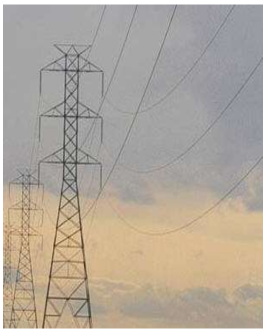
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

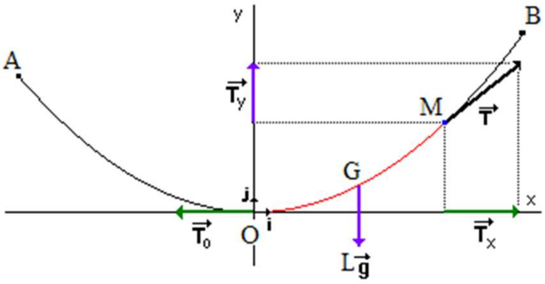
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Mémento de l'étude d'une fonction numérique à variable réelle. Techniques de calcul de limites. Fonctions réciproques. Développements limités.



Le cosinus hyperbolique



La chaînette ou la courbe funiculaire

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Table des matières

Partie A : Mémento de l'étude d'une fonction

I. Notions de base

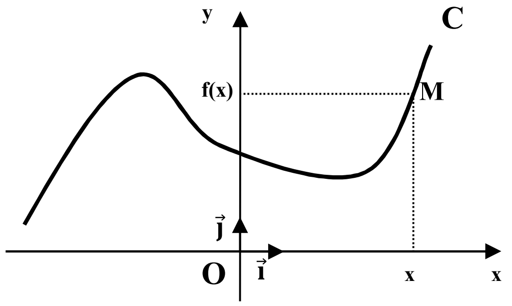
1) Définitions et notations

Une fonction f, est définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si à tout x de D on peut associer un unique nombre noté f(x), et appelé image de x par f.

On écrit $\quad f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\quad x \longmapsto f(x)$

D est appelé l'ensemble de définition de f, on le note aussi D_f.



On munit le plan d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
La courbe C représentant f est l'ensemble des points M de coordonnées M (x , f(x)).

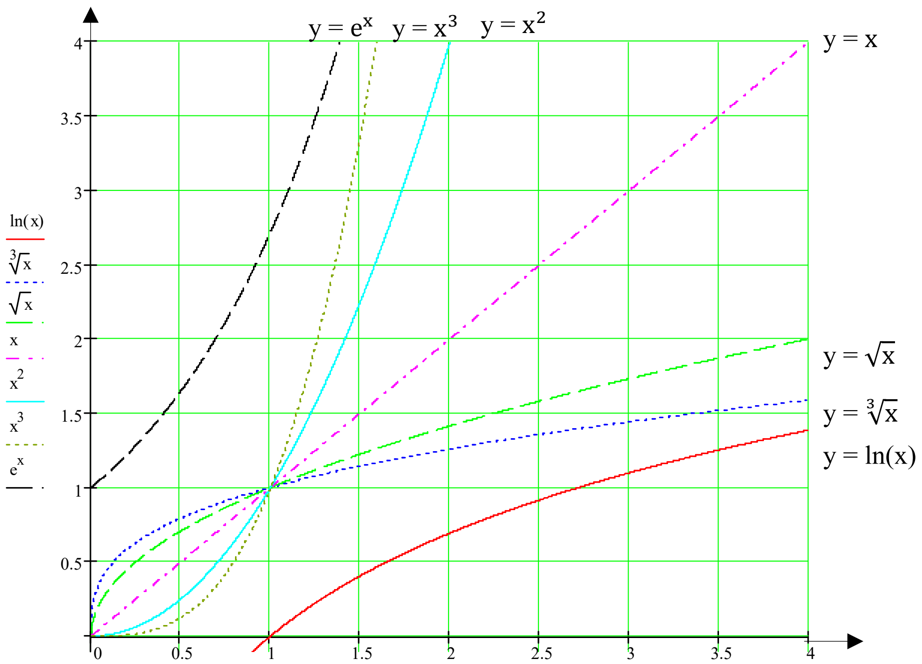
$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + f(x)\,\vec{j}$$

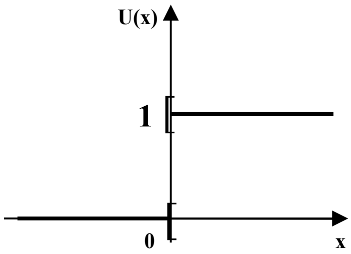
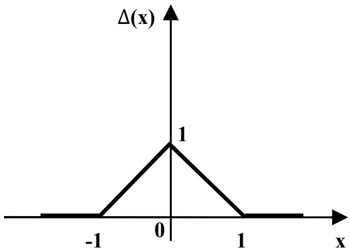
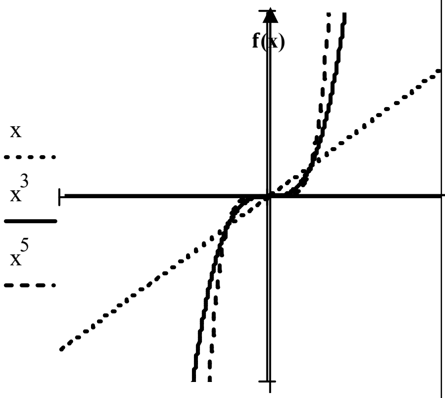
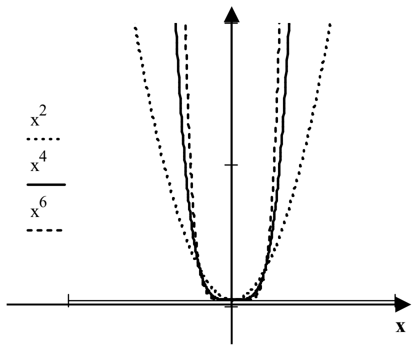
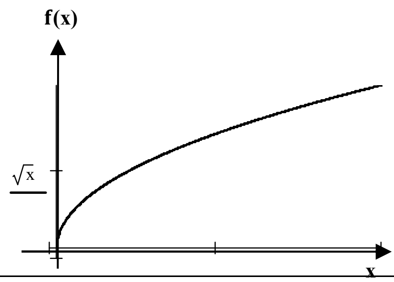
y = f(x) est l'équation cartésienne de f.

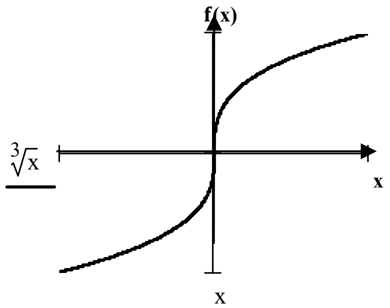
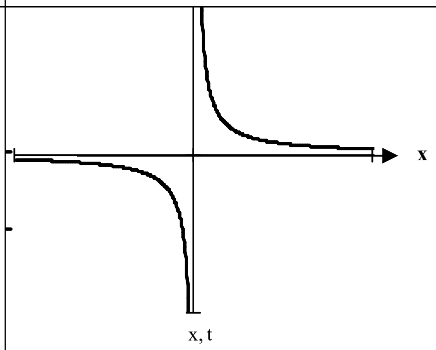
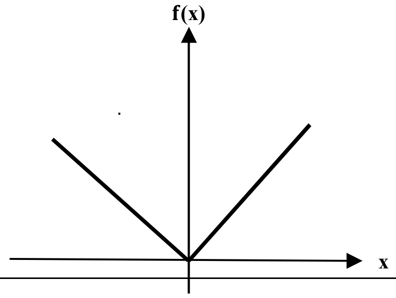
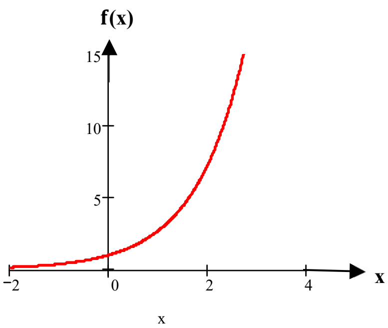
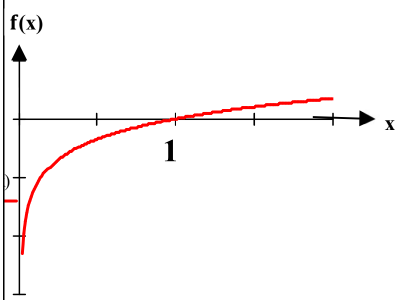
Une fonction peut être obtenue à partir d'une formule (signal déterministe), d'un tableau de valeurs relevé d'expériences physiques (signal numérique), ou bien d'une courbe.

2) Croissance comparée et fonctions usuelles

Pour des grandes valeurs positives de x : $\ln(x) < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n < e^x$



<u>Echelon-unité</u> : (Heaviside Φ) $U : \mathbb{R} \longrightarrow [0\,;\,1]$ $x \longmapsto U(x)$ avec $U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $U(\mathbb{R}) = \{0\,,1\}$ On dit que la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0. $\lim\limits_{x \to 0^-} U(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} U(x) = 1$
<u>Triangle</u> : (notée aussi tri) $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow$ $x \longmapsto \Delta\,(x)$ $\Delta(x) = \begin{cases} 1 - \lvert x \rvert \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : [0 ; 1] On dit que la fonction triangle est continue sur $\mathbb{R}$.
<u>Puissance impaire</u> : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n+1}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
<u>Puissance paire</u> : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
<u>Racine carrée</u> : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

<u>Racine cubique</u> : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Inverse</u> : $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ $x \longmapsto f(x) = 1/x$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}^*$ f est continue sur $]0;+\infty[$ f est continue sur $]-\infty;0[$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
<u>Valeur absolue</u> : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \|x\|$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Exponentielle</u> : $f: \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$ $x \longmapsto f(x) = e^x$ $e^0 = 1$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $(e^a)^n = e^{a.n}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Logarithme népérien</u> : $f:]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \ln(x)$ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(a^n) = n.\ln(a)$	 $\ln(e^a) = a \; \forall a \in \mathbb{R}$ $e^{\ln(a)} = a \; \forall a > 0$	Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) Opérations

✓ Opérations algébriques

f et g sont deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g. Pour tout $x \in D_f \cap D_g$ on définit :

$$(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) \;\; ; \;\; (fg)(x) = f(x)g(x) \;\; ; \;\; \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ si } g(x) \neq 0$$

✓ Composition des fonctions

Soit f, une fonction définie sur D_f et f (D_f) l'ensemble image : $f(D_f) = \{f(x); x \in D_f\}$
Soit g, une fonction définie sur D_g tel que $f(D_f) \subset D_g$.
On définit la fonction h, composée de f par g et notée $g \circ f$, par :
$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in D_f$
On a donc le schéma :

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] & f(D_f) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \end{tikzcd}$$

On vérifie que : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ et $g \circ f \neq f \circ g$

Exemples

✓ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x) = \sqrt{x}$

Soit $h = g \circ f$

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k = f \circ g$

$$k(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = \big(\sqrt{x}\big)^2 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

II. Ensemble de définition et ensemble d'étude d'une fonction

1) Ensemble de définition

Exemples

✓ Soit $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x+3}}$, déterminer l'ensemble de définition de f

La fonction exponentielle est définie sur ℝ , et la fonction $x \longmapsto \frac{x^2-1}{x+3}$ est définie sur ℝ $-\{-3\}$

Donc, l'ensemble de définition de f est : $D_f = ℝ -\{-3\}$.

