair que $(\lambda x)_+^n = \lambda x_n^+$ pour $\lambda > 0$.

2 $\mathcal{F}$ de Fourier de H. $\langle \hat{H}, \varphi \rangle = \langle H, \hat{\varphi} \rangle = \int_0^\infty \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$

$= \int_0^\infty d\xi \int e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_0^\infty d\xi \int e^{-i(x - i\varepsilon)\xi} \varphi(x)\, dx}_{I_\varepsilon}$.

a) Par Fubini $I_\varepsilon = \int dx\, \varphi(x) \int_0^\infty e^{-i(x-i\varepsilon)\xi} d\xi = \int dx\, \varphi(x) \left. \frac{e^{-i(x-i\varepsilon)\xi}}{-i(x-i\varepsilon)} \right|_0^\infty$

$= \frac{1}{i} \int dx\, \varphi(x) \frac{1}{x - i\varepsilon} = \frac{1}{i} \int dx\, \varphi(x) \frac{x + i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{i} \underbrace{\int \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx}_{A_\varepsilon}$

$+ \underbrace{\int \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x)\, dx}_{B_\varepsilon}$

b) Calcul de $\lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon$. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, supp $\varphi \subset [-M, M]$.

$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $B_\varepsilon = \varphi(0) \int_{-M}^{M} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \int_{-M}^{M} \frac{\varepsilon x \psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}$

(4)

Or $\int_{-M}^{M} \frac{\varepsilon\, dx}{x^2+\varepsilon^2} = \int_{-M/\varepsilon}^{M/\varepsilon} \frac{dy}{y^2+1} \to \arctan y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$

or $\int_{-M}^{M} \underbrace{\frac{\varepsilon x}{x^2+\varepsilon^2}}_{\leq \frac{1}{2}} \psi(x)\, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ par Lebesgue.

donc $B_\varepsilon \to \pi\varphi(0)$

c) Calcul de $A_\varepsilon = \frac{1}{i}\varphi(0)\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-M}^{M}\frac{2x\,dx}{x^2+\varepsilon^2}}_{0 \text{ (fonc impaire)}} + \frac{1}{i}\int_{-M}^{M}\frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx$

Or $\langle vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-M}^{-\delta} + \int_{\delta}^{M}\right)\frac{(\varphi(0)+x\psi(x))}{x}dx$

$= \int_{-M}^{M}\psi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-M}^{M}\frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx$ (Lebesgue)

donc $A_\varepsilon \to \frac{1}{i}\langle vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle$.

d) Finalement $\hat{H}(\xi) = \pi\delta(\xi) + \frac{1}{i}vp\frac{1}{\xi}$ (homogène de degré $0-1=-1$)

↓ dimension homog. de u.

3) Tf de Fourier de $x_+ = xH(x)$

Comme $\mathcal{F}(xu) = i\partial_\xi \mathcal{F}u(\xi)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on se ramène à un calcul de dérivée :

$\hat{x}_+(\xi) = i\partial_\xi\hat{H}(\xi) = i\pi\delta'(\xi) + (vp\frac{1}{\xi})' = i\pi\delta'(\xi) + Pf(\frac{1}{\xi^2})$.

Exercice 3 : Sol'n élémentaire de l'op. de la chaleur.

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x,t) - \alpha\Delta_x E(x,t) = \delta(x)\otimes\delta(t).$$

Fourier en $x \Rightarrow \frac{\partial\hat{E}}{\partial t}(\xi,t) + \alpha\xi^2\hat{E}(x,t) = \delta(t)$

EDO du 1e ordre. Sol'n eq. homogène $Ce^{-\alpha\xi^2 t}$

Posons $C(\xi,t) = e^{\alpha\xi^2 t}\hat{E}(\xi,t)$, vérifie

$\frac{\partial C}{\partial t}(\xi,t) = \alpha\xi^2 e^{\alpha\xi^2 t}\hat{E} + e^{\alpha\xi^2 t}\frac{\partial\hat{E}}{\partial t} = e^{\alpha\xi^2 t}\delta(t) = \delta(t)$

(car $e^{\alpha\xi^2 t}\big|_{t=0} = 1$). d'où $C(\xi,t) = H(t) + c$, c cste,

comme $\hat{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ et $e^{\alpha\xi^2 t}$ ne définit pas une distin-

Solution tempérée pour $t<0$, on doit avoir $C=0$. D'où finalement

$$\hat{E}(\xi,t) = H(t)\, e^{-\alpha \xi^2 t}$$

par tf de Fourier inverse en ξ, on a $E(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi} e^{-\alpha\xi^2 t}\, d\xi\right) H(t)$

Soit

$$\phi(\xi) = \alpha\xi^2 t - ix\xi = \alpha t\left(\xi^2 - i\frac{x\xi}{\alpha t}\right) = \alpha t\left(\left(\xi - \frac{ix}{2\alpha t}\right)^2 + \frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-\phi(\xi)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/4\alpha t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t\left(\xi - \frac{ix}{2\alpha t}\right)^2} d\xi}_{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t \xi^2} d\xi \ (\text{Cauchy})}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\alpha t}}}}.$$

car $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx = 1$

c) résoudre $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta_x u = e^{-\beta x^2} \otimes \delta(t)$

par convolution en x, on a $u(x,t) = E(\cdot,t) * e^{-\beta(\cdot)^2}$

qui se calcule comme ci-dessus (intégrale gaussienne)

$\square$.