Licence Sciences de la Vie

1re année

RI-MB1 – Mathématiques

Recueil d'exercices

Gloria Faccanoni

https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=4848

Année 2023 – 2024

Dernière mise-à-jour : Lundi 28 août 2023

Table des matières

UNIVERSITÉ DE TOULON

Avertissement : ces notes sont régulièrement mises à jour et corrigées, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs. Merci de me les communiquer. Toutes les remarques ou questions permettant d'en améliorer la rédaction peuvent être envoyées à l'adresse `gloria.faccanoni@univ-tln.fr`

Semaine	CM	TD
36	1. Fonctions, transformations de graphes 2. Fonctions usuelles et propriétés	
37	3. Fonctions usuelles et propriétés	1. 1.1 - 1.2 - Test à la page 106
38		2. 1.3 - 1.5 - 2.2 - 2.3
39		3. 2.4 - 2.8 - 2.9 - 2.11 - 2.12
40	4. Limites et continuité	4. 2.13 - 2.15 - 2.17 - 2.18 - 2.19 - 2.20
41	5. Dérivées	5. 2.22 - 2.25 - 2.26 - 2.30
42		6. 2.31 - 2.32 - 2.33 - 2.39 - 2.40 - 2.43
43		
44	Vacances	
45	6. Primitives/Intégrales	7. 3.1 - 3.2 - 3.3 - 3.4
46	7. Annales	8. 3.7 - 3.8 - 3.9 - 3.10 - 4.1 - 4.2 - 4.3
47	**CC_1 chapitres 1-2 (13 novembre)**	9. 4.7 - 4.8 - 4.14 - 4.19 - 4.20
48		10. 4.26 - 4.27 - 4.31 - 4.32 - 5.5 - 5.6
49		11. 6.1 - 6.2 - 6.3 - 6.4
50		12. 6.5 - 6.7 - 6.11 - 6.13 - 6.14
51	**CC_2 chapitres 3-4 (18 décembre)**	13. Annales
2	**CC_F chapitres 1-6 (janvier)**	

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ `gloria.faccanoni@univ-tln.fr`
`http://faccanoni.univ-tln.fr`

Notations

 exercice à maîtriser (en général traité en TD)

 exercice d'auto-entraînement ou atypique

Symboles utilisés dans le document

$>$	strictement supérieur
$<$	strictement inférieur
$\geq$	supérieur ou égal
$\leq$	inférieur ou égal
$\neq$	différent
$\{\quad\}$	ensemble
$\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$	ensemble $\mathscr{A}$ privé de l'ensemble $\mathscr{B}$
$\emptyset$	ensemble vide
$\mid$	tel que
$\in$	appartient
$\notin$	n'appartient pas
$\forall$	pour tout (quantificateur universel)
$\exists$	il existe (quantificateur universel)
$\nexists$	il n'existe pas
$\exists!$	il existe un et un seul
$\subset$	est sous-ensemble (est contenu)
$\vee$	ou
$\wedge$	et
$\neg$	non
$\Longrightarrow$	si … alors ; implique
$\Longleftrightarrow$	si et seulement si
ssi	si et seulement si
$\ln$	logarithme de base e
$\log_a$	logarithme de base a
∞	infini
$\int$	symbole d'intégrale
$\sum_{i=0}^{n} a_i$	somme par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$
$\prod_{i=0}^{n} a_i$	produit par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$
$n!$	n factoriel, équivaut à $1 \times 2 \times \cdots \times n$
$g \circ f$	composé de f par g (on dit «g rond f» ou encore «f puis g»)
$f', \frac{df}{dx}$	symboles de dérivée
$\overset{(H)}{=}$	utilisation de la règle de l'Hôpital
$\overset{(P.P.)}{=}$	intégration par parties

Ensembles usuels en mathématiques

On désigne généralement les ensemble les plus usuels par une lettre à double barre :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs $\{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers non nuls $\{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\left(\frac{p}{q} \text{ tel que } \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right)$

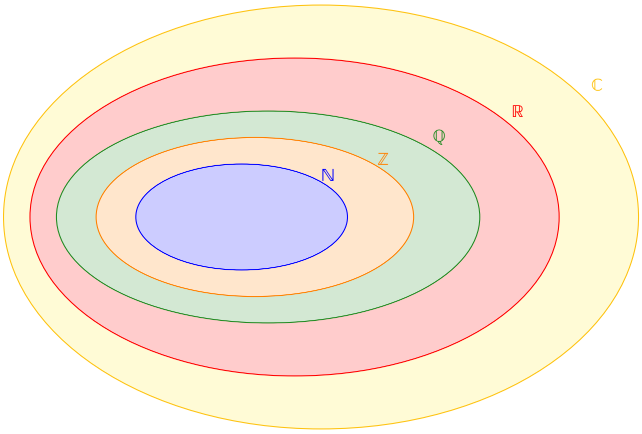
$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels

$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels autres que 0

$\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls

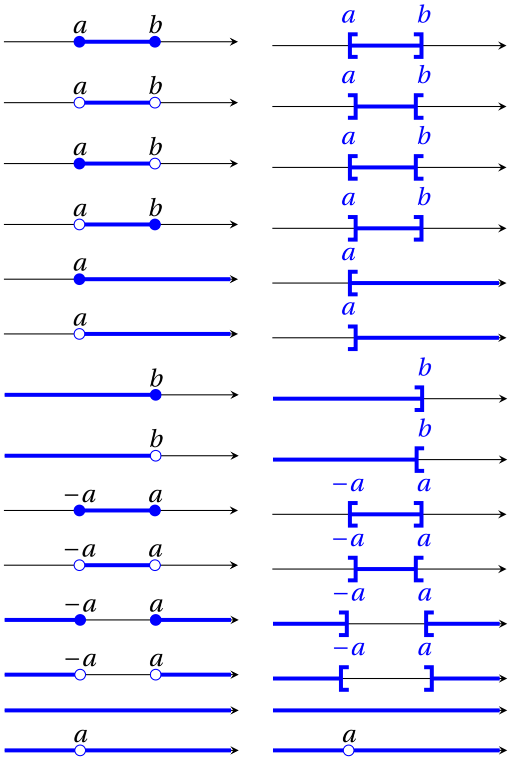
$\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes



Intervalles

Inégalité(s)	Ensemble	Représentations graphique
$a \le x \le b$	$[a, b]$	
$a < x < b$	$]a, b[$	
$a \le x < b$	$[a, b[$	
$a < x \le b$	$]a, b]$	
$x \ge a$	$[a, +\infty[$	
$x > a$	$]a, +\infty[$	
$x \le b$	$]-\infty, b]$	
$x < b$	$]-\infty, b[$	
$\lvert x\rvert \le a$ avec $a \ge 0$	$[-a, a]$	
$\lvert x\rvert < a$ avec $a \ge 0$	$]-a, a[$	
$\lvert x\rvert \ge a$ avec $a \ge 0$	$]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$	
$\lvert x\rvert > a$ avec $a \ge 0$	$]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$	
$\forall x \in \mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$	
$x \neq a$	$]-\infty, a[\cup]a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{a\}$	



Chapitre 1.

Fonctions et transformations de graphes

1.1. Ensemble de définition

Exercice 1.1

Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$
7. $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$
10. $f(x) = e^x$
11. $f(x) = e^x - x^2$
12. $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$
13. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2+e^x}$
14. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$
16. $f(x) = \ln(x)$
17. $f(x) = \ln(x) - x$
18. $f(x) = \ln(e^x)$
19. $f(x) = e^{\ln(x)}$
20. $f(x) = \ln(1-x)$
21. $f(x) = \ln(1-x^2)$
22. $f(x) = |\ln(x)|$
23. $f(x) = \ln(|x-2|)$
24. $f(x) = x^3\ln(x)$
25. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+5x+7}$
26. $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$
27. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+2)}{2x}$
28. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}\right)$
29. $f(x) = \sqrt{x}$
30. $f(x) = \sqrt{|x|}$
31. $f(x) = \sqrt{x^2}$
32. $f(x) = (\sqrt{x})^2$
33. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
34. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
35. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
36. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$
37. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
38. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
39. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
40. $f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$
41. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$
42. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$
43. $f(x) = \tan(2x)$
44. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$
45. $f(x) = \dfrac{1}{x\cos(x)}$
46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x+2}}{x}$
47. $f(x) = \sqrt{3-\log_2(x+5)}$
48. $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+4x+3}\right)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
49. $f(x) = \dfrac{1}{x^x}$
50. $f(x) = x^{1/x}$

Correction

1. $\mathbb{R}$
2. $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0\} = \mathbb{R}^*$
3. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2+1\neq 0\right\} = \mathbb{R}$
4. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2-1\neq 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$
5. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, (x-1)^2\neq 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
6. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, (x+1)^2\neq 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
7. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 1-x^2\neq 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$ et on a $f(x) = \frac{1}{1+x}$
8. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)\neq 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{2;3\}$
9. $\{x\in\mathbb{R} \mid x-1\neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et on a $f(x) = x-1$
10. $\mathbb{R}$
11. $\mathbb{R}$
12. $\mathbb{R}$
13. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2+e^x\neq 0\right\} = \mathbb{R}$
14. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2+1\neq 0\right\} = \mathbb{R}$
15. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, e^x-1\neq 0\right\} = \mathbb{R}^*$
16. $\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\} = \mathbb{R}_*^+$
17. $\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\} = \mathbb{R}_*^+$
18. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, e^x>0\right\} = \mathbb{R}$ et on a $f(x) = x$
19. $\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\} = \mathbb{R}_+^*$ et on a $f(x) = x$
20. $\{x\in\mathbb{R} \mid 1-x>0\} =]-\infty;1[$
21. $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 1-x^2>0\right\} =]-1;+1[$
22. $\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\} = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$
23. $\{x\in\mathbb{R} \mid |x-2|>0\} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
24. $\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\} = \mathbb{R}_+^*$

25. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } x^2 + 5x + 7 \neq 0 \right\} = \mathbb{R}_+^*$

26. $\{ x \in \mathbb{R} \mid \ln(\ln(x)) > 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \ln(x) > 1 \} =]e; +\infty[$

27. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 > 0 \text{ et } x \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^*$

28. $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{e^x - 1}{(x-1)(x+2)} > 0 \text{ et } (x-1)(x+2) \neq 0 \right\} =]-2;0[\cup]1;+\infty[$

29. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} = \mathbb{R}_+$

30. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 0 \} = \mathbb{R}$

31. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0 \right\} = \mathbb{R}$ et $f(x) = |x|$

32. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} = \mathbb{R}_+$ et $f(x) = x$

33. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \geq 0 \right\} = \mathbb{R}$

34. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0 \right\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

35. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0 \right\} = [-1, 1]$

36. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 \geq 0 \right\} =]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$

37. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0 \right\} = \mathbb{R}$

38. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge 1 - x \geq 0 \text{ et } \sqrt{1-x} \neq 0 \right\} = [0; 1[$

39. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0 \right\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

40. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 - \sqrt{1-x} \neq 0 \text{ et } 1 - x \geq 0 \right\} =]-\infty; 1] \setminus \{0\}$

41. $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x}{x-1} \geq 0 \right\} =]-\infty; 0]\cup]1; +\infty[$

42. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ et } x - 1 > 0 \} =]1; +\infty[$

43. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

44. $\{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(2x) \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

45. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x\cos(x) \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

46. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid e^x + 2 \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^*$

47. $$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} x + 5 > 0, \\ \log_2(x+5) \leq 3 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} x > -5, \\ x + 5 \leq 2^3 = 8 \end{cases} \right\} =]-5; 3]$$

48. $$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x^2+4x+3} > 0 \text{ car } [f(x)]^\alpha = e^{\alpha \ln[f(x)]} \\ x^2 + 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \right\} =]-\infty; -3[\cup]-1; 0[\cup]2; +\infty[$$

49. $x^{-x} = \exp(-x\ln(x))$ donc $\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \} = \mathbb{R}_+^*$

50. $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ donc $\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \} = \mathbb{R}_+^*$

1.2. Composition de fonctions

Exercice 1.2

Compléter les tableaux suivants par des manipulations formelles sans s'intéresser des domaines de définition.