- ✓ Soit $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$, déterminer l'ensemble de définition de g

La fonction logarithme est définie sur $ℝ_+^*$. G(x) existe si et seulement si $\frac{x^2-1}{x+3}$ existe et est strictement positif. A l'aide du tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Signe de x^2-1		+		+	0	-	0	+	
Signe de $x+3$		-	0	+		+		+	
Signe de $\frac{x^2-1}{x+3}$		-	‖	+	0	-	0	+	

L'ensemble de définition de g est donc : $D_g = \ ]-3\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$

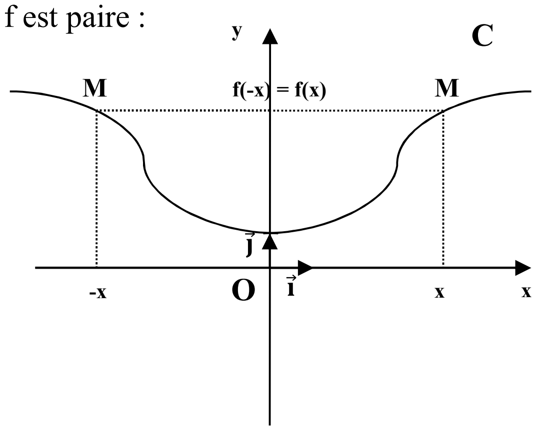
- ✓ Soit $h(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}}$, déterminer l'ensemble de définition de h

La racine carrée est définie sur $ℝ_+$, donc $D_h = \ ]-3\,;\,-1]\cup[1\,;\,+\infty[$

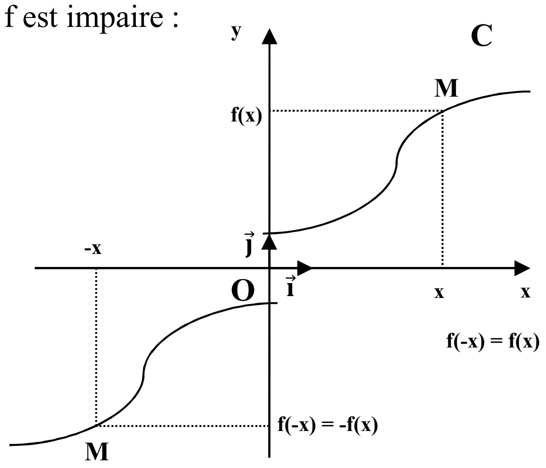
2) <u>Parité</u> (voir aussi chap.1)

- ✓ **Une <u>fonction</u> f, définie sur D, un sous-ensemble de ℝ centré en 0, est dite paire lorsque : $\forall x \in D \;\; f(-x) = f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On étudie alors f sur D$\cap \mathbb{R}_+$**
- ✓ **Une <u>fonction</u> f, définie sur D, un sous-ensemble de ℝ centré en 0, est dite impaire lorsque : $\forall x \in D \;\; f(-x) = -f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère. On étudie alors f sur D$\cap \mathbb{R}_+$**

f est paire :



f est impaire :



Exemples Les fonctions cosinus et cosinus hyperbolique sont paires sur $\mathbb{R}$, les fonctions sinus, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont impaires sur $\mathbb{R}$. La fonction tangente est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$.

Opérations

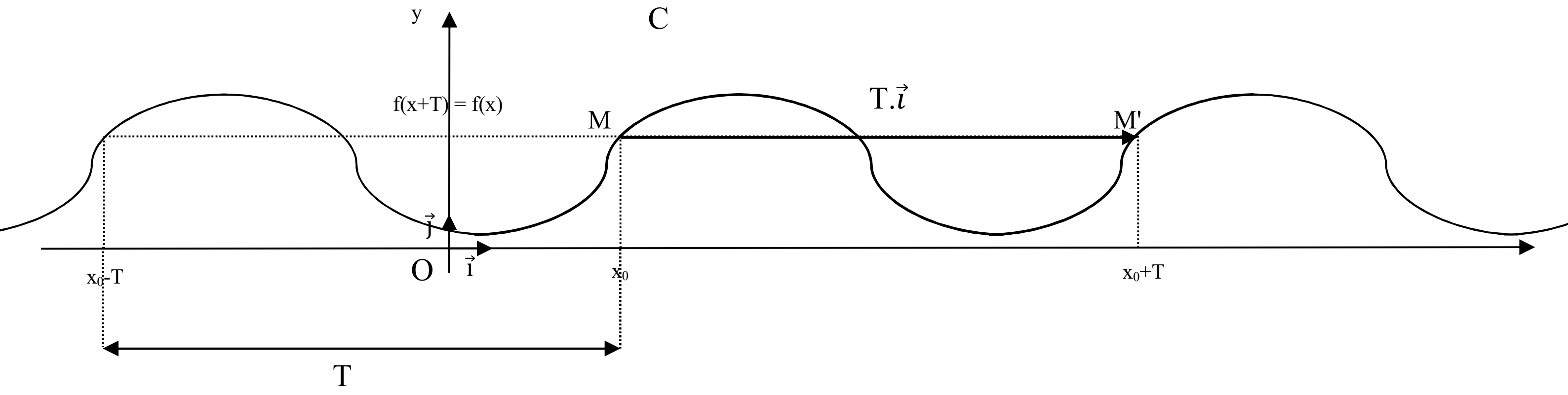
- ✓ **Si f et g sont paires sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est paire sur D**
- ✓ **Si f et g sont impaires sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est paire sur D**
- ✓ **Si f est impaire et g est paire sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est impaire sur D**
- ✓ **Si f est paire sur D, alors $g \circ f$ est paire sur D**
- ✓ **Si f est impaire sur D, alors $g \circ f$ est paire si g est paire et $g \circ f$ est impaire si g est impaire.**

Exemple

Soit f, la fonction, définie par : $f(x) = \frac{x^3.\sin^2(x)}{\cos(x)}$ sur D = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$ est centré en 0.
La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire et les fonctions $x \mapsto sin^2(x)\ et\ x \mapsto \cos(x)$ sont paires, leur produit est donc impair. La fonction f est donc impaire.

3) Périodicité (voir aussi chap.1)

Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est dite périodique lorsqu'il existe un nombre réel positif, T, le plus petit possible tel que :
$\forall x \in D\ \ f(x+T) = f(x)$. On dit aussi que f est T-périodique.
Soit f_0, la fonction définie par : $f_0(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x\epsilon[x_0, x_0+T[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. f_0 est appelée le motif de la fonction f.
La représentation graphique de f est obtenue en appliquant sur la courbe représentant f_0, les translation de vecteur $kT.\vec{i}$ où k est un entier relatif.
On étudie alors la fonction f sur l'intervalle $[x_0, x_0+T[$.



Remarque On peut alors écrire :
$f(t) = ... + f_0(t+2T) + f_0(t+T) + f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots = \sum_{-\infty}^{\infty} f_0(t-kT)$

Exemples Les fonctions $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ sont $\frac{2\pi}{\omega}$ – périodique. La fonction $t \mapsto \tan(\omega t + \varphi)$ est $\frac{\pi}{\omega}$ – périodique.

II. Continuité

1) Définitions et opérations

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est continue en a lorsque : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est continue sur I, lorsque f est continue en tout point a de I. On dit que f est de classe C^0 et on note : $f \in C^0(I)$

Si f et g sont continues sur I, alors : αf, f+g, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont continues sur I. (α est un nombre réel)
Si f est continue sur I et g est continue sur f(I), alors $g \circ f$ est continue sur I.

2) Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:
$x \longmapsto |x|$, et $x \longmapsto x$.

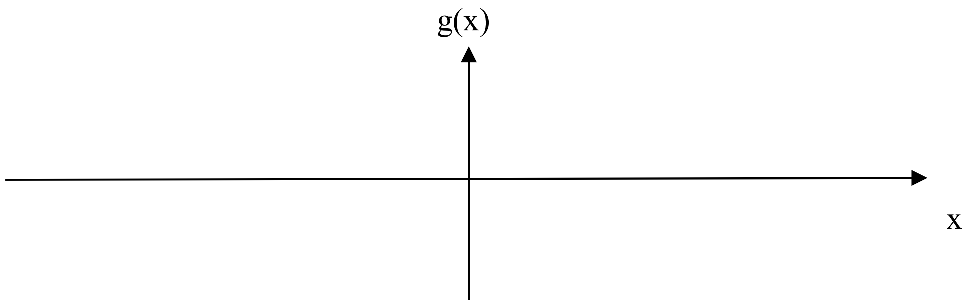
Continuité en 0 : ……………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...



On dit que g est continue à droite de 0, car $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$.

Notes

III. Dérivabilité

1) Définitions et opérations

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, lorsque f est dérivable en tout point a de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f ', la fonction qui à tout élément a de I, associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, f+g, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont dérivables sur I. (α est un nombre réel) et $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

Exemples

✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.

Dérivabilité de f en 1 : …………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Dérivabilité de f en 0 : …………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Dérivabilité de f en $a > 0$: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Notes

2) Formulaire U est une fonction dérivable sur I.

$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$\mathbf{(U^n)' = n.U'.U^{n-1}} \ , \ \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$	$\mathbf{(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}} \ , \ \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$	$\mathbf{\left(\frac{1}{U}\right)' = \frac{-U'}{U^2}} \ , \ \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(e^U)' = U'.e^U} \ , \ \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbf{(\ln(U))' = \frac{U'}{U}} \ , \ \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\sin(U))' = U'.\cos(U)} \ , \ \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\cos(U))' = -U'.\sin(U)} \ , \ \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbf{(\tan(U))' = \frac{U'}{\cos^2(U)} = \left(1 + \tan^2(U)\right).U'}$ $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemples d'applications

- ✓ $i(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

$i'(t) =$…………………………………………………………………………………

$i''(t) =$……………………………………………………………………………...

$i''(t) + \omega^2 i(t) =$…………………………………………………………………..

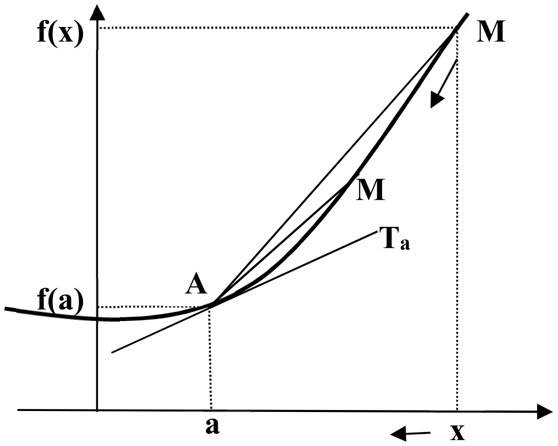
On dit que i est une solution de l'équation différentielle : $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$.

- ✓ A l'aide de la définition du nombre dérivé du sinus en 0, calculer : $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t}$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Interprétation graphique



$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite (AM)
Lorsque x tend vers a, M tend vers A le long de la courbe, et la droite (AM) se rapproche de la droite T_a, qui est la tangente à la courbe au point A.

Conclusion :

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ **est la pente de la tangente à la courbe au point A(a,f(a)).**

Conséquence Equation de la tangente T_a

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

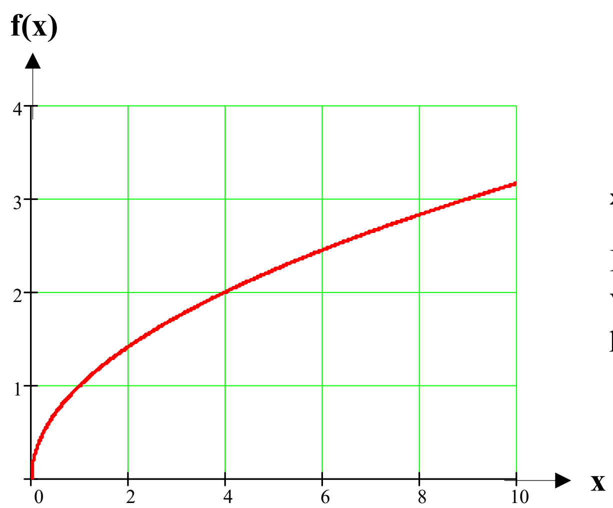
…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

$$\boxed{T_a : y = f(a) + (x-a).f'(a)}$$

Exemples

- ✓ La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) =$……………………………

En O, la tangente à la courbe est donc verticale tournée vers les ordonnées positives.

Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = x^3$

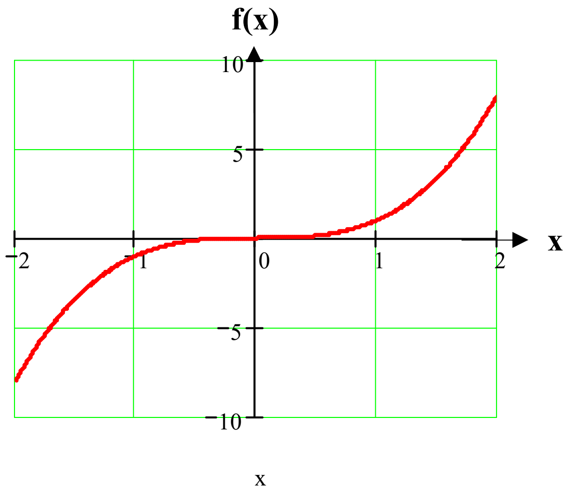
………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

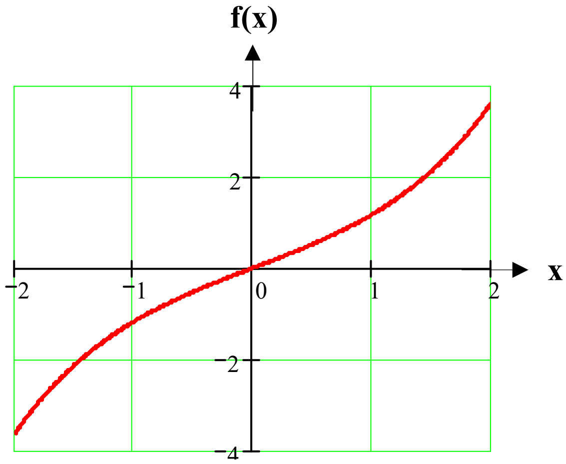


Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

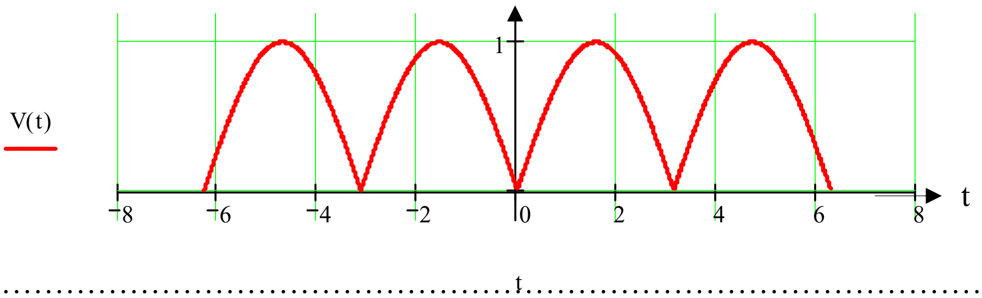


- ✓ Redressement double alternance : $V(t) = |\sin(t)|$.

Dérivabilité de V en 0 : ……………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………



…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

3) Sens de variation

Soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I :
Si $f' \geq 0$, f est croissante sur I
Si $f' \leq 0$, f est décroissante sur I

4) Extremum d'une fonction

<u>Définitions</u> :
- Une fonction f admet un maximum en x_0 sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$
- Une fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$
<u>Théorème</u> : Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors la fonction f présente un extremum en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗	M	↘	

Maximum

x	a		x_0		b
$f'(x)$		−	0	+	
f		↘	m	↗	

Minimum

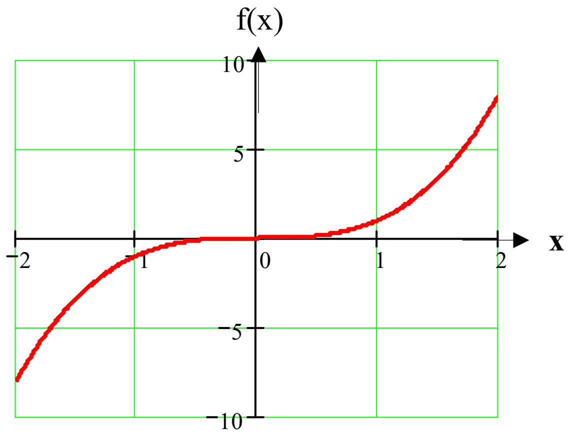
<u>Remarque</u> Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe, et que f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors x_0 est un **point d'inflexion**. Un point d'inflexion est un point où la tangente traverse la courbe.

Exemple : $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
$f'(0) = 0.$

$f''(x)=6x\geq 0 \ \ \forall x\geq 0$
$f''(x) = 6x \leq 0 \ \ \forall x \leq 0$
$f''(0) = 0$

O est donc un point d'inflexion, comme on peut le voir sur la représentation ci-contre.



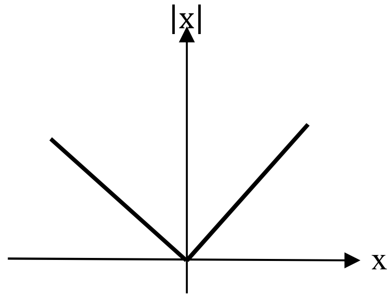
5) Théorème de monotonie

<u>Théorème de monotonie</u> Si f est continue et strictement monotone sur [a,b] et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation f(x) = 0 possède une seule et unique solution $\propto \in [a, b]$

6) Continuité et dérivabilité

Théorème Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I

La réciproque est fausse, par exemple la fonction valeur absolue est continue en 0, mais non dérivable en 0.



Si $f(x) = |x|$, alors $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$, f n'est donc pas dérivable en 0.

7) Dérivées successives – Fonction de classe C^n

Définitions Si f est continue sur l'intervalle I, on note : $f \in C^0(I)$
Si f est dérivable sur l'intervalle I, et si $f' \in C^0(I)$, alors on note : $f \in C^1(I)$

Si f' est dérivable sur I, alors on note $f'' = (f')'$ que l'on appelle dérivée seconde de f. Si de plus $f'' \in C^0(I)$, alors on note $f \in C^2(I)$

Plus généralement on définit la dérivée $n^{ième}$ de f, notée $f^{(n)}_{x}$. Lorsque $f^{(n)} \in C^0(I)$, on note $f \in C^n(I)$.

IV. Limites et branches infinies (Calcul de limites : voir chap.IV)

Voir page ci-après.

V. Plan d'étude d'une fonction

1) Recherche de l'ensemble de définition
2) Recherche de l'ensemble d'étude (parité et de périodicité)
3) Etude du sens de variation et recherche d'extrema
4) Etude de branches infinies (calcul de limites voir fin de ce chapitre)
5) Tracé de la courbe représentative

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

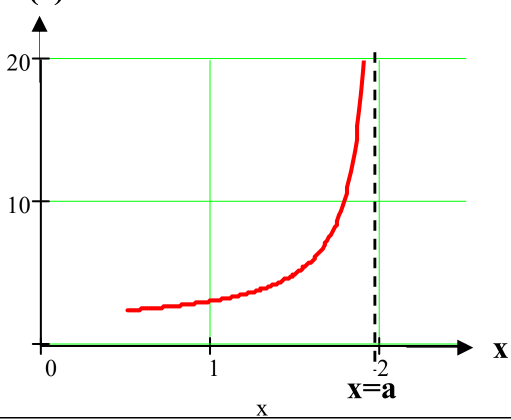
…………………………………………………………………………………………..............

Etude de branches infinies : asymptotes et direction asymptotique.

1er Cas : $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Asymptote parallèle à (Oy) d'équation

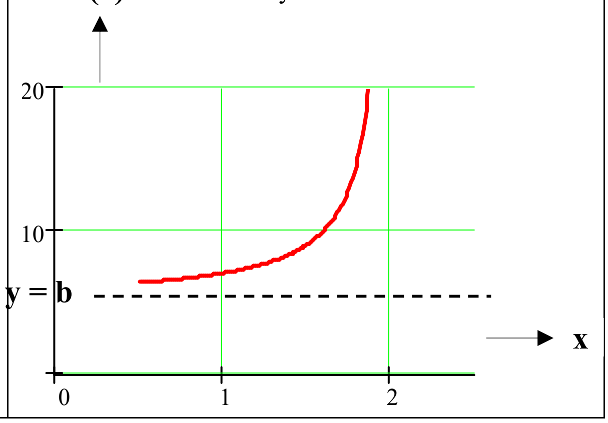
x = a



2ième Cas : $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = b$

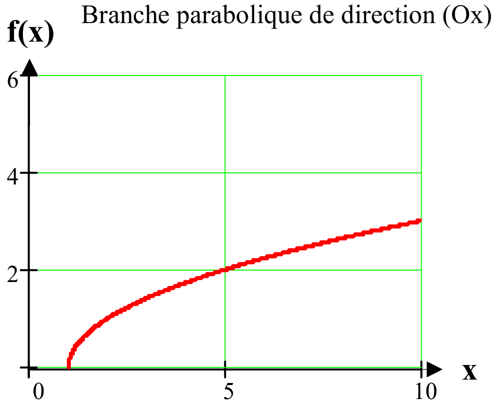
Asymptote parallèle à (Ox) d'équation

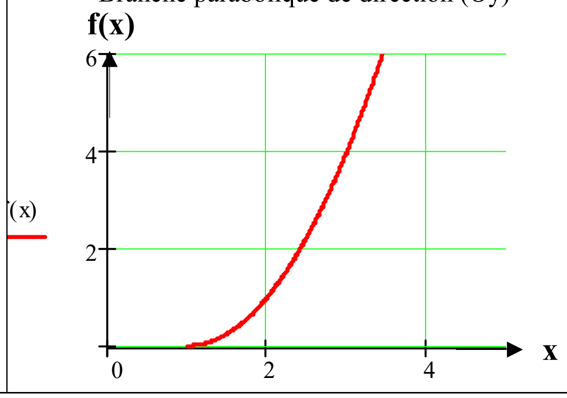
y = b



3ième Cas : $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \pm\infty$**, pour déterminer la nature de la branche infinie, on calcule** $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ **:**

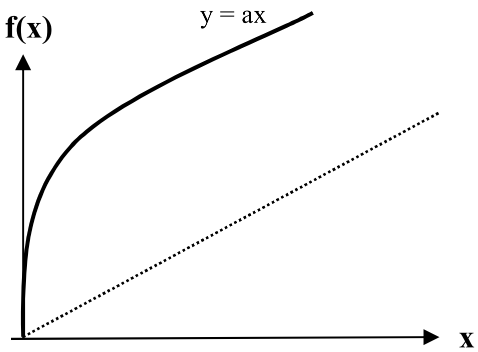
Si $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Si $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp\infty$
Branche parabolique de direction (Ox)	Branche parabolique de direction (Oy)

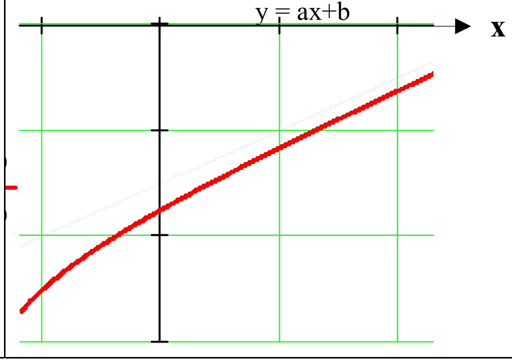




Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$	Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$
Branche parabolique de direction la droite d'équation y = ax	Asymptote oblique d'équation y = ax+b





Partie B : Quelques signaux et fonctions à connaître

I. Etude du signal $\mathbf{f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)}$ où a et b sont des réels non nuls.

1) Transformation de $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)$

Notons $A = |a - jb|$ et $\varphi = \arg(a - jb)$, alors :

$a - jb =$ ……………………………………………………………………………………

De plus,

$\cos(\omega t) + j.\sin(\omega t) =$……………………………………………………………………..

