Équations différentielles

Votre Nom

15 janvier 2014

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire. Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles.

1 Rappels

Une équation différentielle (EDO) de premier ordre est une équation exprimée sous la forme d'une relation

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \tag{1}$$

– dont l'inconnue est une fonction $y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I (à déterminer)
– dans laquelle cohabitent à la fois y et sa dérivée y'.

Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation (1).

Exemple. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = -y(t)$ signifie chercher toutes les fonctions

$$\begin{aligned} y\colon I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y = f(t) \end{aligned}$$

telles que $f'(t) = -f(t)$ pour tout $t \in I$. Toutes les solutions s'écrivent $f(t) = ce^{-ct}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (où c est une constante réelle quelconque).

1.1 Condition initiale

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour en sélectionner quelques unes on doit imposer une condition supplémentaire qui correspond à la valeur prise par la solution en un point de l'intervalle d'intégration.

Définition 1.1 (Condition initiale)**.** Une condition initiale (CI) est une relation du type $y(t_0) = y_0$ qui impose en t_0 la valeur y_0 de la fonction inconnue.

En pratique, se donner une CI revient à se donner le point (t_0, y_0) par lequel doit passer le graphe de la fonction solution.

1.2 Problème de Cauchy

Le couple EDO-CI porte le nom de «problème de CAUCHY» :

Définition 1.2 (Problème de CAUCHY)**.** Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée et y' la dérivée de y par rapport à t. On appelle *problème de* CAUCHY le problème

trouver une fonction $y\colon\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I telle que

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

avec t_0 un point de I et y_0 une valeur donnée.

Il y a un résultat qui garantit que, sous certaines hypothèses très générales, deux graphes de fonctions qui sont des solutions de la même EDO ne se rencontrent jamais. Le théorème garantit aussi l'existence des solutions ; pour donner un énoncé précis, il faut d'abord définir la notion de solution maximale.

1.2.1 Solution maximale

De façon générale, lorsqu'on se donne une équation différentielle et une condition initiale $y(t_0) = y_0$, on cherche un intervalle I, contenant t_0, sur lequel une solution existe, et qui soit «le plus grand possible» : il n'existe pas d'intervalle plus grand sur lequel l'équation différentielle ait une solution. Cet intervalle s'appelle *intervalle de vie* de la solution. Une solution définie sur cet intervalle le plus grand possible s'appelle *solution maximale*.

Définition 1.3 (Solution maximale)**.** On se donne une équation différentielle $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ avec une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Une *solution maximale* pour ce problème est une fonction $y = f(t)$, définie sur un intervalle I appelé *intervalle de vie*, telle que

– f est solution de l'équation différentielle et vérifie la condition initiale ;
– il n'existe pas de solution $\tilde{f}$ de la même équation, vérifiant la même condition initiale et définie sur un intervalle J contenant I et plus grand que I.

Proposition 1.4. *Soit* $y = f(t)$ *une solution maximale définie sur un intervalle de vie* $I =]a; b[$. *Si* $b \neq +\infty$ *alors*

$$\lim_{t \to b-} y(t) = \pm\infty,$$

autrement dit le graphe de la solution a une asymptote verticale en $t = b$. *Même chose si* $a \neq -\infty$.

On utilise souvent le corollaire 1.4 sous forme contraposée : si les solutions ne peuvent pas «exploser», alors elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Théorème d'existence et unicité

Rappelons un résultat d'existence et d'unicité global, au sens où on peut intégrer le problème de CAUCHY jusqu'à $t = \infty$.

Théorème 1.5 (de CAUCHY-LIPSCHITZ)**.** *Considérons une fonction* $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ *définie pour tout* t *dans un intervalle* I *et pour tout* y *dans un intervalle* J *et de classe* $\mathscr{C}^1$*, alors pour toute CI* $y(t_0) = y_0$ *avec* $t_0 \in I$ *et* $y_0 \in J$ *il existe une unique solution maximale* $y = y(t)$ *de l'EDO* $y'(t) = \varphi(t, y(t))$.

Remarque. D'un point de vue pratique, le théorème 1.5 garantit que les graphes des solutions ne se rencontrent jamais. On peut en déduire quelques remarques plus subtiles :
- si l'EDO admet comme solution la solution nulle mais $y_0 \neq 0$, alors la solution du problème de CAUCHY est du signe de y_0 pour tout $t \in I$;
- si l'EDO admet deux solutions constantes $y(t) = \kappa_1$ et $y(t) = \kappa_2$ pour tout $t \in I$ et $y_0 \in]\kappa_1; \kappa_2[$, alors la solution du problème de CAUCHY est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vérifie $y(t) \in]\kappa_1; \kappa_2[$.

2 Exercices

Exercice 2.1.

EDO	*Solutions*
$y'(x) + 2xy^2(x) = 0$	$y(x) = (x^2 + c)^{-1}$
$y'(x) + (3x^2 + 1)y(x) = x^2 e^{-x}$	$y(x) = (c + \frac{e^{x^3}}{3})\, e^{-x^3 - x}$

Exercice 2.2 («Les experts - Toulon»)**.** *Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2H20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de* $15°\mathrm{C}$. *Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de* $20°\mathrm{C}$ *et si la température externe est de* $-5°\mathrm{C}$ *?*

Correction de l'exercice 2.2.

La loi de NEWTON affirme qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température du corps suit l'EDO

$$T'(t) = K(T(t) - T_{\text{ext}}). \tag{3}$$

Il s'agit d'une EDO à variables séparables.

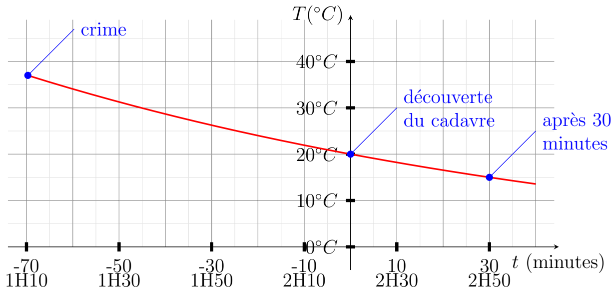

FIGURE 1: Solution de l'exercice 2.2

1. Recherche des solutions de l'EDO (3) :
   a) L'unique solution constante $T(t) \equiv T_{ext}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   b) Le théorème 1.5 garantit que toute autre solution satisfait $T(t) \neq T_{ext}$ quelque soit t. On peut alors écrire formellement

$$T'(t) = K(T(t) - T_{ext}) \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{T - T_{ext}} \, dT = \int K \, dt$$
$$\rightsquigarrow \quad \ln(T - T_{ext}) = Kt + c \quad \rightsquigarrow \quad T(t) = T_{ext} + De^{Kt}.$$

2. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

$$T_0 = T(0) = T_{ext} + De^{K \cdot 0} \implies D = T_0 - T_{ext} \implies T(t) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{Kt}.$$

3. Ici $T_{ext} = -5°C$ et $T_0 = 20°C$ donc la température du cadavre suit la loi

$$T(t) = -5 + 25e^{Kt}.$$

   De plus, on sait que $15 = T(30) = -5 + 25e^{30K}$ d'où $K = \frac{\ln(\frac{4}{5})}{30}$.
4. Pour déterminer l'heure du meurtre il faut donc résoudre l'équation

$$37 = -5 + 25e^{\frac{\ln(4/5)}{30}t}$$

   d'où $t = 30\frac{\ln(42/25)}{\ln(4/5)} \sim -69{,}7$ minutes, c'est-à-dire à 1H10 de la nuit (voir la figure 1).