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x^4 - 2x^3$	3	
3	$y^4 - 2y^3$	
x^2	$\sqrt{y}$	
$\sqrt{x}$	y^2	
$2x - 8$	y^2	
x^2	$2y - 8$	
$x - 7$	$\sqrt{y}$	
$x + 2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
	$1 + \frac{1}{y}$	x
	e^y	$\frac{1}{e^x}$

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x+1}$		x^2
$\frac{1}{x+1}$		$\int_0^x \sin(t)\,dt$

Correction

$$\begin{tikzcd} g\circ f : \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g\circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] & y=f(x) \arrow[r, mapsto] & z=g(y)=g(f(x)) \end{tikzcd}$$

1. $x\mapsto y=x^4-2x^3\mapsto z=3=3$
2. $x\mapsto y=3\mapsto z=y^4-2y^3=81-2\times 27=27$
3. $x\mapsto y=x^2\mapsto z=\sqrt{y}=\sqrt{x^2}=|x|$
4. $x\mapsto y=\sqrt{x}\mapsto z=y^2=(\sqrt{x})^2=x$
5. $x\mapsto y=2x-8\mapsto z=y^2=(2x-8)^2$
6. $x\mapsto y=x^2\mapsto z=2y-8=2x^2-8$
7. $x\mapsto y=x-7\mapsto z=\sqrt{y}=\sqrt{x-7}$
8. $x\mapsto y=x+2\mapsto z=3y=3x+6$
9. $x\mapsto y=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}\mapsto z=\frac{y}{y-1}=1+\frac{1}{y-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}-1}=x$ donc $g=f^{-1}$

10. $x\mapsto y=f(x)\mapsto z=\sqrt{y-5}=\sqrt{f(x)-5}=\sqrt{x^2-5}$ donc $f(x)=x^2$
11. $x\mapsto y=f(x)\mapsto z=1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{f(x)}=x$ donc $f(x)=\frac{1}{x-1}$
12. $x\mapsto y=f(x)\mapsto z=e^y=e^{f(x)}=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$ donc $f(x)=-x$

13. $x\mapsto y=\frac{1}{x}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{1}{x}\right)=x$ *i.e.* $g=f^{-1}$: on cherche x tel que $y=\frac{1}{x}$, autrement dit $x=\frac{1}{y}$ et comme $x=g(y)$ alors $g(y)=\frac{1}{y}$.
14. $x\mapsto y=\frac{2x+3}{x+7}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{2x+3}{x+7}\right)=x$ *i.e.* $g=f^{-1}$: on cherche x tel que $y=\frac{2x+3}{x+7}$, autrement dit $x=\frac{3-7y}{y-2}$ et comme $x=g(y)$ alors $g(y)=\frac{3-7y}{y-2}$.
15. $x\mapsto y=\frac{2x+3}{x+7}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{2x+3}{x+7}\right)=\frac{1}{x}$ donc, d'après $y=\frac{2x+3}{x+7}$ on a $x=\frac{3-y}{y-2}$ et $g(y)=\frac{1}{x}=\frac{y-2}{3-7y}$
16. $x\mapsto y=\frac{1}{x+1}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{1}{x+1}\right)=x^2$ donc, d'après $y=\frac{1}{x+1}$ on a $x=\frac{1}{y}-1$ et $g(y)=\left(\frac{1}{y}-1\right)^2$
17. $x\mapsto y=\frac{1}{x+1}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{1}{x+1}\right)=\int_0^x\sin(t)\,\mathrm{d}t$ donc, d'après $y=\frac{1}{x+1}$ on a $x=\frac{1}{y}-1$ et $g(y)=\int_0^{\frac{1}{y}-1}\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Ainsi

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
x^4-2x^3	3	3
3	y^4-2y^3	27
x^2	$\sqrt{y}$	$\lvert x\rvert$
$\sqrt{x}$	y^2	x
$2x-8$	y^2	$(2x-8)^2$
x^2	$2y-8$	$2x^2-8$
$x-7$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{x-7}$
$x+2$	$3y$	$3x+6$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	x

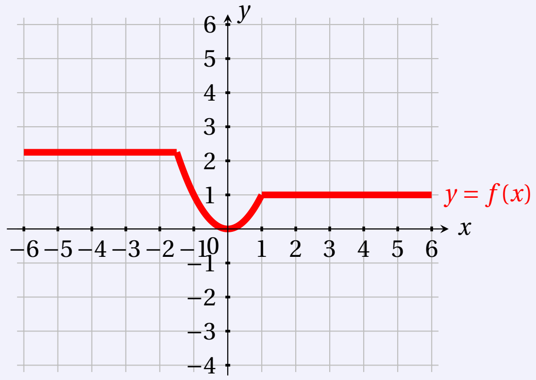
$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
x^2	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{y}$	x
$-x$	e^y	$\frac{1}{e^x}$

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	x
$\frac{2x+3}{x+7}$	$\frac{3-7y}{y-2}$	x
$\frac{2x+3}{x+7}$	$\frac{y-2}{3-y}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x+1}$	$\left(\frac{1}{y}-1\right)^2$	x^2
$\frac{1}{x+1}$	$\int_0^{\frac{1}{y}-1}\sin(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_0^x\sin(t)\,\mathrm{d}t$

1.3. Transformations de graphes

Exercice 1.3
On considère la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto 6 - f(x)$,
2. $x \mapsto \dfrac{1}{2} f(x) - 1$,
3. $x \mapsto f(x-1) + 1$,
4. $x \mapsto f(-2x) - 4$,
5. $x \mapsto f(2x-1) + 3$.



Calculer la solution de $f(x-1) \le 1$.

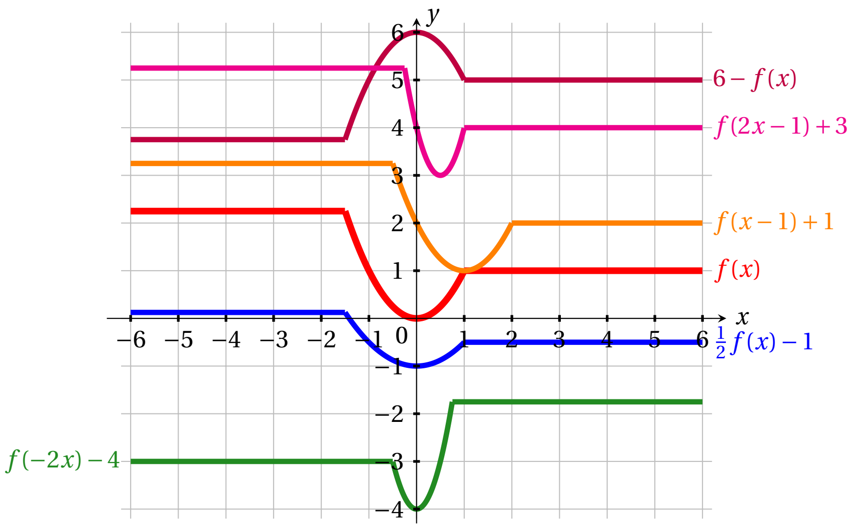
Correction
On a des fonctions de la forme $x \mapsto A + Bf(Cx + D)$.

Un point de coordonnées $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}} = f(x_{\text{old}}))$ se trouvera en $\left(\frac{x_{\text{old}}-D}{C}, By_{\text{old}} + A\right)$.

Nous allons en particulier voir où se déplacent les points $(0,0)$ et $(1,1)$ car leur déplacement permettra de reconstruire la fonction complète facilement.

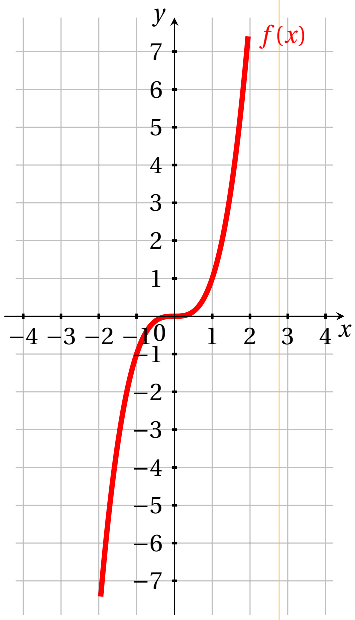
1. $A = 6$, $B = -1$, $C = 1$, $D = 0$. Le point $(0,0)$ va en $(0,6)$, le point $(1,1)$ va en $(1,5)$.
2. $A = -1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $D = 0$. Le point $(0,0)$ va en $(0,-1)$, le point $(1,1)$ va en $(1,-\frac{1}{2})$.
3. $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -1$. Le point $(0,0)$ va en $(1,1)$, le point $(1,1)$ va en $(2,2)$.
4. $A = -4$, $B = 1$, $C = -2$, $D = 0$. Le point $(0,0)$ va en $(0,-4)$, le point $(1,1)$ va en $(-\frac{1}{2},-3)$.
5. $A = 3$, $B = 1$, $C = 2$, $D = -1$. Le point $(0,0)$ va en $(\frac{1}{2},3)$, le point $(1,1)$ va en $(1,4)$.

On a $f(x-1) \le 1$ ssi $f(x-1) + 1 \le 2$ donc ssi $x \ge 0$.



Exercice 1.4

On considère la fonction suivante $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

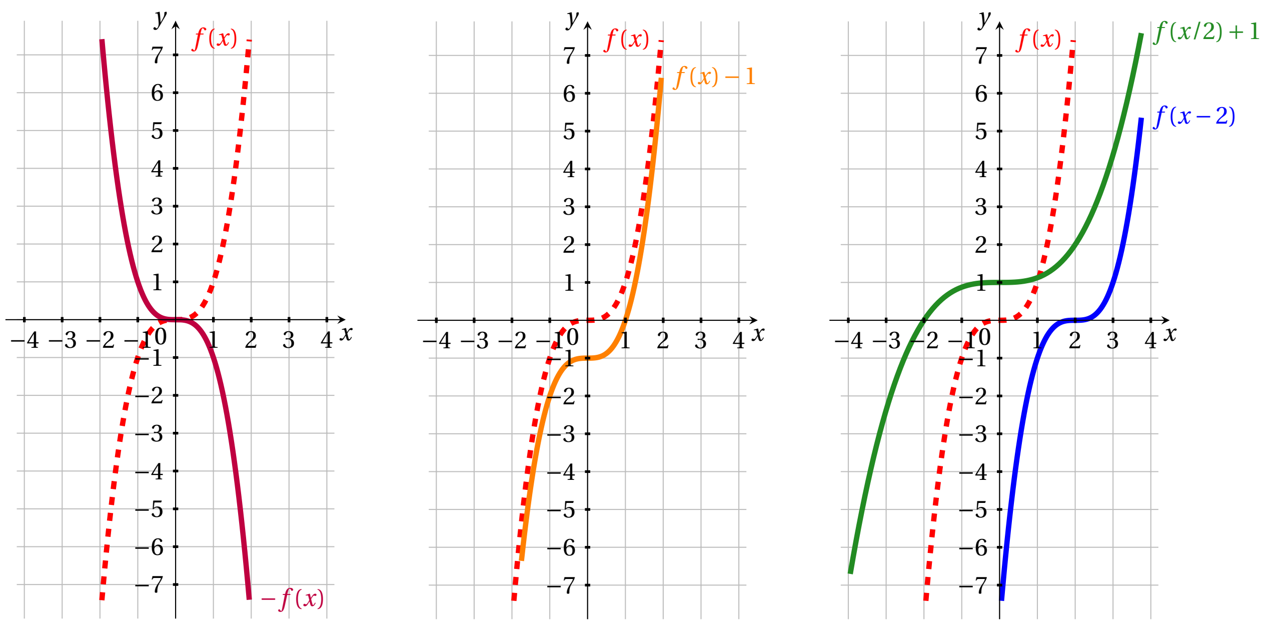


1. $x \mapsto -f(x)$,
2. $x \mapsto f(x) - 1$,
3. $x \mapsto f(x-2)$,
4. $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.

Calculer la solution de $f(x-2) \geq 1$.

On a $f(x-2) \geq 1$ ssi $x - 2 \geq 1$.

Correction



Exercice 1.5

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi; \pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

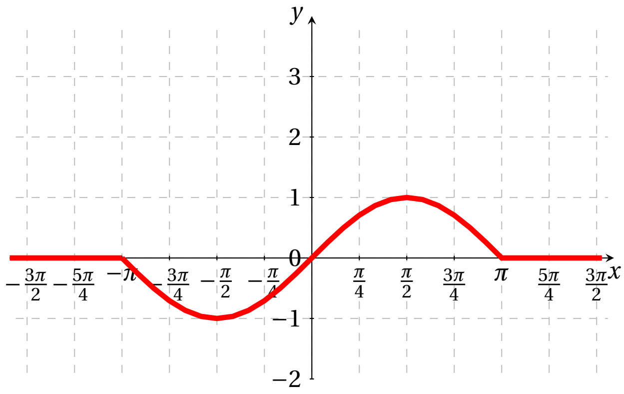
Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Correction

On remarque que

$$g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \in \left[-\frac{3}{4}\pi; \frac{1}{4}\pi\right], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

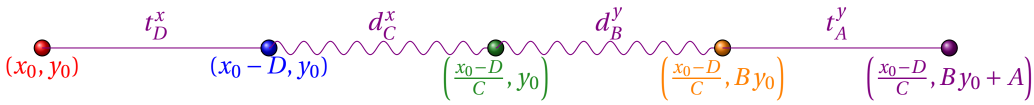
Le graphe de f est



Pour tracer le graphe de $y = A + Bf(Cx + D)$ on commence par

- tracer le graphe de $y = f(x)$,
- puis on trace le graphe de $y = f(x + D)$ [les points d'abscisse x vont en les points d'abscisse $x - D$],
- ensuite le graphe de $y = f(Cx + D)$ [les points d'abscisse x vont en les points d'abscisse x/C],
- puis le graphe de $y = Bf(Cx + D)$ [les points d'ordonnée y vont en les points d'ordonnée By] et
- enfin de $y = A + Bf(Cx + D)$ [les points d'ordonnée y vont en les points d'ordonnée $y + A$].