Ainsi le produit de ces deux nombres complexe est :

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

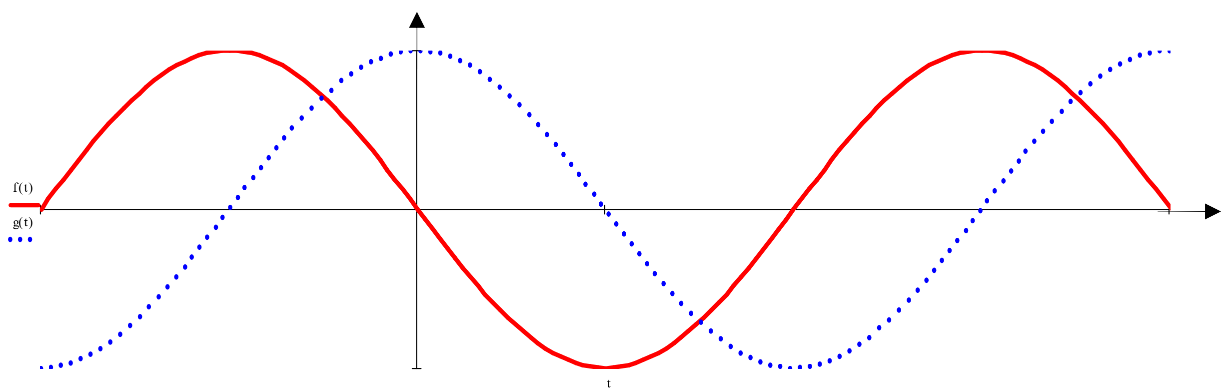
………………………………………………………………………………………………...

On obtient donc le résultat suivant :

$\mathbf{f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) = A.\cos(\omega t + \varphi)}$ **où** $\mathbf{A = \|a - jb\|}$ **et** $\mathbf{\varphi = \arg(a - jb)}$ **.**   **f est donc un signal sinusoïdal d'amplitude A, de période** $\mathbf{\frac{2\pi}{\omega}}$**, et de déphasage** $\mathbf{\varphi}$**.**

Représentation graphique :

Soit $f(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$; $g(t) = A.\cos(\omega t)$
Sur le graphe ci-après, indiquer A, T et t_1 , le décalage temporel. On a alors la formule : $\varphi = \frac{2\pi t_1}{T} = \omega t_1$



Rappel : La période T est en seconde, la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ en radian par seconde, et la fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ en Hertz.

2) Exemple

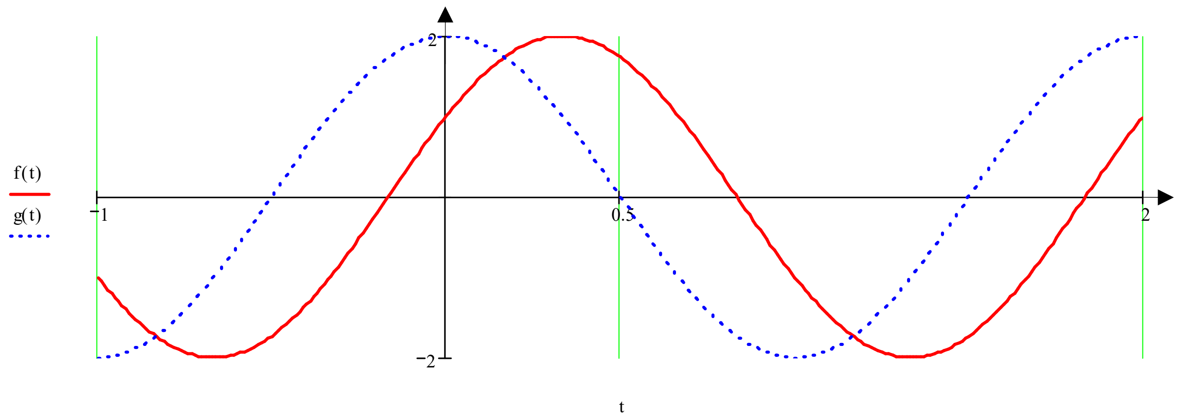
✓ $f(t) = \cos(\pi t)+\sqrt{3}\,\sin(\pi t)$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...



……………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………........

II. Les fonctions hyperboliques

1) Définitions et notations

On appelle :
- cosinus hyperbolique la fonction notée ch et définie par : $\mathbf{ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}}$
- sinus hyperbolique la fonction notée sh et définie par : $\mathbf{sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}}$
- tangente hyperbolique la fonction notée th et définie par : $\mathbf{th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$

2) Etude du sinus hyperbolique $sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

✓ Ensemble de définition : ……………………………………………………………..

✓ Continuité :

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est continue en a lorsque : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
La propriété de continuité se traduit par le fait que « l'on peut dessiner le graphique de f sans lever le crayon »
Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est continue sur I, lorsque f est continue en tout point a de I. On dit aussi que f est de classe C^0 et on note : $f \in C^0(I)$
Si f et g sont continues sur I, alors : αf, **f+g,** $f \times g$ **et f/g (avec** $g \neq 0$) **sont continues sur I. (α est un nombre réel)**

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

✓ Intervalle d'étude : ……………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………….............

✓ Signe de la dérivée :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

....

✓ Tableau de variation et limites :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

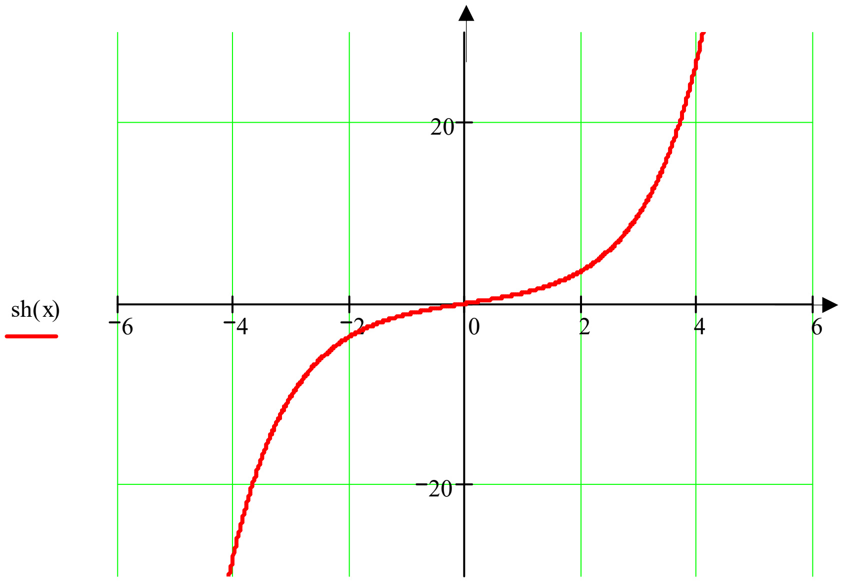
……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

✓ Représentation graphique du sinus hyperbolique :



3) Etude du cosinus hyperbolique $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

✓ Ensemble de définition : ………………………………………………………………..

✓ Continuité : ……………………………………………………………………… ..

……………………………………………………………………………………………...

✓ Intervalle d'étude : ……………………………………………………………...

……………………………………………………………………………….............

✓ Signe de la dérivée :

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ Tableau de variation et limites :

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

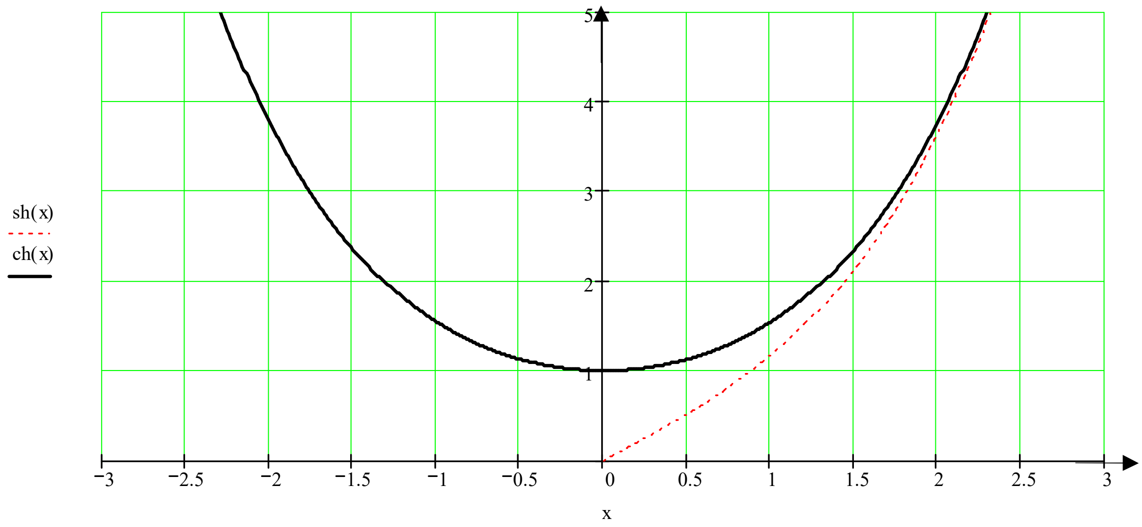
…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

On dit que **les courbes représentant le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique sont asymptotes l'une de l'autre en** +∞

✓ Représentation graphique du cosinus et du sinus hyperbolique :



Application : La courbe représentant le cosinus hyperbolique décrit une chaînette, c'est-à-dire la forme d'un câble fixé aux deux extrémités et soumis à la pesanteur.
La chaînette des lignes à haute tension varie en fonction de la quantité d'énergie transportée et des conditions météorologiques. Le courant permanent admissible désigne le courant maximum pouvant être transporté à un moment donné sans que le câble ne se rapproche trop du sol (en raison de la dilatation thermique due à l'effet Joule).

4) Formulaire

On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$

Les fonctions sh et th sont impaires, la fonction ch est paire.

$\left(\mathrm{ch}(x)\right)' = \mathrm{sh}(x)$; $\left(\mathrm{sh}(x)\right)' = \mathrm{ch}(x)$

$\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) =$ ……………………………………………………………………………..

$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) =$ ……………………………………………………………………………..

$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) =$……………………………………………………………………………

$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) =$……………………………………………………………………………

$\left(\mathrm{th}(x)\right)' =$……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$; $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$

$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$

5) Etude de la tangente hyperbolique $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- ✓ Ensemble de définition : ……………………………………………………………..
- ✓ Continuité : …………………………………………………………………………… ..

……………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Intervalle d'étude : …………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….............

- ✓ Signe de la dérivée :

…………………………………………………………………………………………...

