CHAPITRE 3 – Exercice 3 & 4 page 52

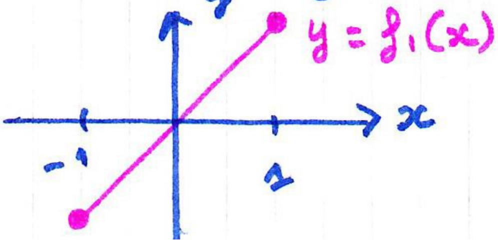
Exercice 3

Etude et représentation des fonctions : $x \longmapsto y = f_1(x) = \sin(\mathrm{Arcsin}x)$

- $f_1(x) = \sin(\mathrm{Arcsin}\, x)$.

  $\mathcal{D}_{f_1} = [-1;1]$

et $f_1(x) = x \quad \forall x \in [-1;1]$ voir Cours page 43.



Exercice 3

Etude et représentation des fonctions : $x \longmapsto y = f_2(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$

$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$.

→ f est périodique de période 2π :

$f_2(x+2\pi) = \text{Arcsin}(\sin(x+2\pi)) = \text{Arcsin}(\sin x) = f_2(x)$

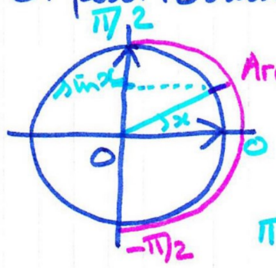
car $x \longmapsto \sin x$ est 2π-périodique. ⇒ $I = [-\pi;\pi]$.

→ $f_2(-x) = \text{Arcsin}(\sin(-x)) = \text{Arcsin}(-\sin x) = -\text{Arcsin}(\sin x)$

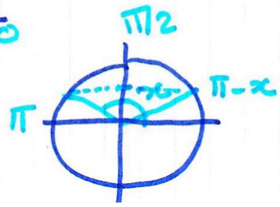
$f_2(-x) = -f_2(x)$ car sin et Arcsin sont impaires.

f_2 est impaire

On peut réduire alors l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$.

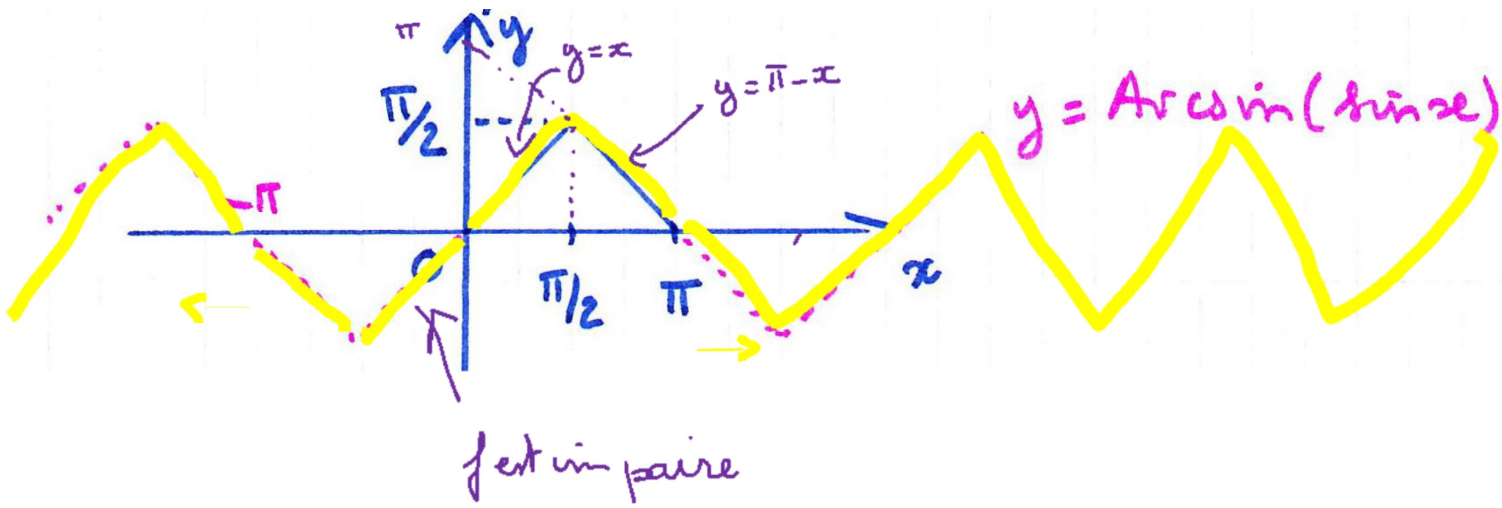


$\text{Arcsin}(\sin x) = x \quad \forall x \in [0;\pi/2]$



$\text{Arcsin}(\sin x) = \pi - x$

$\forall x \in [\pi/2;\pi]$.


y
π
π/2
y=x
y=π−x
y = Arcsin(sin x)
−π
0
π/2
π
x
f est impaire

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto f(x) = \text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x}$
Calculer $f'(x)$ puis en déduire l'expression de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

Donc $f(x) = \text{Cte} \quad \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

. si $x > 0$, alors $f(x) = C_1$

Calculons C_1. Pour cela on choisit $x \in]0; +\infty[$:

$x = 1$, alors $f(1) = \text{Arctan}\,1 + \text{Arctan}\,1 = C_1$

$C_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C_1 = \frac{\pi}{2}$. Donc $f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$

• Si $x < 0$, alors $f(x) = C_2$

$$f(-1) = \operatorname{Arctan}(-1) + \operatorname{Arctan}(-1) = C_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad C_2 = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Donc $f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$

<u>Conclusion</u> :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0.$$