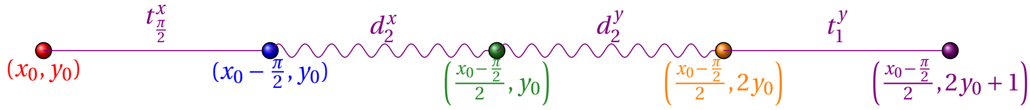
En résumé, un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

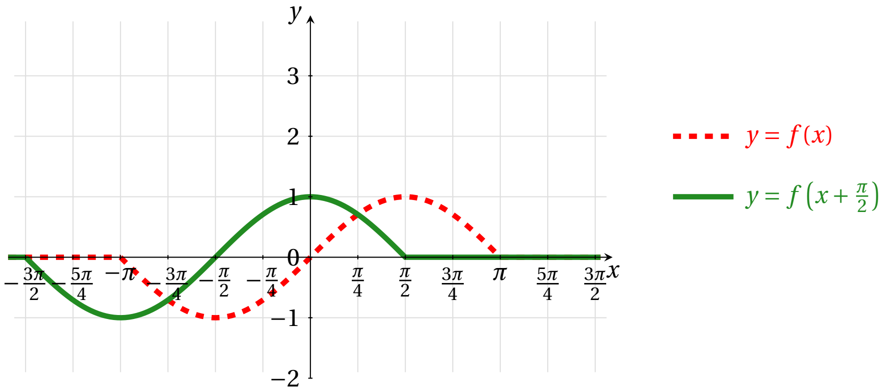


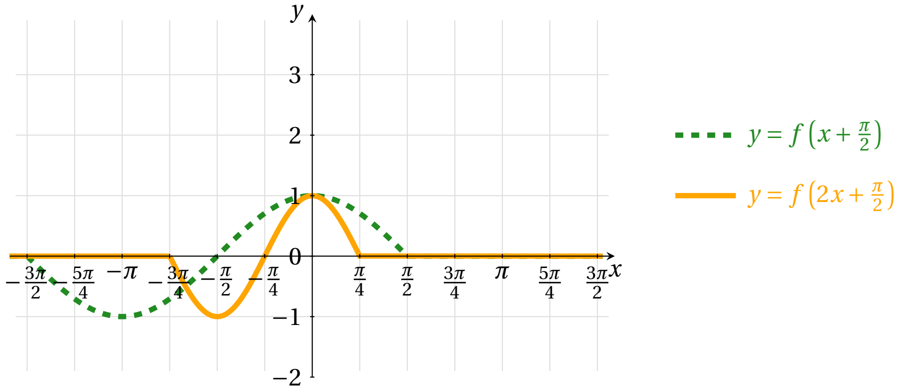
Par exemple,

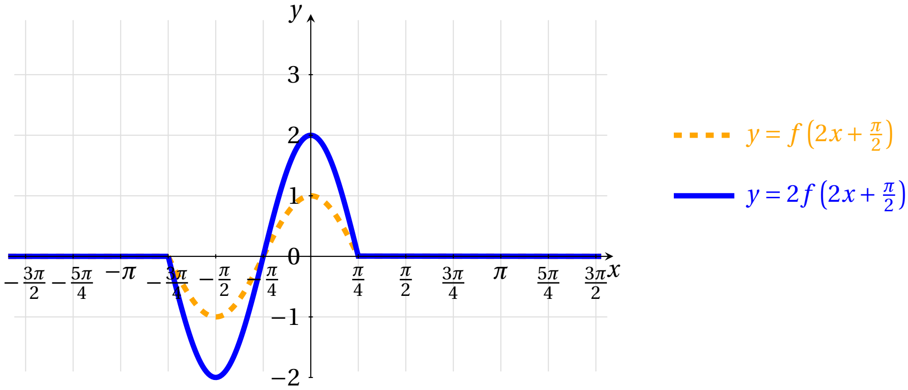
- le point $(-\pi, 0)$ va en $\left(\frac{-\pi-\frac{\pi}{2}}{2}, 1 + 2 \times 0\right) = \left(-\frac{3\pi}{4}, 1\right)$,
- le point $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ va en $\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2}, 1 + 2 \times 1\right) = (0, 3)$.

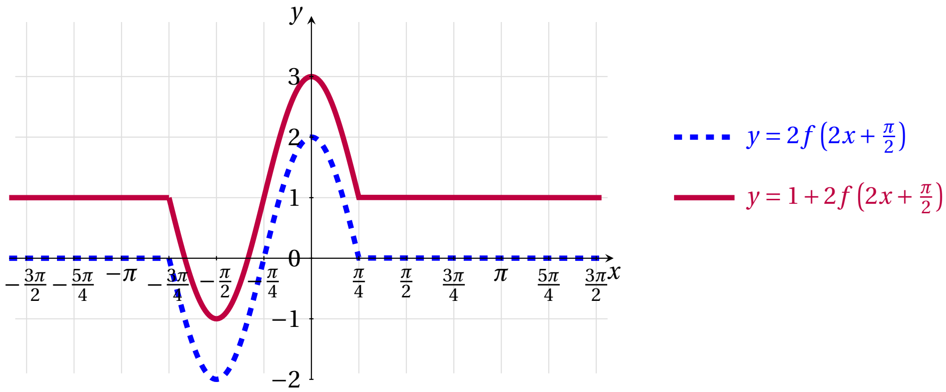
Sans calculer explicitement l'expression de g, on peut tracer son graphe par transformations élémentaires. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :







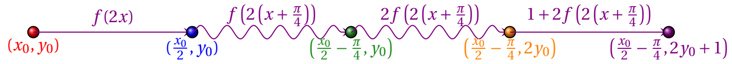


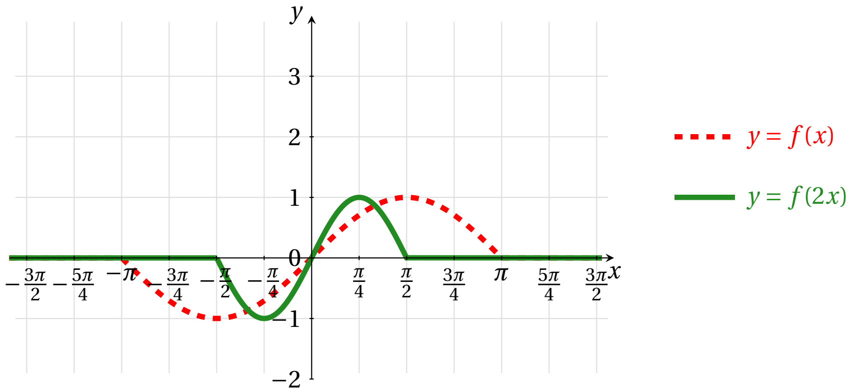


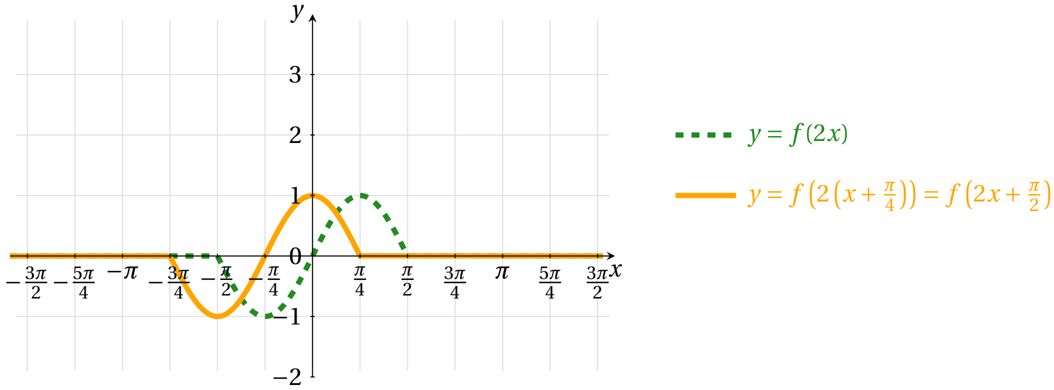
Il y a une autre façon d'obtenir le graphe de g en remarquant que $2x+\frac{\pi}{2}=2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

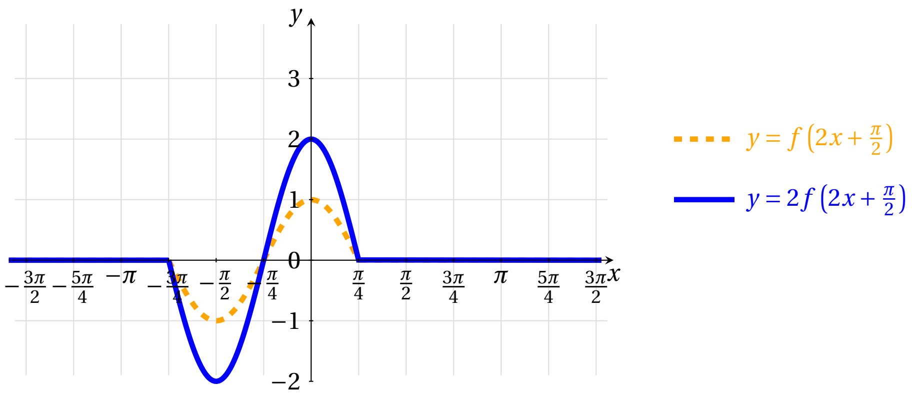
$$\begin{array}{rccccccccccc}
g\colon & \mathbb{R} & \xrightarrow{t_{\pi/4}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_2} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_2} & \mathbb{R} & \xrightarrow{t_1} & \mathbb{R}\\
& x & \longmapsto & x+\frac{\pi}{4} & \longmapsto & 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \longmapsto & f\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) & \longmapsto & 2f\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) & \longmapsto & 1+2f\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{array}$$

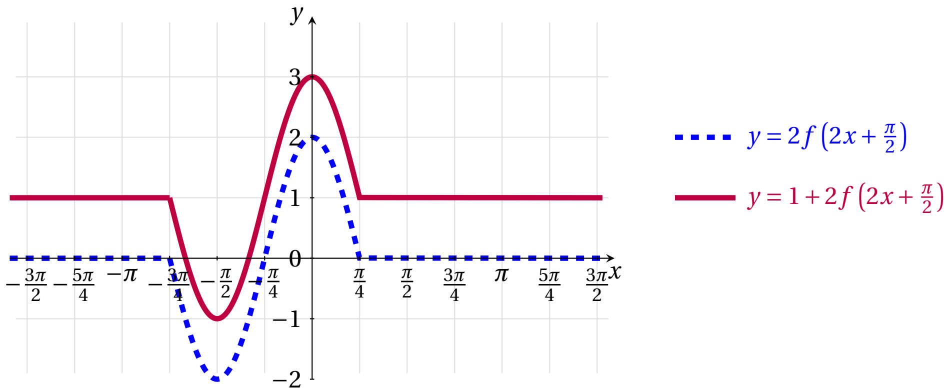
Un point de coordonnée (x_0, y_0) va alors être déplacé comme suit :











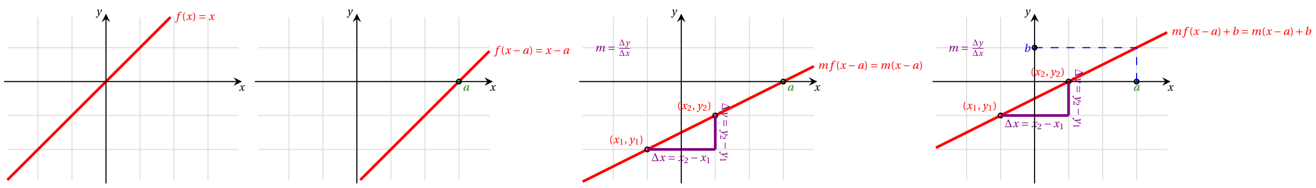
Chapitre 2.

Fonctions usuelles et propriétés

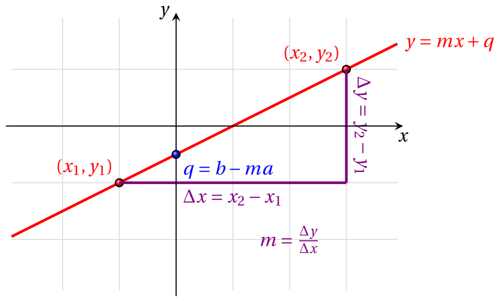
2.1. Les fonctions affines

Exercice 2.1
Par transformation du graphe de $f: x \mapsto x$, tracer le graphe des fonctions définies par $g(x) = mf(x-a)+b = m(x-a)+b$ pour différentes valeurs de a, m et b. Identifier ces trois paramètres sur un graphe général.

Correction
Construction :



Le graphe de la fonction est une droite qui passe par le point $(0, q = b - ma)$ et le point $(a - \frac{b}{m}, 0)$. La pente de la droite est égale à m : l'accroissement de la variable y résultat d'un accroissement d'une unité de la variable x est égal à m. La droite passe donc par le point $(1, m+q)$. La tangente de l'angle entre la droite d'équation $y = m(x-a)+b$ et une droite horizontale est égale à m. De plus, elle passe par le point $\left(a - \frac{b}{m}, 0\right)$.



Exercice 2.2 (Grandeurs proportionnelles (fonction linéaire))
En justifiant votre réponse, indiquer dans chaque situation si les grandeurs sont proportionnelles :
1. La masse et la taille d'une personne.
2. Le prix payé à la station service et la quantité d'essence.
3. La durée d'un film et le prix de la place de cinéma.
4. Le nombre de baguettes et le prix payé à la boulangerie.
5. La distance parcourue en voiture et le temps de trajet.
6. La longueur d'un rectangle et son périmètre.
7. La longueur d'un rectangle et son aire.
8.

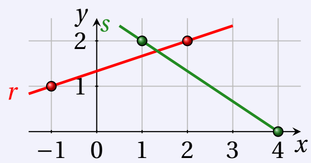
Nombre de stylos	2	3	5	7
Prix payé	4.50 euro	6.75 euro	11.25 euro	15.75 euro

Correction
1. [Faux] Ces grandeurs ne sont pas proportionnelles. Si la masse est la taille d'une personne étaient proportionnelles alors on pourrait dire que quand quelqu'un est deux fois plus lourd alors il est forcément deux fois plus grand ! Cette phrase est certainement fausse. Par exemple mesurer 1.40 m et faire 45 kg est possible. Cet adolescent pourrait faire 90 kg adulte mais ne mesurera jamais 2.80 m.
2. [Vrai] Il s'agit bien d'une situation de proportionnalité. Comme le prix d'un litre d'essence est un nombre fixé par la station service, on obtient bien le prix payé en multipliant la quantité d'essence par le prix d'un litre.
3. [Faux] Ces grandeurs ne sont pas proportionnelles : on paye le même prix pour un film de 2h30 que pour un film de 1h45.

4. [Vrai] Ces deux grandeurs sont bien proportionnelles car le prix d'une baguette est un nombre fixe.
5. [Faux] La distance parcourue n'est pas proportionnelle au temps de trajet car elle dépend du trafic, de la vitesse maximale autorisée etc.
6. [Faux] Ces grandeurs ne sont pas proportionnelles. Imaginons un rectangle qui mesure 5 cm de long et 4 cm de large. Le périmètre est égal à 20 cm. Si on passe à une longueur de 10 cm, c'est à dire le double, sans modifier la largeur, alors le nouveau périmètre est 28 cm : le périmètre n'a pas doublé.
7. [Vrai] Ces deux grandeurs sont proportionnelles. Imaginons à nouveau un rectangle qui mesure 5 cm de long et 4 cm de large. L'aire est égale à 20 cm^2. Si on passe à une longueur de 10 cm, c'est à dire le double, sans modifier la largeur, alors la nouvelle aire est 40 cm^2 : l'aire a été multipliée par 2.
8. [Vrai] Ces grandeurs sont bien proportionnelles car il existe un unique coefficient multiplicateur $a = 2.25$ qui permet de passe du nombre de stylos x au prix payé y.