- ✓ Tableau de variation et limites :

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

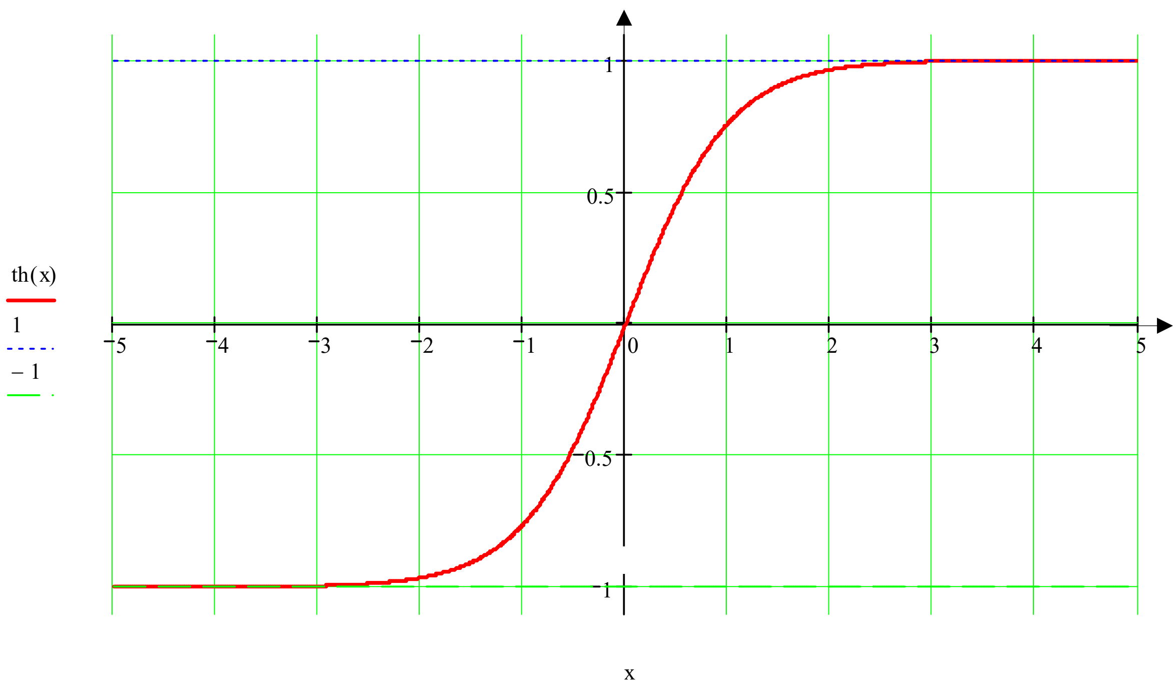
…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

- ✓ Représentation graphique de la tangente hyperbolique :



III. Le sinus cardinal

1) Définition et notation

Définition 1 : On appelle sinus cardinal et on note sinc, la fonction définie par :

$$\mathbf{sinc(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{sin(x)}}{\mathbf{x}} & \mathbf{si\ x \neq 0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{si\ x = 0} \end{cases}$$

Application dans le domaine du GEII : On verra en $2^{\text{ième}}$ année que la transformée de Fourier de la fonction porte est le sinus cardinal. La fonction porte étant très couramment utilisée, le sinus cardinal est donc très présent en traitement numérique du signal. En particulier, il est fréquemment rencontré en théorie des antennes, en acoustique, en radar etc.

2) Pré-requis :

Etudions le signe de la fonction $g(x) = x.\cos(x) - \sin(x)$ sur $[0; +\infty[$

- ✓ Remarque : l'ensemble de définition de g est …………………………………….........

………………………………………………………………………………………..............

- ✓ Continuité : ………………………………...

………………………………………………………………………………………..............

- ✓ Signe de la dérivée :..

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

- ✓ Tableau de variation :

………………………………………………………………………………………...

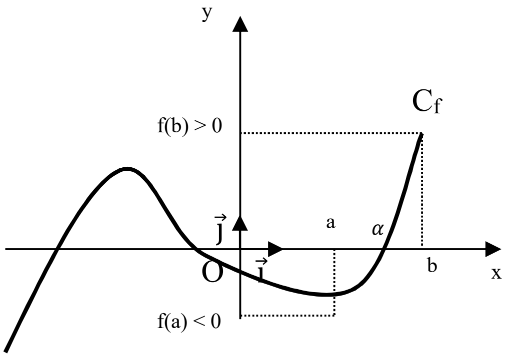
………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...



<u>Théorème de monotonie</u> : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur [a,b] telle que : f(a)×f(b) < 0, alors l'équation f(x) = 0 possède une seule et unique solution α dans l'intervalle]a,b[.

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Signe de la fonction g :

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

3) <u>Etude du sinus cardinal</u> $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- ✓ Ensemble de définition : ……………………………………………………………..
- ✓ Continuité :

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Intervalle d'étude : ………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………….............

- ✓ Signe de la dérivée :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Tableau de variation et limites :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Intersection des courbes représentant sinc et la fonction inverse :

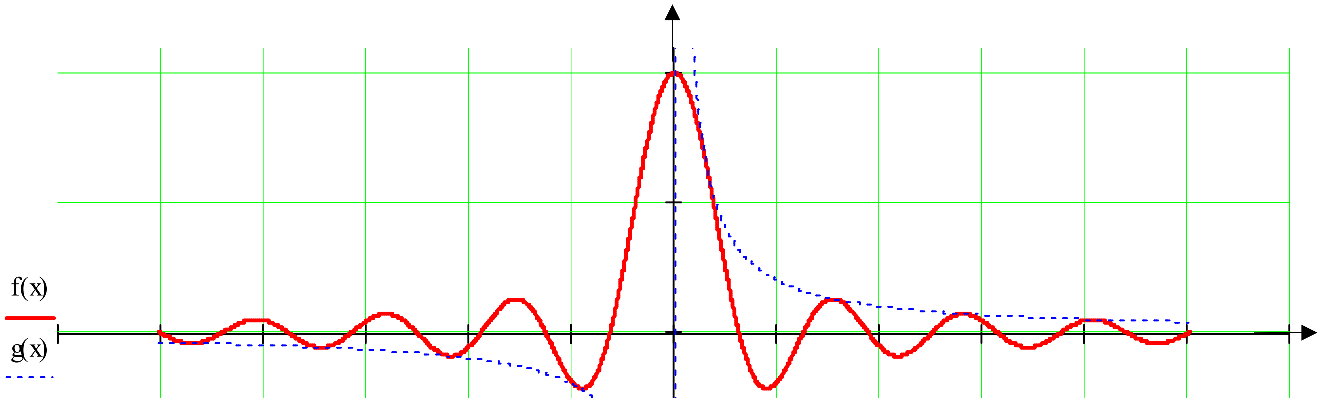
…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

✓ Représentation graphique du sinus cardinal :



On observe un signal périodique dont l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps. On appelle la période d'un tel signal la **pseudo-période** T, temps qui s'écoule entre deux valeurs maximales successives, elle est constante. Ici $T = 2\pi$.
On dit que la courbe représentant le sinus cardinal est une **sinusoïdale amortie**.

4) Autre définition du sinus cardinal plus couramment utilisée

Définition 2 : On appelle sinus cardinal et on note sinc, la fonction définie par :

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Sa courbe est une sinusoïdale amortie de pseudo période 2.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Partie C : Techniques de calcul de limites

Formes indéterminées FI **Soit x_0, un nombre réel ou $\pm\infty$.**

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	L	L	$\pm\infty$	∞	∞	$\pm\infty$	0	0	L
et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	L' $\neq 0$	$\pm\infty$	L' $\neq 0$	∞	$-\infty$	0	$\pm\infty$	0	0
alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) =$	L+L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	L
et $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x) =$	LL'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	$-\infty$	FI	FI	0	0
et $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$	FI	FI	$\pm\infty$	0	FI	$\pm\infty$

Remarque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \exp(g(x).\ln(f(x)))$ cette écriture permet de « lever » les formes indéterminées suivantes : $"L^\infty", "0^0"$ et $"\infty^0"$…

Voici quelques techniques permettant de « lever » une forme indéterminée :

Technique 1 : Croissance comparée

Définition **Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$**

Théorèmes **Soient : $0 < \alpha < \beta$**

$$\ln(x) \underset{\infty}{<<} x^\alpha \underset{\infty}{<<} x^\beta \underset{\infty}{<<} e^x$$

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = x.e^x - x^2$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \frac{\ln(4x)}{x}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

<u>Technique 2</u> : Expression conjuguée

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

<u>Technique 3</u> : Théorèmes de comparaison

Soient f, g et h trois fonctions définies sur [a,b[où b est un réel ou $\pm\infty$

1) Si $\forall x \in [a,b[$ $f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$
2) Si $\forall x \in [a,b[$ $f(x) \ge g(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \infty$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$
3) Si $\forall x \in [a,b[$ $|f(x)| \le g(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$
4) Si $\forall x \in [a,b[$ $h(x) \le f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = L$ (théorème des gendarmes)

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Notes

Technique 4 : Nombre dérivé

Rappel : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On la note $f'(x_0)$.

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ où $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ où $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ où $g(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} g(x)$ où $g(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Technique 5 : Equivalence

Définition **Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$**

Exemples : Montrer que les fonctions f et g suivantes sont équivalentes en ∞ :

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \frac{e^x}{2}$:

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Chercher un équivalent de f en ∞ où $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

En utilisant les limites calculées avec la technique 4, compléter :

$\sin(x) \underset{0}{\sim}$ ....

$e^x \underset{0}{\sim}$ ....

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$ ....

....

Si f est dérivable en x_0, alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0)$

Compléter : $\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim}$ ……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

$(1+x)^{\alpha} \underset{0}{\sim}$ ………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

$\tan(x) \underset{0}{\sim}$ ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

Si f est 2 fois dérivable en x_0, alors : $\mathbf{f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}.f''(x_0)}$

$\cos(x) \underset{0}{\sim}$ ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

Si f est n fois dérivable en x_0, alors :

$$\mathbf{f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}.f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}.f^{(3)}(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!}.f^{(n)}(x_0)}$$

<u>Opérations</u>

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si} \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{alors} \begin{cases} f_1.f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1.g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

$$\textbf{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \textbf{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \textbf{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

<u>Exemples</u> :

Compléter **:** $f(x) = \dfrac{-x^7 + 3x^2}{x(x-1)^3} \underset{\infty}{\sim}$ ………………………… ……………………………….

………………………………………………………………………………………………...

$e^{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim}$ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{\infty}{\sim}$ ………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}} \underset{1}{\sim}$ ………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

<u>Théorème</u> Soient f, g deux fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{(1-x)^7.(x+1)}{(x^3+2x^2-1).(3x^2-1)^2}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

Calculer $\lim_{x\to \infty} f(x)$ où $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

<u>Technique 6</u> : Théorème de l'Hospital

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a,x_0[$, dont la limite en x_0 est nulle ou infinie, si g'(x) ne s'annule pas sur $]a,x_0[$, et si la limite : $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors : $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Exemples</u> :

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2+3x} =$ ……………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………..

(autre méthode : ……………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………)

$\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} =$ …………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

(autre méthode : …………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………)

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2}=$ ……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

(autre méthode : …………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………)

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

Exercices

Exercice 1 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

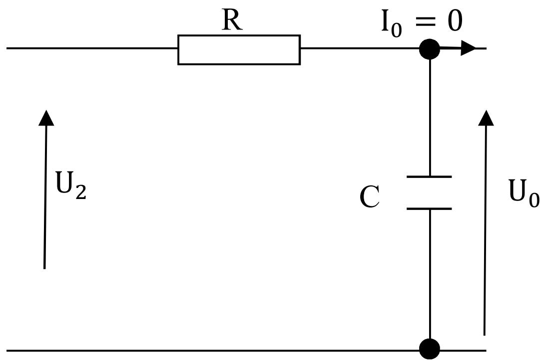
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$; $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$; $g(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$ avec $t \neq 1$;

$h(t) = \sqrt{t^2+1}$; $l(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$; $X(\omega) = \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$; $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$;

$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$; $f_0(C) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$; $W(C) = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$; $W(Q) = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$;

$V(x) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$

Exercice 2 On considère le filtre passe-bas suivant :



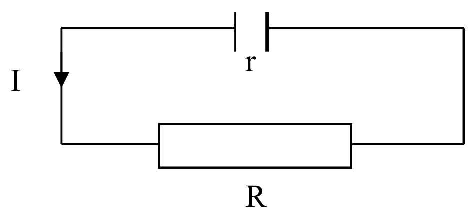
Sa fonction de transfert a pour module : $T = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \left|\dfrac{U_1}{U_2}\right|$

1) Exprimer le module T en fonction de $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.
2) Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction $\Omega \longmapsto T(\Omega)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exercice 3 L'impédance d'un dipôle R, L, C sous une tension alternative de fréquence f est :
$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ avec : $\omega = 2\pi f$.

1) Déterminer le signe de la dérivée de la fonction $\omega \longmapsto Z(\omega)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) Etudier la fonction $\omega \longmapsto I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}$ où U est l'amplitude constante de la tension, puis la tracer.

Exercice 4 Soit un générateur de force électromotrice E, de résistance interne r et le circuit ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée y soit maximum (on trouve $P(R) = E^2.\frac{R}{(R+r)^2}$)



Exercice 5 Calculer la limite des fonctions suivantes au « point » a donné.

1) $f(x)=\dfrac{(x^4-1)(x^2+3)}{2x(x^3-2)(x^2+2)}$ a=∞

2) $g(x)=\dfrac{(x^7-2x)(x-4)}{(x^6-2x)(x^3-x)}$ a=∞

3) $h(x)=\dfrac{x^6-3x^4+1}{(x+1)(x^4+3)}$ a=∞

4) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^3-1}$ a=1

5) $f(x)=\dfrac{x^3+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-2}$ a=∞

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ a=3

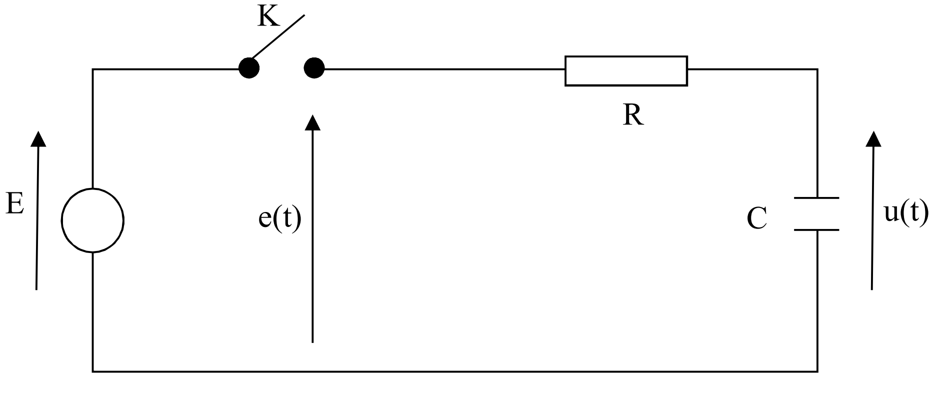
7) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+2x$ a=$-\infty$

--Exercices supplémentaires--------------------------------------

Exercice 6 Avec des logarithmes.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$. Etudier le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}^{+*}$
2) Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x)=(x+1).\ln x$.

Exercice 7 Dans le circuit ci-dessous on suppose que le condensateur est initialement chargé : On note U_0 la tension à ses bornes. A l'instant t = 0 on ferme l'interrupteur K. La fonction $t\mapsto e(t)$ est définie par : $e(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<0\\ E \text{ si } t\geq 0\end{cases}$.
On démontre que la fonction $t\mapsto u(t)$ est définie sur $[0;+\infty[$ par :
$u(t)=(U_0-E)e^{-\frac{t}{RC}}+E$.



1) Etudier sur $[0;+\infty[$ les variations de la fonction $t\mapsto u(t)$ et calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$, on discutera suivant les valeurs relatives de U_0 et E.
2) Déterminer la tangente à la courbe représentative de u à l'origine et donner l'allure de cette dernière.

Exercice 8 L'étude d'un circuit électrique conduit à étudier sur $[0;+\infty[$ la fonction $i : t \mapsto i(t) = I(e^{-\frac{t}{2}} + 2te^{-t})$ avec $I > 0$. On se propose de représenter graphiquement la fonction i.

1) Soit f, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t) = 1 - t - \frac{1}{4}e^{\frac{t}{2}}$. Etudier les variations de f ; en déduire que l'équation f(t) = 0 admet sur $[0;+\infty[$ une solution unique t_1 et que t_1 est élément de $[0.65 ; 0.66]$.
2) Déduire de 1) le signe de f(t).
3) Etudier les variations de i . Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)$. Tracer la courbe représentant i.

Exercice 9 Calculer à l'aide du nombre dérivé la limite suivante : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \sqrt{2}}{2\cos x - \sqrt{2}}$

Exercice 10 Calculer : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{x}{2})}{x^2}$. En déduire que si x tend vers 0, alors $\sqrt{1+x}$ est équivalent à $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$.

Exercice 11 Calculer les limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{sh}x)^{1/x}$ (on utilisera le logarithme et un équivalent.)

-----------------Extraits d'énoncés de préparation aux concours--------------------------------------

Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2005

1) Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$. Etudier g (ensemble de définition, tableau de variation et limites), puis en déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

2) Soit f, la fonction définie par : $f(x) = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$. Etudier f.

Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2003

Etudier la fonction f, définie par : $f(x) = x - \ln(\operatorname{ch}x)$

Partie D : Fonctions réciproques

Introduction

Une <u>fonction</u> f est définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si à tout x de D on peut associer un <u>unique</u> nombre noté f(x), et appelé image de x par f.

On écrit $\quad f : D \longrightarrow f(D)$
$\quad\quad\quad\quad\quad x \longmapsto y = f(x)$

D est appelé l'ensemble de définition de f, et f(D) l'ensemble image de D par f.

Peut-on déduire de f une fonction g, définie de la façon suivante ?

$$g : f(D) \longrightarrow D$$
$$y \longmapsto x \,/\, y = f(x)$$

La réponse est oui, à condition que la fonction f soit bijective sur D.

I. Fonction bijective

1) Définition

On appelle fonction <u>bijective sur D</u>, toute fonction $f : D \longrightarrow f(D)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \longmapsto y = f(x)$

vérifiant : $\quad \forall\, y \in f(D)\ \exists !\ x \in D \,/\, y = f(x)$ **, c'est-à-dire :**

« Pour tout y, élément de f(D), il existe un unique x, élément de D tel que y=f(x) »

<u>Exemples</u>

- ✓ La fonction carré est-elle bijective sur $\mathbb{R}$? sur $[\,0\,;+\infty\,[$?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

- ✓ Déterminer un intervalle sur lequel les fonctions cosinus, sinus et tangente sont bijectives.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Théorème

Toute fonction continue et strictement monotone sur D est bijective sur D.

Exemple La fonction définie par : $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$ est-elle bijective sur son ensemble de définition ? Pourquoi ? Déterminer un intervalle sur lequel cette fonction est bijective.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. Fonction réciproque

1) Définition

Définition/Théorème **Soit une fonction bijective f :** $\begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & f(D) \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$

il existe alors une fonction notée f^{-1} et appelée « fonction réciproque de f »,
telle que : $f^{-1} : \begin{array}{rcl} f(D) & \longrightarrow & D \\ y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}$

Remarques : $\forall\ x \in D,\ (f^{-1} \circ f)(x) = x$ **et** $\forall\ y \in f(D),\ (f \circ f^{\ 1})(y) = y$
Les courbes représentant f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite y = x.

Exemple Déterminer et représenter graphiquement la fonction réciproque de la fonction f définie par : $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$ sur I=$[1;\infty[$.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

2) Dérivée d'une fonction réciproque

Dérivée de f^{-1} Soit f, une fonction bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable et :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \; \forall\, y \in f(I) \text{ privé de } \left\{y \,/\, f'(f^{-1}(y)) = 0\right\}.$$

Remarque : f et f^{-1} sont continues et ont même sens de monotonie.

Démonstration

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

<u>Exemple</u> Soit f, la fonction définie par $f(x) = e^x$. Déterminer, si elle existe, la fonction réciproque de f, puis la représenter graphiquement. Retrouver alors la dérivée de la fonction logarithme népérien.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

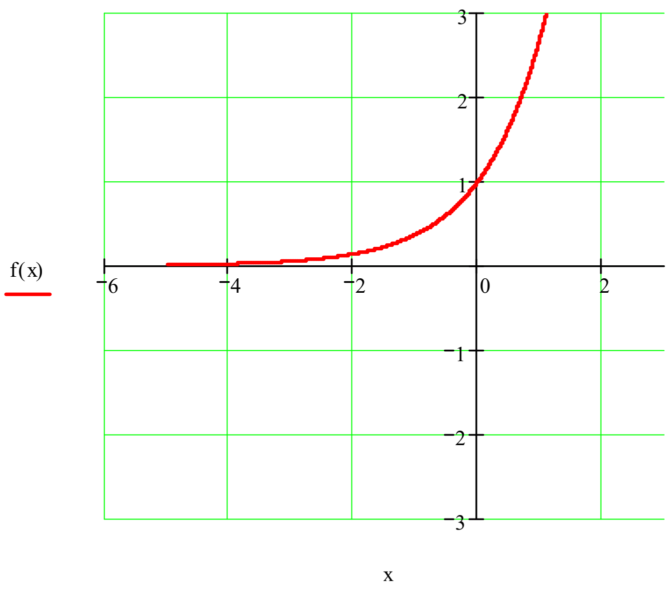
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………



III. Fonction réciproque des fonctions trigonométriques

1) Arcsinus

On appelle fonction sinus restreinte à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction définie par :

$$\sin_{/\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1\ ;\ 1]$$
$$x \longmapsto y = \sin(x)$$

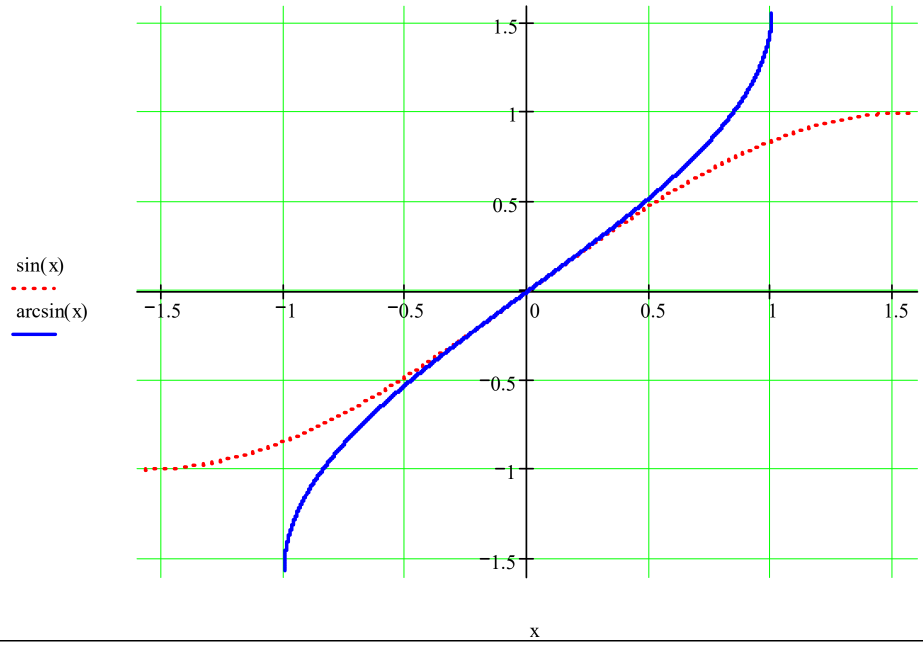
Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Arcsin et appelée Arcsinus, définie par :

$$\text{Arcsin} : [-1;\ 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y \longmapsto x = \text{Arcsin}(y) \text{ tel que } y = \sin(x)$$

Arcsin est une fonction continue et strictement croissante.

$$\sin(\text{Arcsin}(x)) = x \quad \forall\, x \in [-1\ ;\ 1]$$
$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \quad \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arcsin}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in]-1;1[$$



Dérivée de Arcsin

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2) Arccosinus

On appelle fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, la fonction définie par :

$$\cos_{/[0;\pi]} : [0\ ;\ \pi] \longrightarrow [-1\ ;\ 1]$$
$$x \longmapsto y = \cos(x)$$