Exercice 2.3 (Droites)

1. Une fonction affine prend la valeur H au point r et son graphe passe par l'origine. Quelle est son équation ?
2. Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



3. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
4. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
5. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation d'une autre droite qui passe par $(2,-1)$ et qui est parallèle à la droite d'équation $5x-3y=9$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Correction

1. Une fonction affine a pour équation $f(x) = mx+q$. Pour calculer m et q on impose les deux conditions : $\begin{cases} H = mr+q \\ 0 = q \end{cases}$ et on obtient $f(x) = \frac{H}{r}x$
2. La droite r a pour équation $y = \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$. La droite s a pour équation $y = -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$. Le point d'intersection a coordonnées (x,y) qui vérifient
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} y-\frac{1}{3}x = \frac{4}{3}, \\ y+\frac{2}{3}x = \frac{8}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} 3y-x = 4, \\ 3y+2x = 8, \end{cases} \iff \begin{cases} 3y-x = 4, \\ 3x = 4, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3}, \\ y = \frac{16}{9}. \end{cases}$$
3. Les droites qui passent par $(2,3)$ ont équation $y = m(x-2)+3$ pour $m \in \mathbb{R}$. La droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$ a pente $\frac{-2-9}{3-7} = \frac{11}{4}$. Par conséquent, la droite cherchée a équation $y = \frac{11}{4}(x-2)+3$.
4. La droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$ a équation $y = \frac{10-6}{3-2}(x-2)+6$. Sa pente est 4. L'équation de la droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$ est $y = 4(x-7)+2$. Les intersections de cette droite avec les axes sont $(0,-26)$ et $(13/2,0)$.
5. L'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et de pente 4 est $y = 4(x-5)-3$. L'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x-3y=9$ et qui passe par $(2,-1)$ est $y = \frac{5}{3}(x-2)-1$. L'intersection entre les deux droites est $(8,9)$.

Exercice 2.4 (Brevet Rennes 1999)

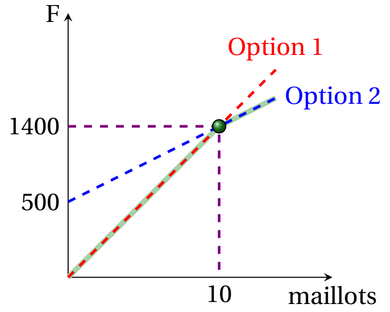
En début de saison, une équipe de volley-ball décide de changer de maillots. Sur chaque maillot doit être imprimé un numéro. Après la consultation de différents catalogues, deux solutions sont retenues.
Option 1 : Le maillot non imprimé est vendu 125 F, prix auquel il faut ajouter 12% pour l'impression du numéro.
Option 2 : Le maillot non imprimé est vendu 90 F. Les frais d'impression sont de 500 F pour l'ensemble des maillots.
À partir de combien de maillots est-il plus intéressant de choisir l'option 2 ?

Correction

On désigne par x le nombre de maillots achetés et on appelle y_i le prix de x maillots en choisissant l'option i.
Le prix d'un maillot imprimé dans l'option 1 est $125+12\% \times 125 = \frac{112}{100}125 = 140$ F, donc $y_1(x) = 140x$.
Le prix de x maillots imprimé dans l'option 2 est $y_2(x) = 90x+500$.

On choisira l'option 1 ou 2 selon que $x \le 10$ ou $x \ge 10$:

$$\text{Formule optimale}(x) = \begin{cases} 140x & \text{si } x \le 10, \\ 90x + 500 & \text{si } x \ge 10. \end{cases}$$

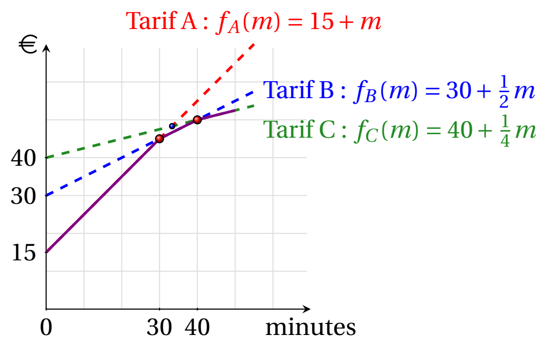


Exercice 2.5

Un réseau de mobilophonie annonce ses tarifs :
Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.
Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne ?

Correction
Soit m la durée de communication par mois en minutes. On choisira A, B ou C selon que $m \le 30$, $30 \le m \le 40$ ou $m \ge 40$:

$$\text{Formule optimale}(m) = \begin{cases} 15 + m & \text{si } m \le 30, \\ 30 + \dfrac{m}{2} & \text{si } 30 \le m \le 40, \\ 40 + \dfrac{m}{4} & \text{si } m \ge 40. \end{cases}$$



Exercice 2.6

On veut comparer les offres “starter” de différentes compagnies téléphoniques en septembre 2018. Plus précisément on est intéressé au prix par mois en fonction des Mo.

Sfr 5 € par mois avec 50 Mo inclus dans le forfait ; au-delà de 50 Mo, rechargement automatique de 20 Mo à 1 €, 4 recharges maximum ;
B&You 7.99 € par mois avec 20 Mo inclus dans le forfait ; au-delà de 20 Mo, facturation au tarif 0.05 €/Mo ;
Free 2 € par mois avec 50 Mo inclus dans le forfait ; au-delà de 50 Mo, facturation au tarif 0.05 €/Mo ;
Sosh 4.99 € par mois avec 50 Mo inclus dans le forfait ; au-delà de 50 Mo, facturation au tarif 0.05 €/Mo ;
LaPoste 3.99 € par mois avec 100 Mo inclus dans le forfait ; au-delà de 100 Mo, facturation au tarif 0.05 €/Mo ;

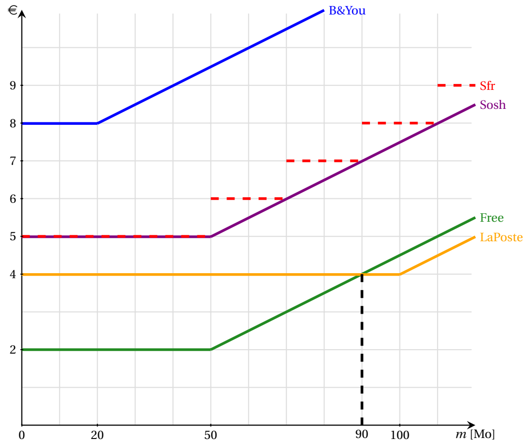
Quelle formule choisir lorsque l'on utilise m Mo par mois en moyenne ?

Correction
On désigne par m le nombre de Mo et on appelle compagnie(m) le prix mensuel de m Mo en choisissant l'offre de la compagnie.

$$\text{Sfr}(m) = \begin{cases} 5 & \text{si } m < 50, \\ 6 & \text{si } 50 \le m < 70, \\ 7 & \text{si } 70 \le m < 90, \\ 8 & \text{si } 90 \le m < 110, \\ 9 & \text{si } 110 \le m < 130; \end{cases} \qquad \text{B\&You}(m) = \begin{cases} 7.99 & \text{si } m < 20, \\ 0.05(m-20) + 7.99 & \text{si } m \ge 20; \end{cases}$$

$$\text{Free}(m) = \begin{cases} 2 & \text{si } m < 50, \\ 0.05(m-50) + 2 & \text{si } m \ge 50; \end{cases} \qquad \text{Sosh}(m) = \begin{cases} 4.99 & \text{si } m < 50, \\ 0.05(m-50) + 4.99 & \text{si } m \ge 50; \end{cases}$$

$$\text{LaPoste}(m) = \begin{cases} 3.99 & \text{si } m < 100, \\ 0.05(m-100) + 3.99 & \text{si } m \ge 100; \end{cases}$$



Exercice 2.7 (Le crible de Matiyasevitch)

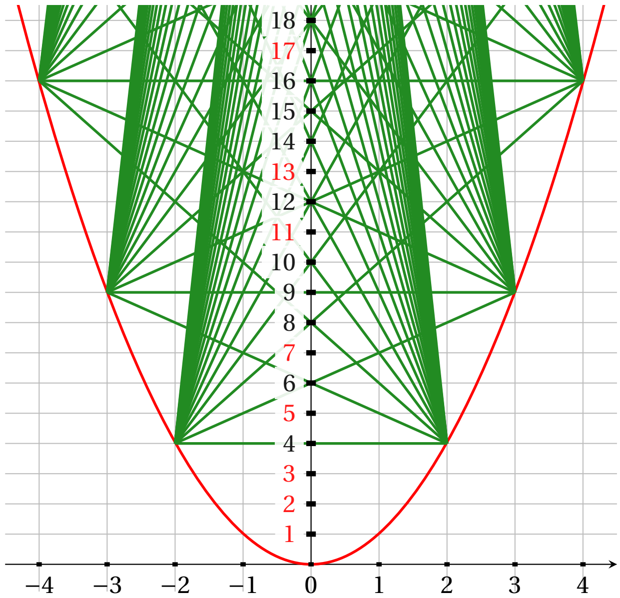
Traçons la parabole d'équation $y = x^2$. Sur ce graphe, on va considérer deux familles de points :

- pour tout $i \geq 2$, i entier, on note A_i le point de coordonnées $(-i, i^2)$,
- pour tout $j \geq 2$, j entier, on note B_j le point de coordonnées (j, j^2).

Relions tous les points A_i à tous les points B_j.

1. Montrer que tous les segments $[A_iB_j]$ croisent l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer qu'un nombre situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, un des segments $[A_iB_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Que représente-t-il le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier ?

Rappel : un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui même.



Correction

1. Le segment $[A_iB_j]$ appartient à la droite d'équation
$$y = \frac{j^2 - i^2}{j + i}(x - j) + j^2 = (j - i)x + ij$$
et il croise l'axe des ordonnées en le point de coordonnées $(0, ij)$. Comme $i, j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, le produit ij appartient à $\mathbb{N}$.
2. Un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que $n = ij$ donc si, et seulement si, il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que le segment $[A_iB_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier représente le double du nombre de diviseurs propres de n si n n'est pas un carré parfait, sinon c'est le nombre de diviseurs propres de n.

2.2. La fonction valeur absolue

Exercice 2.8

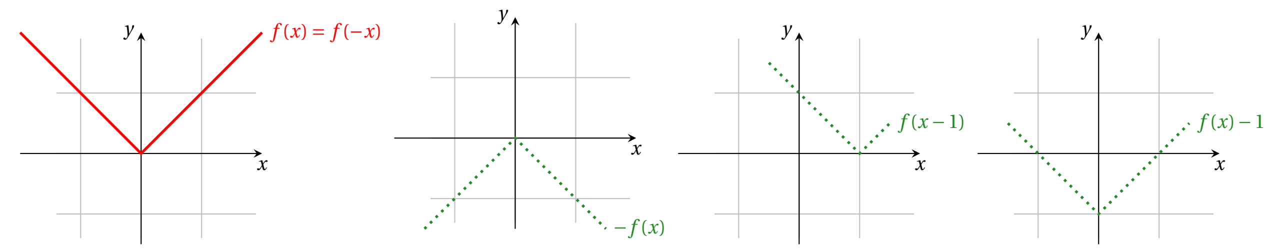
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = |x|$. Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto |x|$
2. $x \mapsto |-x|$
3. $x \mapsto -|x|$
4. $x \mapsto |x-1|$
5. $x \mapsto |x|-1$

Correction
Il s'agit des fonctions

1. $x \mapsto f(x)$
2. $x \mapsto f(-x)$
3. $x \mapsto -f(x)$
4. $x \mapsto f(x-1)$
5. $x \mapsto f(x)-1$

Comme f est paire, le graphe de $x \mapsto f(x)$ et de $x \mapsto f(-x)$ coïncident.



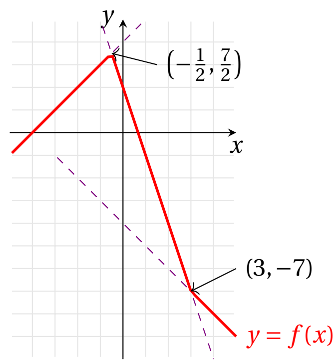
Exercice 2.9
Soit $f\colon x \mapsto |x-3|-|2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction de x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f. Calculer les solutions de $f(x)=0$.

Correction

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \ge 3 \\ -(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \ge -1/2 \\ -(2x+1) & \text{si } x < -1/2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-3|-|2x+1| \\ &= \begin{cases} (-x+3)-(-2x-1) & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ (-x+3)-(2x+1) & \text{si } -\frac{1}{2} \le x < 3 \\ (x-3)-(2x+1) & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ -3x+2 & \text{si } -\frac{1}{2} \le x < 3 \\ -x-4 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$



Sans faire des calculs avec les valeurs absolues, on voit que $f(x)=0$ ssi $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$.

Exercice 2.10
Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (utiliser des graphes lorsque possible).