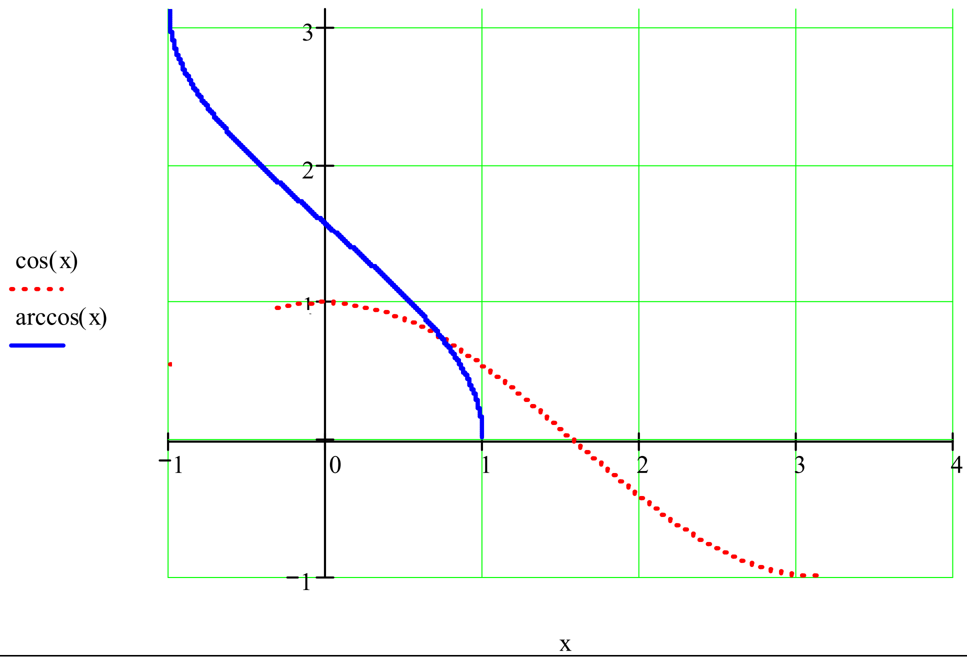
Cette fonction est strictement décroissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Arccos et appelée Arccosinus, définie par :

$$\text{Arccos} : [-1;\ 1] \longrightarrow [0\ ;\pi]$$
$$y \longmapsto x = \text{Arccos}(y) \text{ tel que } y = \cos(x)$$

Arccos est une fonction continue et strictement décroissante.

$$\cos(\text{Arccos}(x)) = x \quad \forall x \in [-1\ ;\ 1]$$
$$\text{Arccos}(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0\ ;\pi]$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arccos}(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1;1[$$



Dérivée de Arccos……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3) Arctangente

On appelle fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction définie par :

$$\tan_{/\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \tan(x)$$

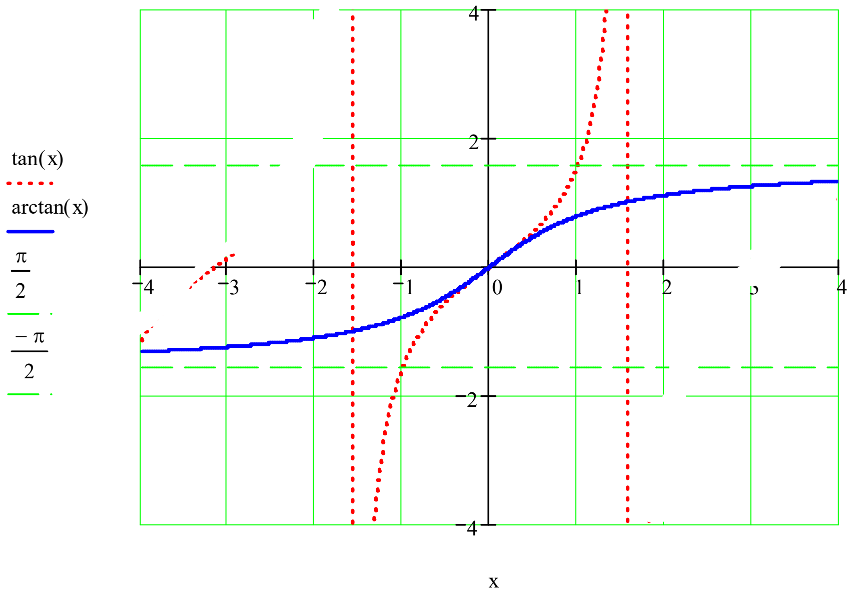
Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Arctan et appelée Arctangente, définie par :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$
$$y \longmapsto x = \text{Arctan}(y) \text{ tel que } y = \tan(x)$$

Arctan est une fonction continue et strictement croissante.

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



<u>Dérivée de Arctan</u>………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

IV. Fonction réciproque des fonctions hyperboliques

1) Argsinus hyperbolique

Soit la fonction sinus hyperbolique

$$\mathbf{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Argsh et appelée Argsinus hyperbolique, définie par :

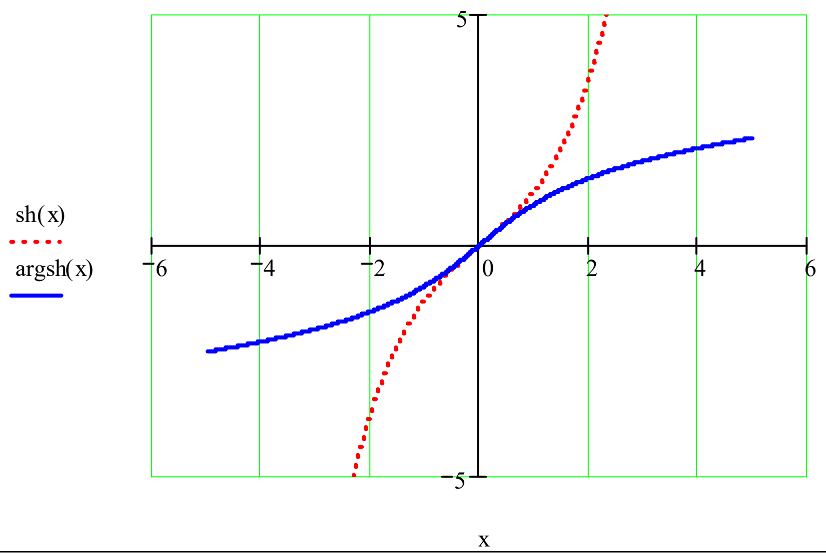
$$\mathbf{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto x = \mathrm{Argsh}(y) \text{ tel que } y = \mathrm{sh}(x)$$

Argsh est une fonction continue et strictement croissante.

$$\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{Argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Argsh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Expression de Argsh

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Notes

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Argcosinus hyperbolique

On appelle fonction cosinus hyperbolique restreinte à l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction définie par :

$$\mathbf{ch}_{/[0;+\infty[} : [0; +\infty[\longrightarrow [1; +\infty[$$
$$x \longmapsto y = \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Argch et appelée Argcosinus hyperbolique, définie par :

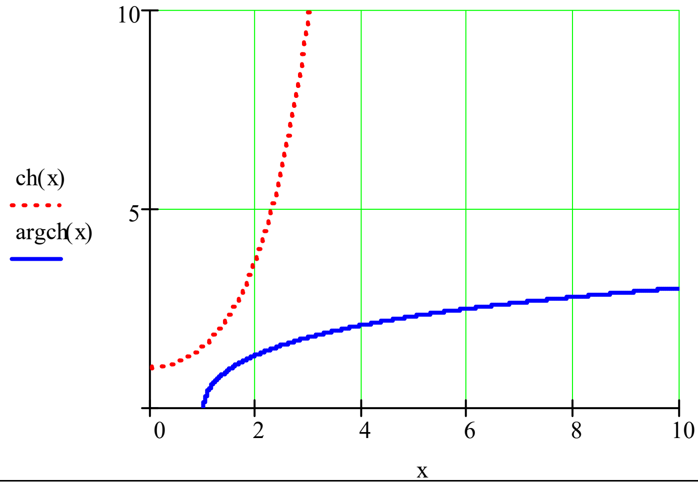
$$\mathbf{Argch} : [1; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$$
$$y \longmapsto x = \mathrm{Argch}(y) \text{ tel que } y = \mathrm{ch}(x)$$

Argch est une fonction continue et strictement croissante.

$$\mathrm{ch}\big(\mathrm{Argch}(x)\big) = x \quad \forall x \in [1; +\infty[$$
$$\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = x \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Argch}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \in]1; +\infty[$$

$$\mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \ \forall x \in [1; +\infty[$$



Expression de Argch……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3) Argtangente hyperbolique

Soit la fonction tangente hyperbolique :

$$\mathbf{th} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1\,;\,1[$$

$$x \longmapsto y = \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Argth et appelée Argtangente hyperbolique, définie par :

$$\mathbf{Argth} :]-1\,;\,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto x = \mathrm{Argth}(y) \text{ tel que } y = \mathrm{th}(x)$$

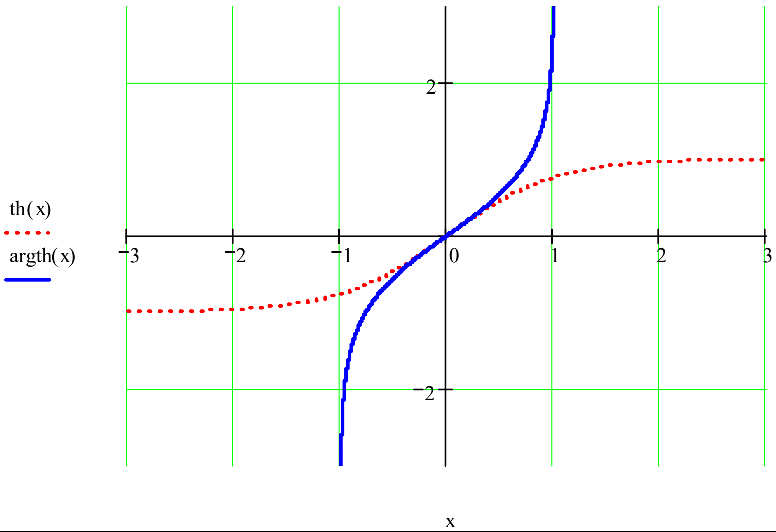
Argth est une fonction continue et strictement croissante.

$$\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x)) = x \quad \forall x \in]-1\,;\,1[$$

$$\mathrm{Argth}(\mathrm{th}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Argth}(x)) = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in]-1\,;\,1[$$

$$\mathrm{Argth}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \quad \forall x \in]-1\,;\,1[$$



Expression de Argth……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Exercices

Exercice 1 Soit la fonction : $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

1) Montrer que f admet deux domaines de monotonie.
2) Exprimer dans chacun de ces domaines la fonction réciproque.
3) Tracer dans chacun des cas les courbes de f et f^{-1} sur le même graphique.

Exercice 2 On donne les deux fonctions : $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ et $g(x) = \mathrm{Arctan}\dfrac{2x}{1-x^2}$

1) Ensembles de définition et dérivée de g(x)
2) Etablir une relation entre f '(x) et g '(x) et déduire la relation entre g(x) et f(x).
3) Tracer les courbes de f(x) et g(x) sur le même graphique.

Exercice 3 Etude et représentation des fonctions : $x \longmapsto y = f_1(x) = \sin(\mathrm{Arcsin} x)$ et $x \longmapsto y = f_2(x) = \mathrm{Arcsin}(\sin x)$

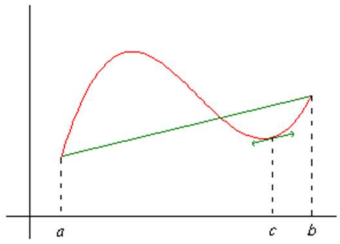
Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto f(x) = \mathrm{Arctan} x + \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}$
Calculer $f'(x)$ puis en déduire l'expression de f(x) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$

Partie E : Développements limités

I. Généralités :

1) Théorème des accroissements finis

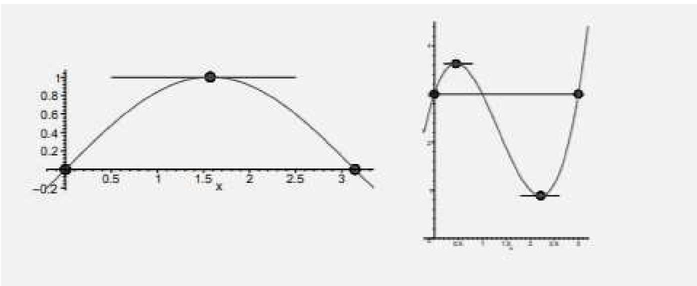
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] et dérivable sur]a,b[.
Il existe c]a,b[tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Théorème des accroissements finis

Cas particulier : le théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] et dérivable sur]a,b[telle que f(a)=f(b). Il existe c]a,b[tel que $f'(c) = 0$.