1. $x|x| < 1$
2. $x^2-4|x|-5>0$
3. $|x+2| < 1+|x-1|$

Correction

1. $x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ge 0, \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc $]-\infty, 1[$
2. On trace le graphe de $x \mapsto x^2-5$ et le graphe de $x \mapsto 4|x|$. On voit qu'il suffit de travailler pour $x>0$ (l'autre partie est symétrique) ainsi on doit resoudre $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)>0$ avec $x>0$ et on obtient $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$
3. On trace la droite $x \mapsto x+2$ puis on en déduit le graphe de $x \mapsto |x+2|$; on trace la droite $x \mapsto x-1$ puis on en déduit le graphe de $x \mapsto |x-1|$ et on translate vers le haut ; on obtient $]-\infty, 0[$

2.3. Les fonctions exponentielles

Exercice 2.11

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^x$. Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions

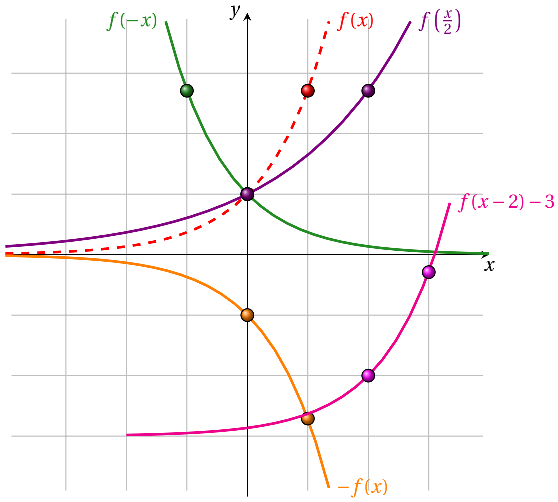
1. $x\mapsto f(x)=e^x$
2. $x\mapsto e^{-x}$
3. $x\mapsto -e^x$
4. $x\mapsto e^{x-2}-3$
5. $x\mapsto \exp\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $x\mapsto e^{x-1}$
7. $x\mapsto \exp\left(\frac{x}{2}-1\right)$

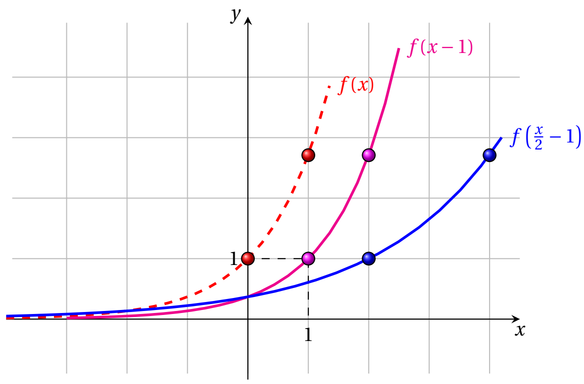
Correction

Il s'agit des fonctions :

1. $x\mapsto f(x)$
2. $x\mapsto f(-x)$
3. $x\mapsto -f(x)$
4. $x\mapsto f(x-2)-3$
5. $x\mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $x\mapsto f(x-1)$
7. $x\mapsto f\left(\frac{x}{2}-1\right)$

Notons de plus que $f(x-1)=e^{x-1}=e^xe^{-1}=e^{-1}f(x)$.





Exercice 2.12

Vrai ou faux ?

1. $e^{18}=2e^9$
2. $e^{18}=(e^9)^2$
3. $e^{18}=\exp(9^2)$
4. $e^{18}=e^2+e^9$
5. $e^{18}=e^2e^9$
6. $e^{18}=e^9e^9$

Correction

$e^{18}=e^{2\times 9}=(e^9)^2=(e^2)^9$ mais aussi $e^{18}=e^{9+9}=e^9e^9$: les égalités vraies sont la 2 et la 6.

Exercice 2.13

Soit x un nombre réel. On pose $f(x)=x^2\ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x=$	e	e^2	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\sqrt{e}$	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x)=$							

Correction

On se rappelle que $\ln(e^\alpha)=\alpha$, $\ln\left(a^b\right)=b\ln(a)$, $\frac{1}{a^b}=a^{-b}$, $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$, donc

$x=$	e	e^2	$\frac{1}{e}=e^{-1}$	$\frac{1}{e^2}=e^{-2}$	$\sqrt{e}=e^{-1/2}$	$e\sqrt{e}=e^{3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-1/2}$
$f(x)=$	e^2	$2e^4$	$-\frac{1}{e^2}$	$-\frac{2}{e^4}$	$\frac{e}{2}$	$\frac{3}{2}e^3$	$-\frac{1}{2e}$

Exercice 2.14

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)$,
2. $\exp\left(-\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{v}\right)}\right)\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{v}\right)\right)$,
3. $\left(\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)\right)^{\ln\left(\frac{1}{w^2}\right)}$,
4. $\exp\left(x-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)$,
5. $\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{x^2-x^4}\right)+\frac{1}{x}\right)$,
6. $\dfrac{\exp\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|\right)}{\exp\left(\ln|1+x|-\ln|x-1|\right)}$,
7. $\frac{1}{e}\exp\left((x+1)^2-e^{2\ln(x)}\right)$,
8. $\dfrac{e^{3\ln(2x)-\ln(x)}e^{1-3\ln(x)}}{xe^{x-2}}$.

Correction

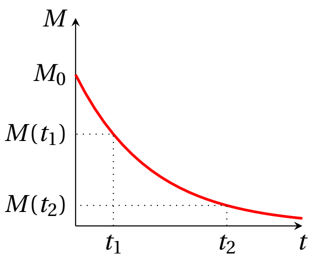
1. w,
2. $-v\exp(-\ln^{-1}(v))$,
3. $w^{-2\ln(w)}$,
4. $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$,
5. $x^2(1-x^2)e^{1/x}$,
6. -1,
7. e^{2x},
8. $\dfrac{8}{x^2e^{x-3}}$.

Exercice 2.15

1. Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi $M(t)=M_0\exp(-0.000436t)$, où M_0 représente la masse de radium présente au temps $t=0$ et t est donné en années. Tracer le graphe de la fonction M. Au départ de $t=0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse se réduise de moitié ? Et au départ de $t=10$?
2. L'évolution de la population mondiale P durant le XX^e siècle peut être approchée au moyen d'une fonction exponentielle par
$$P(t)=0.0083\times(1.0137)^t$$
où t désigne l'année considérée. Tracer le graphe de la fonction P. Quand la population dépassera-t-elle 7 milliards d'habitants ? Soit $t=1900$; combien de temps faut-il attendre pour que la population double ? Même question en $t=2000$.
3. L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_0 plongée dans un liquide de température T_a est décrite par
$$T(t)=T_a+(T_0-T_a)e^{-kt}$$
où $k>0$ est une constante propre au liquide. Calculer $T'(t)$ et tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k et de T_0 (en particulier les deux cas $T_0>T_a$ et $T_0<T_a$).
4. La vitesse v d'une masse m soumise à la pesanteur et à une force de frottement directement proportionnelle à v est donné par
$$v(t)=\frac{mg}{\mu}+Ke^{-\mu t/m},$$
où m, g et μ sont des constantes positives. Déterminer la valeur de K pour laquelle $v(0)=v_0$. Calculer $v'(t)$ et tracer le graphe de la fonction $t\mapsto v(t)$.

Correction

1. Il s'agit d'une fonction du type $f(x)=Ae^{-Bx}$ avec $A,B>0$. On obtient le graphe de f à partir de celui de la fonction $x\mapsto e^{-x}$ par dilatations.



$M(t)=M_0a^{-t}$ avec $a=e^{0.000436}$. On cherche (t_2-t_1) tel que $M(t_2)=\frac{M(t_1)}{2}$.

$$M(t_2)=\frac{M(t_1)}{2}\iff M_0a^{-t_2}=\frac{1}{2}M_0a^{-t_1}\iff a^{t_2-t_1}=2$$
$$\iff t_2-t_1=\log_a 2=\frac{\ln(2)}{\ln(a)}=\frac{\ln(2)}{4.36}10^4\simeq\frac{7}{4.36}10^3$$

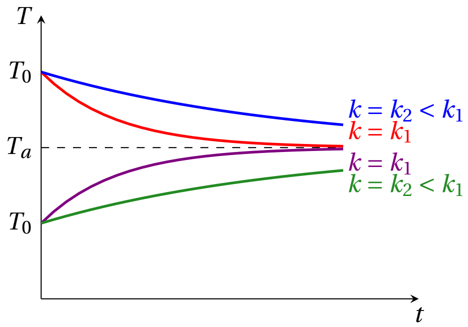
Pour que la masse se réduise de moitié il faut attendre environ $t=1589.8$ années indépendamment du temps initial.

2. Il s'agit d'une fonction du type $f(x)=AC^x=Ae^{x\ln(C)}=Ae^{Bx}$ avec $A,B>0$. On obtient le graphe de f à partir de celui de la fonction $x\mapsto e^x$ par dilatations.

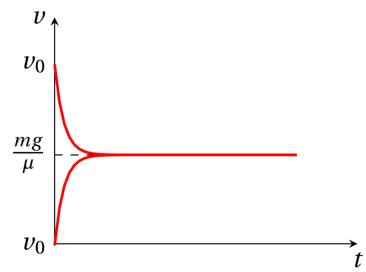
- $P(t) > 7\times10^9 \iff t > \log_{1.0137}\left(\frac{7\times10^9}{0.0083}\right) = \frac{\ln\left(\frac{7\times10^9}{0.0083}\right)}{\ln(1.0137)} = \frac{\ln\left(\frac{7\times10^{12}}{8.3}\right)}{\ln(1+0.0137)}$. Sans utiliser la calculatrice on peut essayer d'estimer cette quantité : $\simeq \frac{12\ln(10)}{0.0137} \simeq \frac{27.6}{1.37}100 \simeq 2014$. Avec la calculatrice on trouve ≈ 2018 : la population dépassera 7 milliards d'habitants en 2018.
- On cherche (t_2-t_1) tel que $P(t_2) = 2P(t_1)$ et l'on a $P(t_2) = 2P(t_1) \iff t_2 = \log_{1.0137}(2) + t_1 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.0137)} + t_1 \simeq 50.941 + t_1$: pour que la population double il faut attendre 51 années indépendamment de l'année initiale. En effet

$$P(1900) \simeq 1.4028990\times10^9, \quad P(1951) \simeq 2.8080717\times10^9, \quad P(2000) \simeq 5.4697953\times10^9, \quad P(2051) \simeq 10.948455\times10^9.$$

3. $T'(t) = -k(T(t)-T_a$ qui est de signe opposé à $T(t)-T-a$. Il s'agit de fonctions du type $f(x) = A+Be^{-Cx}$ avec $A, C > 0$ et $B \in \mathbb{R}$. On obtient le graphe de f à partir de celui de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ par dilatations suivi d'une translation verticale. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. De plus, si $B > 0$ la fonction est décroissante, si $B < 0$ la fonction est croissante.



4. Pour que $v(0) = v_0$ il faut que $K = v_0 - \frac{mg}{\mu}$. $v'(t) = -K\frac{\mu}{m}e^{-\mu t/m} = -\frac{\mu}{m}\left(v(t)-\frac{mg}{\mu}\right)$ qui est de signe opposé à $v(t)-\frac{mg}{\mu}$.



Exercice 2.16

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (utiliser des graphes lorsque possible).

1. $\exp(x^{18}) > 1$
2. $\dfrac{e^{2x}-e^x}{2e^{2x}-5e^x+2} > -1$
3. $\dfrac{e^x+e^{\sqrt{x}}+2}{e^{2x}-e} \geq 0$
4. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 9$
5. $3^{2-x}+2\cdot3^x < 19$

Correction

1. On sait que $e^x \geq 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\exp(x^{18}) \geq 1+x^{18}$. Comme $x^{18} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $1+x^{18} \geq 1$ et donc $\exp(x^{18}) \geq 1$. L'égalité est réalisée ssi $x = 0$ donc $1-\exp(x^{18}) < 0$ est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. $]-\infty, \ln(1-\sqrt{3}/3)[\cup]-\ln 2, \ln(1+\sqrt{3}/3)[\cup (\ln 2, +\infty)$
3. $]1/2, +\infty[$
4. $\emptyset$
5. $]-\ln(2)/\ln(3), 2[$

2.4. Les fonctions logarithmes

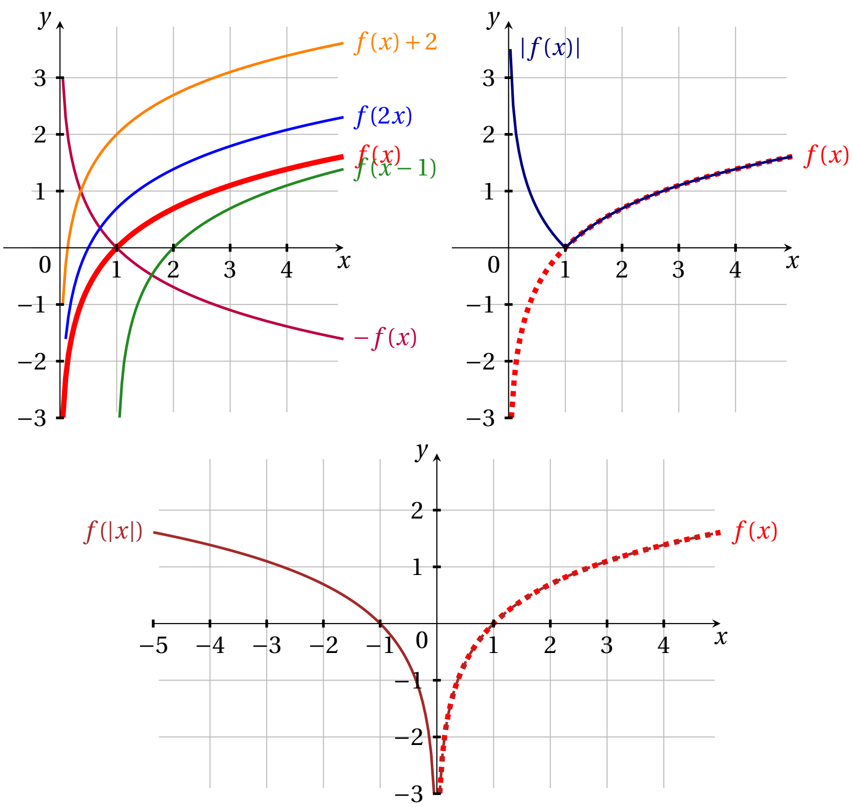
Exercice 2.17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$. Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto f(x) = \ln(x)$,
2. $x \mapsto -\ln(x)$,
3. $x \mapsto \ln(x) + 2$,
4. $x \mapsto \ln(2x)$,
5. $x \mapsto \ln(x-1)$,
6. $x \mapsto \ln(|x|)$,
7. $x \mapsto |\ln(x)|$.