2) Définition / Théorème de Taylor

Si f est n fois dérivable sur [a,b], et si $f^{(n+1)}$ existe sur]a,b[, alors il existe c∈]a,b[tel que :

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a).f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}.f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}.f^{(3)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a)}_{\text{« Développement de Taylor d'ordre n en a. »}} + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c)}_{\text{« Reste du développement d'ordre n en a. »}}$$

En posant a = 0 et b = x dans la formule précédente, on obtient :

$$f(x) = f(0) + x.f'(a) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}.f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c)$$

Notes

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Formule de Taylor-Young

Si f est n fois dérivable sur un voisinage de 0, alors elle admet le développement limité en 0 à l'ordre n suivant :

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.f^{(3)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!}.f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

Où $O(x^n)$ se lit « grand O de x^n », est appelé le « reste d'ordre n », et est une fonction qui vérifie : $\lim_{x \to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$.

Remarques :
- Au voisinage de 0, la fonction $O(x^n)$ converge vers 0 plus rapidement que la fonction x^n.
- Dans ce chapitre, nous n'étudierons que les développements limités en 0, en effet, pour obtenir les développement limités en x_0 , il suffira alors de changer de variable : $X=x - x_0$
- D'autres notations existent pour exprimer le reste du développement limité de f à l'ordre n en x_0 : $O(x^n) = x^n.\varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

II. <u>Méthodes de calcul des développements limités</u> :

1) <u>Méthode de calcul 1</u> : en utilisant la formule de Taylor/young (pour les fonctions usuelles)

✓ Soit $f(x) = e^x$.
f est-elle développable à l'ordre n en 0 ? ……………………………………………

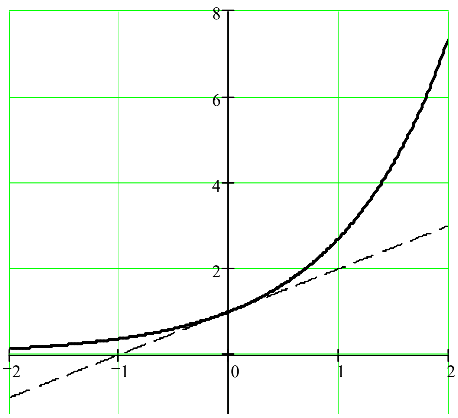
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

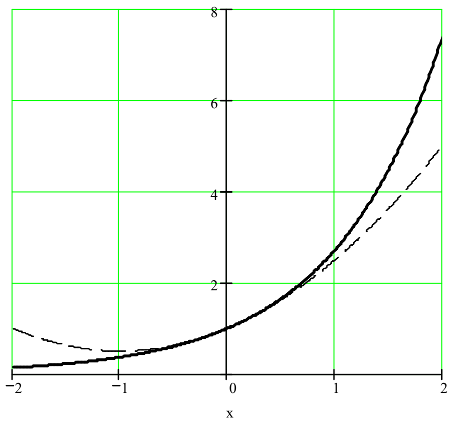
Le développement limité de f en 0 à l'ordre n est donc :

……………………………………………………………………………………………...



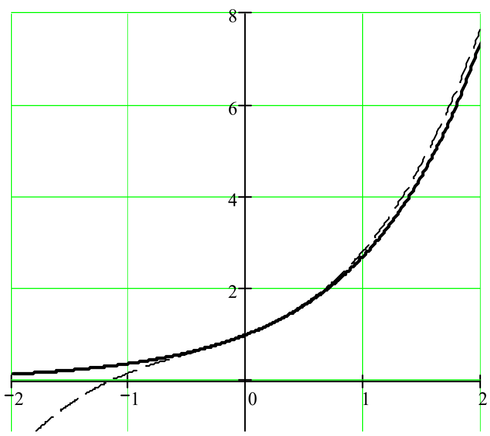
_____ $y= e^x$

------ $y=1+x$



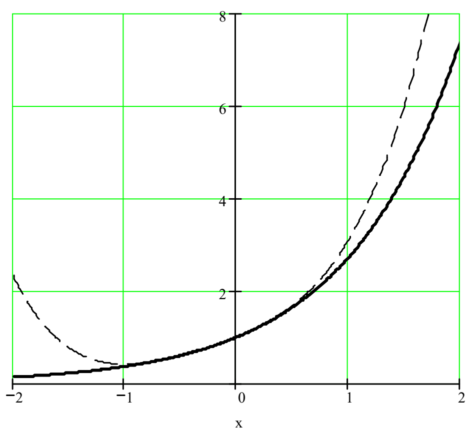
_____ $y= e^x$

------ $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$



_____ $y= e^x$

------ $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$



_____ $y= e^x$

------ $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$

- ✓ Soit f(x)=sinx.
  f est-elle développable à l'ordre n en 0 ? ……………………………………………….

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Le développement limité de f en 0 à l'ordre n est donc :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

Notes

Tableau des développements limités à l'ordre n en 0 des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^n)$$

Remarque : Le développement limité d'une fonction paire (respectivement impaire) ne contient que des puissances paires de x (respectivement impaires)

Exemple : A l'aide de ce tableau, déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$\frac{1}{1+x} =$ ....

$\sqrt{1+x} =$ ....

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} =$ ....

2) Méthode de calcul 2 **: Somme, Produit et Quotient de deux développements limités**

a) Somme : Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \frac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \frac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

, alors la fonction f+g est développable à l'odre n en 0 et : $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + O(x^n)$ **avec** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$

Exemple Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de :

$\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=$……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Vocabulaire Soit P, un polynôme de degré n. Soit m un entier tel que $m \le n$ **. La troncature de P à l'ordre m est le polynôme obtenu en enlevant tous les monômes de P de degré strictement supérieur à m.**
Par exemple : $P(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$**. La troncature de P à l'ordre 2 est le polynôme suivant :** $H(x) = 2x^2 - x + 1$ **.**
On dit aussi que H est le polynôme P, tronqué à l'ordre 2.

b) Produit : Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

, alors la fonction f.g est développable à l'ordre n en 0 et : $(f.g)(x) = H(x) + O(x^n)$ **avec** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O(x^n)}{x^n} = 0$ **et où H est le polynôme P.Q, tronqué à l'ordre n.**

Exemple Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$e^x.\sin x =$……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

c) <u>Quotient</u> : Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est développable à l'ordre n en 0 et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = H(x) + O(x^n)$ **avec** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O(x^n)}{x^n} = 0$ **et où H est le polynôme obtenu en effectuant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q.**

<u>Exemple</u> Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de :

tanx =………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3) Méthode de calcul 3 **: Dérivation et intégration d'un développement limité.**

a) Dérivation : Soit f une fonction développable à l'ordre n en 0, telle que :
$f(x) = P(x) + O_1(x^n)$ **avec** $\lim_{x\to 0} \frac{O_1(x^n)}{x^n} = 0$ **, alors la dérivée de f est développable à l'ordre n-1 en 0 et :** $f'(x) = P'(x) + O(x^{n-1})$ **avec** $\lim_{x\to 0} \frac{O(x^{n-1})}{x^{n-1}} = 0$

Exemple En dérivant le développement limité de ln(1+x) à l'ordre n+1 en 0, retrouver le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre n .

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

b) Primitive : Soit f une fonction développable à l'ordre n en 0, telle que :
$f(x) = P(x) + O_1(x^n)$ **avec** $\lim_{x\to 0} \frac{O_1(x^n)}{x^n} = 0$ **alors toute primitive F de f est développable à l'ordre n+1 en 0 et :** $F(x) = Q(x) + O(x^{n+1})$ **avec** $\lim_{x\to 0} \frac{O(x^{n+1})}{x^{n+1}} = 0$ **et où Q est une primitive du polynôme P.**

Exemple On rappelle que $(\text{Arc}\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. En intégrant le développement limité à l'ordre 2n en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$, déterminer le développement limité à l'ordre 2n+1 en 0 de Arctanx.

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

4) Méthode de calcul 4 : **Développement d'une fonction composée.**

Soit f et g deux fonctions développables à l'ordre n en 0, telles que :
$$\begin{cases} f(x) = P(x) + O_1(x^n) \text{ avec} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_1(x^n)}{x^n} = 0 \\ g(x) = Q(x) + O_2(x^n) \text{ avec} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O_2(x^n)}{x^n} = 0 \end{cases}$$
, et f(0)=0. Alors la fonction $f \circ g$ est développable à l'ordre n en 0 et : $(f \circ g)(x) = H(x) + O(x^n)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{O(x^n)}{x^n} = 0$ et où H est le polynôme $P \circ Q$ tronqué à l'ordre n.

Exemple 1 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$:

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Exemple 2 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 2 de ln(1+x) :

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

III. Applications :

1) Position relative d'une courbe et de sa tangente en 0 :

f est dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0)$ si et seulement si :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

C'est, par définition, le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)\,x + f(0)$$

On reconnaît la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par le signe de

$$d(x) = f(x) - [f'(0)\,x + f(0)]$$

- Si $d(x) > 0$ la courbe est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
- Si $d(x) < 0$ la courbe est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

2) Développement asymptotique en l'infini

Considérons une fonction f définie au voisinage de $+\infty$, admettant un DL d'ordre n au voisinage de 0.
On pose alors t=1/x et on utilise le DL d'ordre n de f au voisinage de 0 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) \quad \text{avec} \lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) = 0$$

Alors :

1. $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$
   Donc la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ vers $+\infty$
2. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$ est donnée par le signe de

$$d(x) = f(x) - (ax+b)$$

   Si $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ et si $d(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ.

Au voisinage de $+\infty$, $d(x) = \frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) = \frac{c}{x^p}\left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)\right]$ a même signe que $\frac{c}{x^p}$
On procède de façon analogue au voisinage de $-\infty$.

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

Exercices

Exercice 1 : Rechercher le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre n indiqué :

a) $\ln(1+x)+\text{sh}x$; avec $n=5$ b) $\ln\left(1-x^2\right)$; avec $n=6$ c) $\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$; avec $n=6$

d) $\sin x.\ln(1+x)$; avec $n=4$ e) $\cos(x).\sin(2x)$; avec $n=4$ f) $\dfrac{\sin x}{x}$; avec $n=6$.

Exercice 2 :

Rechercher le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

a) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ b) $\text{Arctan}(\sin x)$ c) $e^{\cos x}$ d) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ e) $\tan x$

Exercice 3 : Application au calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{x-\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arc}\tan x - x}{\tan x - \text{Arc}\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\sin x-\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$

Exercice 4 : Application à l'étude d'une fonction

1) Rechercher le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction : $f(x)=\dfrac{x}{1-e^x}$, en déduire l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0. Quelle est la position de T par rapport à C_f ?

2) Etudier la position relative de la courbe C d'équation $y = f(x) = x - 3 - 2.\ln(x+1)$ et de sa tangente au point A(0 ;-3)

3) Etudier au voisinage de l'infini $f(x) = x + 2\sqrt{x^2 - x}$

4) Rechercher le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 2 de $\dfrac{f(x)}{|x|}$ où $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. En déduire les équations des asymptotes à C_f en $+\infty$ et $-\infty$. Quelle est la position des asymptotes par rapport à C_f ?

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………………........