Correction

1. $f(x) = \ln(x)$ est une fonction définie pour $x > 0$; elle est strictement croissante sur son domaine de définition ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $f(1) = 0$ et $f(e) = 1$.
2. Il s'agit de la fonction $x \mapsto -f(x)$. Le graphe de $-f(x)$ est symétrique à celui de $f(x)$ par rapport à l'axe des abscisse.
3. Il s'agit de la fonction $x \mapsto f(x)+2$. Le graphe de $f(x)+2$ est une translation de celui de $f(x)$ vers le haut de 2 unités.
4. Il s'agit de la fonction $x \mapsto f(2x)$. Le graphe de $f(2x)$ est une contraction de celui de $f(x)$ de 2 unités.
   Notons que, puisque $\ln(2x) = \ln(2)+\ln(x)$, il s'agit aussi de la fonction $x \mapsto f(x)+\ln(2)$. Le graphe de $f(x)+\ln(2)$ est une translation de celui de $f(x)$ de $\ln(2)$ unités vers le haut.
5. Il s'agit de la fonction $x \mapsto f(x-1)$. Le graphe de $f(x-1)$ est une translation de celui de $f(x)$ de 1 unité vers la droite.
6. Il s'agit de la fonction $x \mapsto f(|x|)$. $f(|x|) = f(x)$ si $x > 0$ et $f(|x|) = f(-x)$ si $x < 0$, on en déduit que son graphe coïncide avec celui de $f(x)$ si $x > 0$, tandis que pour $x < 0$ son graphe est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
7. Il s'agit de la fonction $x \mapsto |f(x)|$. On a $|f(x)| = f(x)$ si $f(x) > 0$ (donc si $x > 1$) ; $|f(x)| = -f(x)$ si $f(x) < 0$ (donc si $x < 1$).



Exercice 2.18

La concentration en ions oxonium $[H_3O^+]$ peut être déduite de la mesure du pH en utilisant la relation $[H_3O^+] = 10^{-\text{pH}}$. Quelle est l'expression du pH en fonction de la concentration en ions oxonium ?

Correction

Notons $x = [H_3O^+]$ et $y =$pH. On a

$$x = 10^{-y} \iff \log_{10}(x) = \log_{10}\left(10^{-y}\right) = -y \iff y = -\log_{10}(x).$$

Exercice 2.19

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier en utilisant seulement la définition de logarithme (*i.e.* $a^{\log_a(b)} = b$) :

1. $\log_{10}(1)$
2. $\log_{x^2+1}(1) + \log_{2012}(1) + \log_{10^7}(1)$
3. $\log_{10}(1000)$
4. $\log_5(1/25)$
5. $\ln(e^{\sqrt{2}})$
6. $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$
7. $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$
8. $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$
9. $\log_{10}(0.1)$
10. $\log_{10}(100/67)$
11. $3\log_{10}(10)$
12. $\log_2(8)$
13. $\log_2(0.25)$
14. $\ln(1/e)$
15. $(\ln(e))^{-1}$
16. $\log_5(25) - \log_5(5)$
17. $\log_{10}(0.1) + \log_{10}(0.01) + \log_{10}(0.001)$
18. $\log_3(108) - \log_3(4)$
19. $\dfrac{\log_{10}(10^3) + \log_{10}^2(1) + \log_{2012}^{2012}(2012)}{2^3+2}$
20. $\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)$
21. $\ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18})$
22. $\dfrac{\ln(2x)}{\ln(x)}$ (ici $x \neq 1$)
23. $(\ln(x))^2 - \ln(x^2)$
24. $(\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1$
25. $\ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x))$

Attention : on note $\log_a^c b$ la valeur $(\log_a b)^c$.

Correction

1. 0
2. $=0$
3. $\log_1 0(10^3) = 3$
4. $\log_5(5^{-2}) = -2$
5. $\sqrt{2}$
6. $1 + 2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$
7. $1 - 2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$
8. $2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$
9. -1
10. $2 - \log_{10}(67)$
11. 3
12. 3
13. -2
14. -1
15. 1
16. $\log_5(5^2) - \log_5(5) = 1$
17. $\log_{10}(10^{-1}) + \log_{10}(10^{-2}) + \log_{10}(10^{-3}) = -6$
18. 3
19. $\dfrac{3+0^2+1^{2012}}{10} = \dfrac{2}{5}$
20. $\ln(2)$,
21. $18\ln(2)$,
22. $\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1$,
23. $\ln^2(x) - 2\ln(x) = (\ln(x)-2)\ln(x)$,
24. $\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 = (\ln(x)-1)^2 = \ln^2\left(\frac{x}{e}\right)$
25. $\ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)) = \ln\left(\dfrac{(1+\cos(x))(1-\cos(x))}{\sin^2(x)}\right) = \ln\left(\dfrac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right) = \ln(1) = 0$,

Exercice 2.20

La 3ème loi de Kepler s'exprime ainsi : "Le carré de la période T de révolution d'un satellite divisé par le cube du demi-grand axe de l'ellipse a parcourue par le satellite est une constante C pour un astre attracteur donné."

- Écrire cette relation.
- Montrer que cela équivaut à $\ln(T) = \frac{3}{2}\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(C)$.
- Quelle courbe obtient-on si on trace le graphe de $\ln(T)$ en fonction de $\ln(a)$?

Correction
On a $T^2/a^3 = C$ et

$$\frac{T^2}{a^3} = C \iff T^2 = Ca^3 \iff \ln(T^2) = \ln(Ca^3)$$

On obtient la relation donnée en observant que $\ln(T^2) = 2\ln(T)$ et $\ln(Ca^3) = \ln(C) + \ln(a^3) = \ln(C) + 3\ln(a)$.
Notons $y = \ln(T)$ et $x = \ln(a)$. On a la relation $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ln(C)$: il s'agit d'une droite qui passe par le point $(0, \frac{1}{2}\ln(C))$ et de pente $\frac{3}{2}$.

Exercice 2.21

Calculer $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)$.

Correction

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \log_{10}\left(\frac{9}{10}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{9}{10}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) = -1$$

Exercice 2.22
Résoudre l'inégalité $\log_2|x-1| \le 6+\log_{1/2}\left((x-1)^2\right)$.

Correction
Tout d'abord on note que la présence des logarithmes impose $|x-1|>0$ et $(x-1)^2>0$, *i.e.* $x\neq 1$. On se rappelle d'ailleurs que $\log_{1/2}(x)=-\log_2(x)$. On doit alors résoudre [1]

$$\log_2|x-1| \le 6-\log_2(x-1)^2 \iff \log_2|x-1| \le 6-2\log_2|x-1| \iff 3\log_2|x-1|\le 6 \iff \log_2|x-1|\le 2=\log_2(2^2)$$
$$\iff |x-1|\le 2^2, x\neq 1 \iff -4\le x-1\le 4, x\neq 1 \iff -3\le x\le 5, x\neq 1.$$

Donc la solution est $x\in[-3,1)\cup(1,5]$.
Autre méthode : on trace $\log_2|x-1|$: d'abord on trace $\log_2(x)$, puis $\log_2|x|$, on translate pour obtenir $\log_2|x-1|$ et à chaque fois on regarde quand la courbe est en dessous de 2.

Exercice 2.23
Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Correction
On cherche $\min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, 2^n>10^3 \,\right\}$, *i.e.*

$$\begin{aligned}\min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>\log_2(10^3) \,\right\} &= \min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3\log_2(10) \,\right\}\\ &= \min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3\log_2(2\times 5) \,\right\}\\ &= \min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3(1+\log_2(5)) \,\right\}=10.\end{aligned}$$

En effet $2^9=516$, $2^{10}=1024$. Donc $E(\log_2(1000))=9$.

Exercice 2.24
Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (utiliser des graphes lorsque possible).

1. $\log_5(x-7)>2$
2. $\log_{2/3}(x^2-1)>2$
3. $\log_{1/2}\sqrt{x}<\log_{1/2}|x-1|$
4. $\ln(x)-\dfrac{2}{\ln(x)}+1\ge 0$
5. $\dfrac{1}{2}\ln(x)+\dfrac{1}{2}\ln(1-x)<\ln(2)+\dfrac{1}{2}\ln(5)$

Correction

1. $]32;+\infty[)$
2. $]-\sqrt{13}/3,-1[\cup]1,\sqrt{13}/3[$
3. $]3-\sqrt{5}/2,(3+\sqrt{5})/2[\setminus\{1\}$
4. $[1/e^2,1[\cup[e,+\infty[$
5. $]0,1[$

2.5. Les fonctions puissances (entières et réelles)

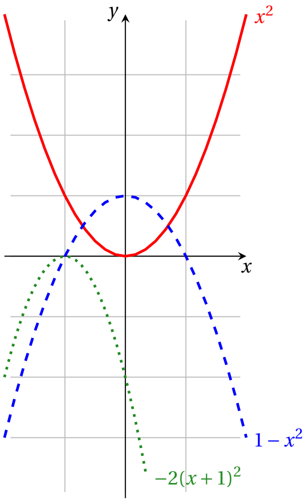
Exercice 2.25
Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions $f,g,h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et des fonctions obtenues par des transformations élémentaires en précisant l'ensemble de définition :

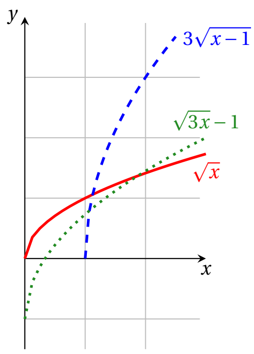
1. $f(x)=x^2$
2. $x\mapsto 1-x^2$
3. $x\mapsto -2(x+1)^2$
4. $g(x)=\sqrt{x}$
5. $x\mapsto 3\sqrt{x-1}$
6. $x\mapsto\sqrt{3x}-1$
7. $h(x)=\dfrac{1}{x}$
8. $x\mapsto\dfrac{1}{x-1}$
9. $x\mapsto\dfrac{1}{2x}$

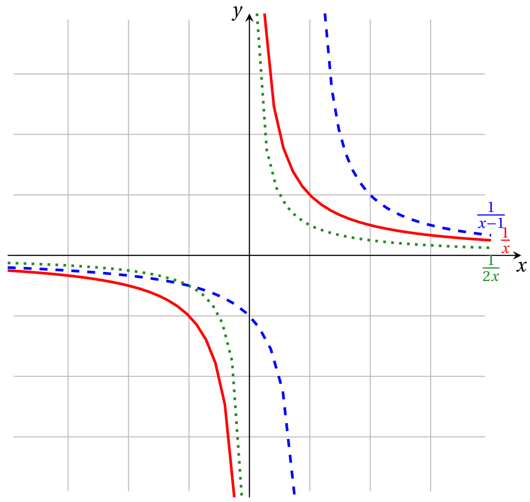
Correction
1. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=x^2$ est $\mathbb{R}$.
2. Il s'agit de la fonction $1-f(x)$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

1. Se rappeler que $k=k\log_a(a)=\log_a(a^k)$

3. Il s'agit de la fonction $-2f(x+1)$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble de définition de la fonction $g(x)=\sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$.
5. Il s'agit de la fonction $3g(x-1)$ (soit encore $g(9x-9)$). Son ensemble de définition est $[1;+\infty[$.
6. Il s'agit de la fonction $-1+g(3x)$ (soit encore $-1+\sqrt{3}g(x)$). Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$.
7. L'ensemble de définition de la fonction $h(x)=\frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
8. Il s'agit de la fonction $h(x-1)$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
9. Il s'agit de la fonction $h(2x)$ (soit encore $\frac{1}{2}h(x)$). Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.





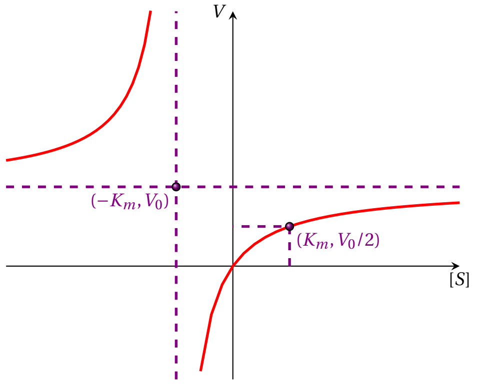


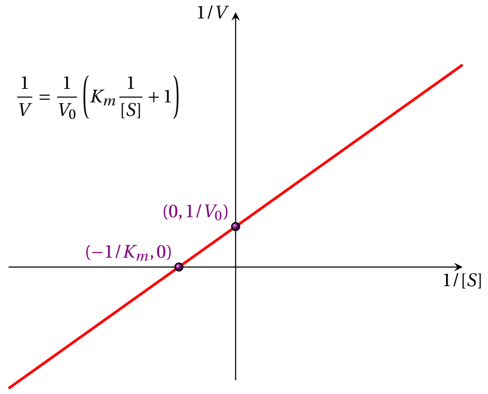
Exercice 2.26

1. D'après MICHAELIS et MENTEN, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi
$$V([S])=V_0\frac{[S]}{[S]+K_m}$$
où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0>0$ est une constante propre à la réaction et $K_m>0$ est la constante de MICHAELIS-MENTEN spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.
2. D'après la loi de BOYLE-MARIOTTE pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV=nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.
3. La concentration C d'un réactif d'une réaction chimique de second ordre est donnée par $C(t)=\dfrac{C_0}{1+kC_0t}$ où C_0 est la concentration initiale et $k>0$ est une constante cinétique chimique. Tracez le graphe de la fonction $C\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ pour différentes valeurs de k.
4. Dans une solution à 25 °C, la liaison entre la concentration en ions OH^- et celle en ions H^+ est donnée par $[OH^-][H^+]=10^{-14}$. Représenter une de ces deux concentrations en fonction de l'autre.
5. L'équation d'Antoine lie la température T d'ébullition de l'eau à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P)=a+b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.
6. D'après la loi de TORRICELLI, si on perce un trou à la base d'une colonne d'eau d'une hauteur h m, l'eau s'échappe à une vitesse de $\sqrt{2gh}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ où g =9.81 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Faire une représentation de l'évolution de $2gh$ en fonction de la vitesse de l'écoulement. Trouver la réciproque de cette fonction et tracer son graphe. Comment évolue la vitesse lorsque la hauteur est multipliée par deux?

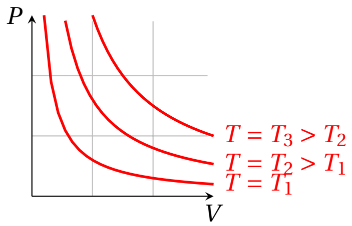
Correction

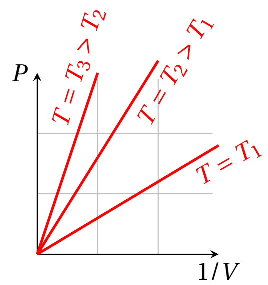
1. Il s'agit d'une fonction du type $f(x)=\frac{ax}{x+d}=a\frac{x+d-d}{x+d}=a\left(1-\frac{d}{x+d}\right)$ avec $a,d>0$. Le graphe de $[S]\mapsto V$ est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-K_m,V_0)$; le graphe de $1/[S]\mapsto 1/V$ est une droite passant par $(-1/K_m,0)$ et $(0,1/V_0)$. On a bien $V(K_m)=V_0\frac{K_m}{K_m+K_m}=\frac{V_0}{2}$.



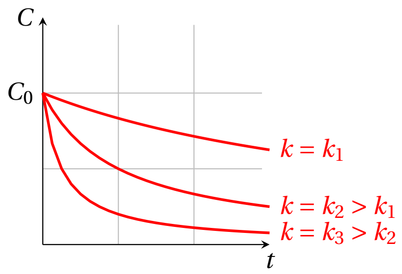


2. Pour chaque T fixé, le graphe de $V \mapsto P$ est une hyperbole et celui de $\frac{1}{V} \mapsto P$ une droite.

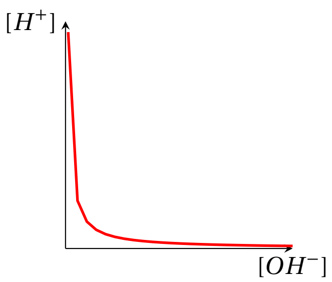




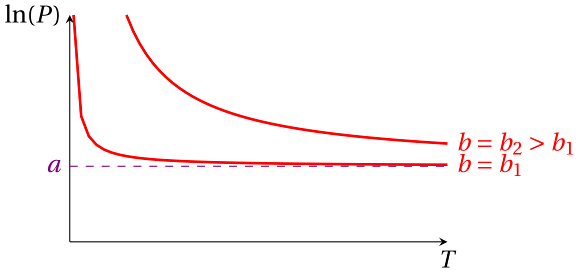
3. Le graphe de $t \mapsto C$ est une hyperbole.

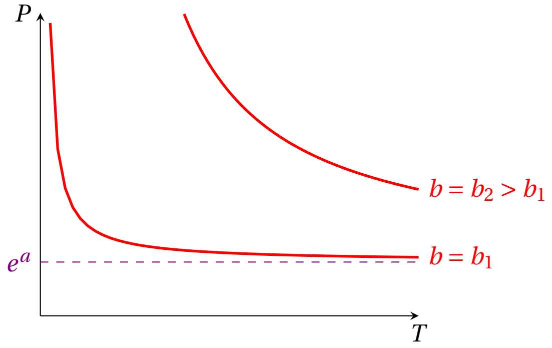


4. Le graphe de $[OH^-] \mapsto [H^+]$ est une hyperbole.

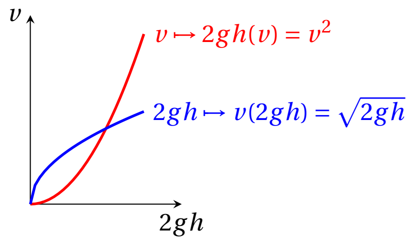


5. $P = e^{a+b/T}$





6. Lorsque la hauteur est multipliée par deux, la vitesse est multipliée par $\sqrt{2}$.



Exercice 2.27

1. Quel volume d'air faut-il insuffler dans un ballon sphérique pour que son rayon passe de R à $R+1$?
2. Le rayon d'une sphère est multiplié par deux; comment évolue son volume? Comment évolue le volume d'un cube dont la longueur des côtés est multipliée par deux?

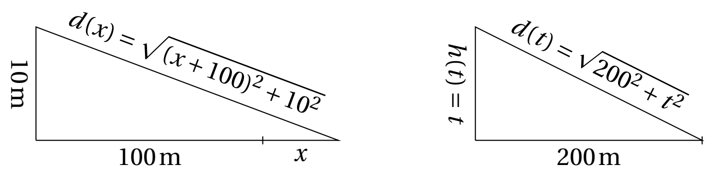
Correction

1. Le volume d'air d'un ballon sphérique de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$ et d'un ballon sphérique de rayon $R+1$ est $\frac{4}{3}\pi(R+1)^3$ donc il faut insuffler un volume d'air égal à $\frac{4}{3}\pi(R+1)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3R^2+3R+1)$.
2. Multiplié par 8 dans tous les cas car le volume de la sphère en fonction du rayon r s'écrit $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ et le volume du cube en fonction de la longueur de son coté ℓ s'écrit $V(\ell) = \ell^3$.

Exercice 2.28

1. Une tour de contrôle d'une hauteur de 10 m se situe à 100 m d'une piste d'envol. Exprimer la distance entre un avion sur la piste et le sommet de la tour de contrôle en fonction de la position de l'avion.
2. Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

Correction



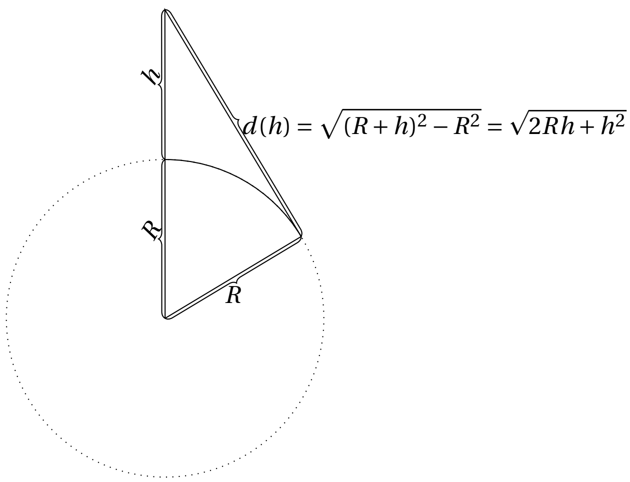
Exercice 2.29

Un observateur situé à une hauteur de h mètres du niveau de la mer observe l'horizon. Quel est le point le plus distant qu'il découvre si la Terre est parfaitement sphérique et l'équateur mesure 40 000 km? La plus courte distance entre la côte de la France et celle de la Grande-Bretagne est de 17 km. À quelle hauteur faut-il se placer pour découvrir la côte anglaise?

Correction

Deux possibilités :

- si on considère $d = 17\,\mathrm{km}$ il faut se placer à
$$h(d) = \sqrt{R^2+d^2} - R = 3.61\,\mathrm{m};$$
- si on considère que la distance est mesurée au sol, alors
$$h = \frac{R}{\cos(\alpha)} - R = 3.60\,\mathrm{m}$$
avec $\alpha = \frac{17}{R}$.



Exercice 2.30 (Paraboles)

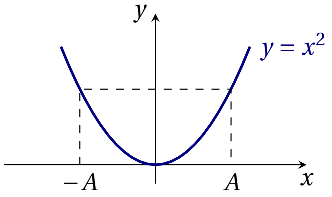
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes (tracer un graphe au préalable et utiliser les valeurs absolues lorsque cela est pertinent) :

1. $x^2 > 10\,000$,
2. $x^2 > 1$,
3. $x^2 < 0.0001$.

Correction

1. $x^2 > 10\,000$:

Méthode 1 :



avec $A^2 = (10^2)^2$.

Méthode 2 :

$x^2 > 10^4$

ssi

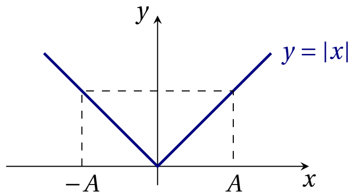
$(x^2 - 10^4) > 0$

ssi

$(x - 10^2)(x + 10^2) > 0$

Méthode 3 :

$x^2 > 10^4$ ssi $|x| > 10^2$ donc



avec $A = 10^2$.

2. $|x| > 1$,
3. $x^2 < 10^{-4}$ donc $|x| < 10^{-2} = 0.01$.

Exercice 2.31 (Hyperboles)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes (tracer un graphe au préalable) :

1. $\frac{1}{x} > 10\,000$,
2. $\frac{1}{x} < 10^{-6}$,
3. $\frac{1}{x} > 0.0001$,
4. $\frac{1}{x} > -0.0001$.

Correction

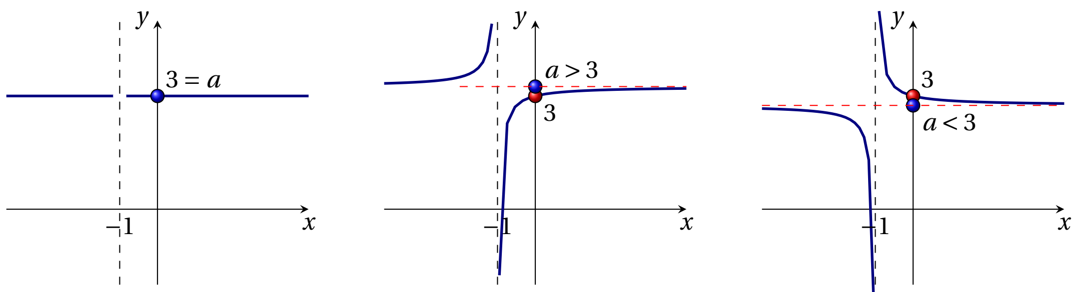
1. $0 < x < 10^{-4}$,
2. $x < 0$ ou $x > 10^6$,
3. $0 < x < 10^4$,
4. $x < -10^4$ ou $x > 0$.

Exercice 2.32 (Hyperboles)

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax+3}{x+1}$ pour différentes valeurs de a.

Correction

Si $a = 3$, $f(x) = 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $a \neq 3$ il s'agit d'hyperboles équilatères dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-1, a)$. Dans tous les cas, $f(0) = 3$ et l'on a



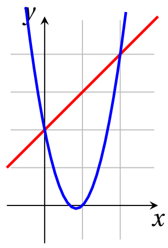
$a = 3$ $a > 3$ $a < 3$

Exercice 2.33 (Paraboles)

1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = x + 2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2 - 5x + 2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = 2x - 1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

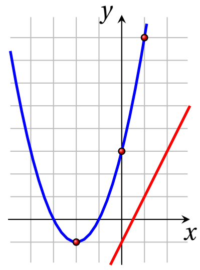
Correction

1. Les intersections de la droite d'équation $y = x+2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2-5x+2$ sont $(0,2)$ et $(2,4)$. Le sommet se trouve en $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$.



$$\begin{cases} y = x+2, \\ y = 3x^2-5x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x+2, \\ x+2 = 3x^2-5x+2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = x+2, \\ 3x(x-2) = 0 \end{cases}$$

2. Aucune intersection entre la parabole d'équation $y = (x+1)(x+3) = x^2+4x+3$ et la droite d'équation $y = 2x-1$.

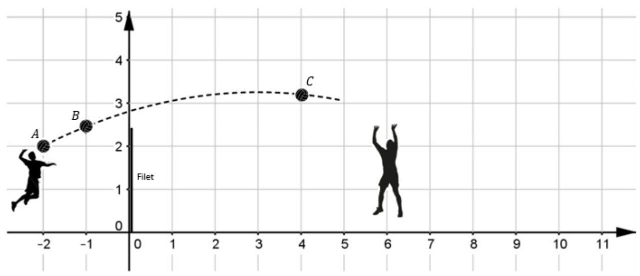


$$\begin{cases} y = 2x-1, \\ y = x^2+4x+3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x-1, \\ 2x-1 = x^2+4x+3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 2x-1, \\ x^2+2x+4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.34

La dimension d'un terrain de volley-ball est réglementaire et précisée par la FIVB : 9m de large sur 18m de long. La longueur étant séparée en deux moitiés de 9m par le filet de volley. La hauteur du filet de volley est réglementée par la FIVB et est de $2.43m$ pour les hommes.

Un joueur effectue un smash. Passant au dessus du filet, la balle suit une trajectoire parabolique. Un appareil photo à déclenchement en rafales a permis de déterminer que la balle est passée par les points $(-2;2)$, $(-1;2.5)$ et $(4;3.2)$ dans un repère défini à partir du filet.



On souhaite répondre aux questions suivantes :

1. Placé à 6m du filet, un joueur saute et s'interpose jusqu'à la hauteur de 2.55m. Justifier qu'il n'intercepte pas la balle.
2. Le point sera-t-il marqué ?

Correction

Source https://mybinder.org/v2/gh/PythonLycee/PyLyc/master?filepath=Systeme_matriciel_correction.ipynb

On cherche $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p(-2) = 2$, $p(-1) = 2.5 = \frac{5}{2}$ et $p(4) = 3.2 = \frac{16}{5}$:

$$p(x) = -\frac{3}{50}x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{72}{25}.$$

1. $p(6) = \frac{66}{25} = 2.64 > 2.55$ donc la balle n'est pas interceptée par le joueur.
2. $p(9) = \frac{9}{10} > 0$ ainsi le point n'est pas marqué, puisqu'elle retombe hors des limites du terrain.

Exercice 2.35 (Paraboles)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x - 2 + e^{-x} = 0$,
2. $x^4 + 3x^2 = k$, où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre,
3. $\left(\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)\right)^{x^2-6x+1} = 1$.

Correction

1. $e^x - 2 + e^{-x} = 0$ est équivalente à $X^2 - 2X + 1 = 0$ ayant posé $X = e^x > 0$. L'unique solution de l'équation $X^2 - 2X + 1 = 0$ est $X = 1$ d'où $x = 0$.
2. $x^4 + 3x^2 = k$ est équivalente à $X^2 + 3X - k = 0$ ayant posé $X = x^2 \geq 0$. Si $k < -\frac{9}{4}$ l'équation $X^2 + 3X - k = 0$ n'a pas de solutions, donc l'équation $x^4 + 3x^2 = k$ non plus ; si $k = -\frac{9}{4}$ l'équation $X^2 + 3X - k = 0$ a une unique solution $X = -\frac{3}{2} < 0$ donc l'équation $x^4 + 3x^2 = k$ n'a pas de solutions ; si $k > -\frac{9}{4}$ l'équation $X^2 + 3X - k = 0$ a deux solutions $X = -\frac{3-\sqrt{9+4k}}{2} < 0$ et $X = -\frac{3+\sqrt{9+4k}}{2}$, cette dernière est non négative si et seulement si $k \geq 0$ donc l'équation $x^4 + 3x^2 = k$ admet deux solutions $x = \pm\sqrt{-\frac{3+\sqrt{9+4k}}{2}}$ si et seulement si $k \geq 0$.
3. Par définition $(A(x))^{B(x)} = e^{B(x)\ln(A(x))}$ donc il faut imposer $A(x) > 0$. Comme $x^2 - 10x + 26 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (il s'agit d'une parabole qui a son minimum en $x = 5$), le terme de gauche est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$ on a
   $$a^b = 1 \qquad \iff \qquad a = 1 \text{ ou } b = 0.$$
   L'équation admet donc 4 solutions :
   - $x = 3$ et $x = 7$ qui sont solutions de l'équation
     $$\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right) = 1$$
   - $x = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x = 3 + 2\sqrt{2}$ qui sont solutions de l'équation
     $$x^2 - 10x + 26 = 0.$$

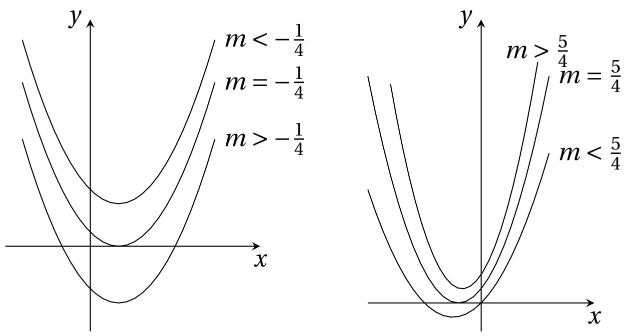
Exercice 2.36 (Paraboles)

Calculer suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^2 - x - m$,
2. $f(x) = m^2x^2 + mx + m - 1$.

Correction

1. Si $m > -\frac{1}{4}$ il y a deux solutions : $x = \frac{1-\sqrt{1+4m}}{2}$ et $x = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$; si $m = -\frac{1}{4}$ il a une seule solution : $x = \frac{1}{2}$; si $m < \frac{1}{4}$ il n'y a pas de solutions.
2. Si $m < \frac{5}{4}$ et $m \neq 0$ il y a deux solutions : $x = \frac{-1-\sqrt{5-4m}}{2m}$ et $x = \frac{-1+\sqrt{5-4m}}{2m}$; si $m = \frac{5}{4}$ il a une seule solution : $x = -\frac{2}{5}$; si $m > \frac{5}{4}$ ou $m = 0$ il n'y a pas de solutions.



Exercice 2.37

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 8} - \sqrt{x^2 - 1}$. Donner son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Correction

Ensemble de définition : il faut que

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 \geq 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)(x+4) \geq 0, \\ (x-1)(x+1) \geq 0, \end{cases}$$

donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, -4] \cup [-2, -1] \cup [1, +\infty[$.

Signe : pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a

$$\sqrt{x^2+6x+8}-\sqrt{x^2-1}>0 \iff x^2+6x+8>x^2-1 \iff x>-3/2$$

donc

- $f(x)=0$ si et seulement si $x=-3/2$,
- $f(x)>0$ pour $x \in]-3/2,-1] \cup [1,+\infty[$,
- $f(x)<0$ pour $x \in]-\infty,-4] \cup]-2,-3/2[$.

Exercice 2.38

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (utiliser des graphes lorsque possible).

1. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}<1+\dfrac{1}{4-x^2}$
2. $x-1<\sqrt{x+4}$
3. $\sqrt{2x+1}>x$
4. $\sqrt{x+2}<x$
5. $\sqrt{x^2-5x+4}<x-1$
6. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}}\geq x-3$
7. $\sqrt{4x^2+3x-1}\geq 2x-3$
8. $\dfrac{\sqrt{1-9x^2}+2x}{3x-2}>0$
9. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\geq 3$
10. $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{3}\leq\dfrac{3}{\sqrt{2x-5}}$
11. $\sqrt{4+|1-x^2|}<x+\sqrt{5}$
12. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{3-x-\sqrt{x}}<0$
13. $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}}<\sqrt{x}$

Correction

1. $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]+2,+\infty[$
2. $[-4,{}^{(3+\sqrt{21})}/_2[$
3. $\left[-{}^1/_2,1+\sqrt{2}\right[$
4. $]2,+\infty[$
5. $[4,+\infty[$
6. $]-\infty,{}^{5+\sqrt{17}}/_2]\setminus\{-1,1\}$
7. $]-\infty,-1]\cup[{}^1/_4,+\infty[$
8. $[-{}^1/_3,-{}^1/_{\sqrt{13}}[$
9. $[3,+\infty[$
10. $]{}^5/_2,7]$
11. $]0,+\infty[$
12. $]{}^{7-\sqrt{13}}/_2,+\infty[$
13. $[1,+\infty[$

2.6. Les fonctions trigonométriques

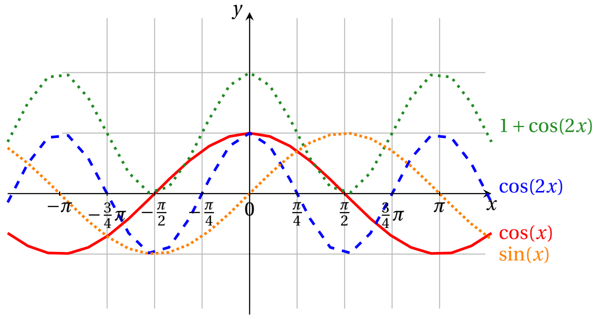
Exercice 2.39

Pour chaque fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et tracer à main levée la courbe représentative :

1. $f(x)=\cos(x)$
2. $g(x)=\cos(2x)$
3. $h(x)=1+\cos(2x)$
4. $k(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Correction

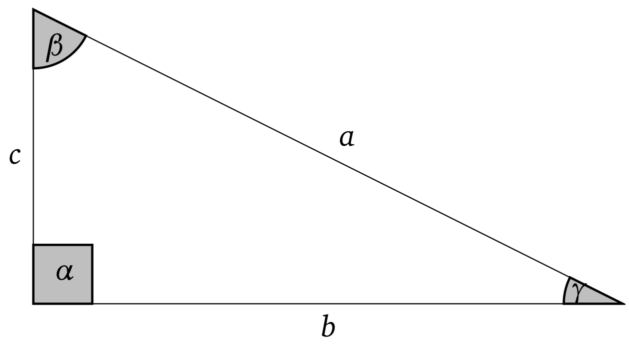
1. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\cos(x)$ est $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble de définition de la fonction $g(x)=f(2x)$ est $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble de définition de la fonction $h(x)=1+g(x)$ est $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble de définition de la fonction $k(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x)$ est $\mathbb{R}$.



Exercice 2.40 (Triangles rectangles)

Compléter le tableau :

a	b	c	α	β	γ
6	3		$\frac{\pi}{2}$		
	$2\sqrt{3}$	6	$\frac{\pi}{2}$		
50			$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	
50			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$
	$2\sqrt{3}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	
			$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$



Correction

On utilise les relations

$$\beta+\gamma=\pi \qquad a^2=b^2+c^2 \qquad \frac{c}{a}=\cos(\beta)=\sin(\gamma) \qquad \frac{b}{a}=\cos(\gamma)=\sin(\beta) \qquad \frac{c}{b}=\tan(\gamma)=\frac{1}{\tan(\beta)}$$

a	b	c	α	β	γ
6	3	$3\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	6	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
50	$25\sqrt{3}$	25	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
50	$25\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
4	$2\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$\kappa\sqrt{2}$	κ	κ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

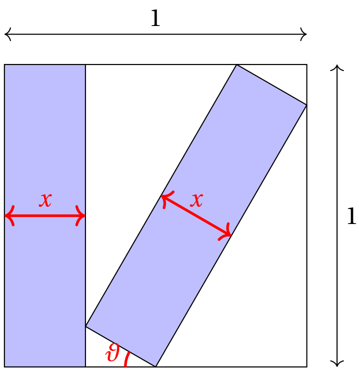
Exercice 2.41

1. Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

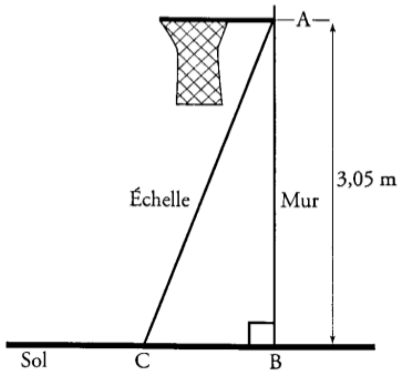
$$\vartheta(t)=\vartheta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=9.81 $\mathrm{m\,s^{-1}}$). Tracer le graphe de $t\mapsto\vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

2. L'intensité de certaines étoiles varie en manière sinusoïdale. L'intensité d'une de ces étoile possède une période de 5.4 jours et une intensité qui varie entre $4+0.35$ et $4-0.35$. Trouver une expression pour l'intensité en fonction du temps.
3. Les panneaux routiers indiquent les inclinaisons des routes au moyen de pourcentages. Une route dont l'inclinaison est de 7.5% est une route pour laquelle l'altitude augmente ou diminue de 7.5 m lorsque on se déplace horizontalement de 100 m. Sur autoroute, l'inclinaison maximale est de 5%. À quelle angle cette inclinaison correspond-t-elle ?
4. Une route fait un angle de 11° avec l'horizontale. Quelle distance a-t-on parcouru lorsqu'on se trouve 100 m plus haut que le point de départ ?
5. Calculer x et ϑ pour que les deux rectangles (égaux) coloriés puissent être placé dans le carré comme en figure 2.1a page suivante.
6. Paul veut installer chez lui un panier de basket (cf. figure 2.1b page suivante). Il doit le fixer à 3.05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3.20 m de long. À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour



(a) Exercice 2.41 page précédente-point 5.



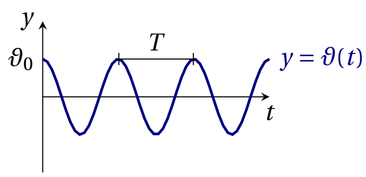
(b) Exercice 2.41 page précédente-point 6.

FIGURE 2.1. – Exercice 2.41 page précédente

que son sommet soit juste au niveau du panier? (Donner une valeur approchée au centimètre près.) Calculer l'angle formé par l'échelle et le sol. (Donner une valeur approchée au degré près.) *Brevet Rennes 1999*

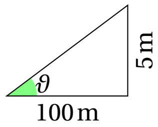
Correction

1. Fréquence $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$, Période $T = \dfrac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$, Graphe

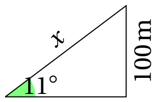


2. $I(t) = 4 + 0.35\cos\left(\frac{2\pi t}{5.4} + \varphi\right)$ avec φ quelconque.

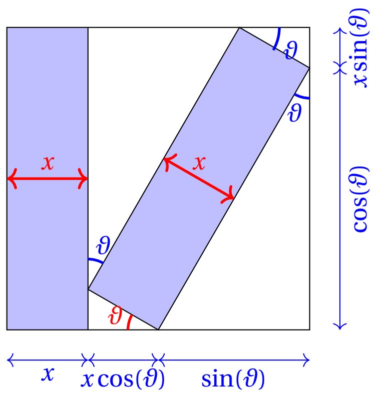
3. $7.5\% = \dfrac{7.5\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0.075$ donc $5\% = \dfrac{5\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0.05$ et $\arctan(0.05) \approx 2.86°$



4. x vérifie l'équation $x\sin(11°) = 100$ donc $x = 524\,\text{m}$



5. On complète la figure comme suit (bien évidemment $x \in]0;1[$ et $\vartheta \in]0;\pi/2[$) :



On a alors

$$\begin{cases} x + x\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) = 1 \\ \cos(\vartheta) + x\sin(\vartheta) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1-\sin(\vartheta)}{1+\cos(\vartheta)} \\ x = \frac{1-\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \end{cases}$$

ainsi $(1-\sin(\vartheta))\sin(\vartheta) = (1+\cos(\vartheta))(1-\cos(\vartheta))$ soit encore $\sin(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = 1 - \cos^2(\vartheta)$ d'où $\sin(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = \sin^2(\vartheta)$ et enfin $\sin(\vartheta)\,(1 - 2\sin(\vartheta)) = 0$. Comme $\vartheta \in]0;\pi/2[$ alors $\sin(\vartheta) = 1/2$ et on conclut que $\vartheta = \pi/6$ et $x = 2 - \sqrt{3}$.

6. Distance du pied du mur $= \sqrt{320^2 - 302^2} \approx 105.81\,\text{cm}$. Angle formé par l'échelle et le sol $= \arcsin\left(\frac{302}{320}\right) \approx 72.39°$.

Exercice 2.42

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (utiliser des graphes lorsque possible). Pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite.

1. $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$
3. $\sin(2x) < 1$
4. $\dfrac{1-2\sin(x)}{1-2\cos(x)} \le 0$
5. $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{2\sin(x)-1}} \ge 1$
6. $\dfrac{\tan^2(x)-\sqrt{3}\tan(x)}{\tan^2(x)-1} < 1$

Correction

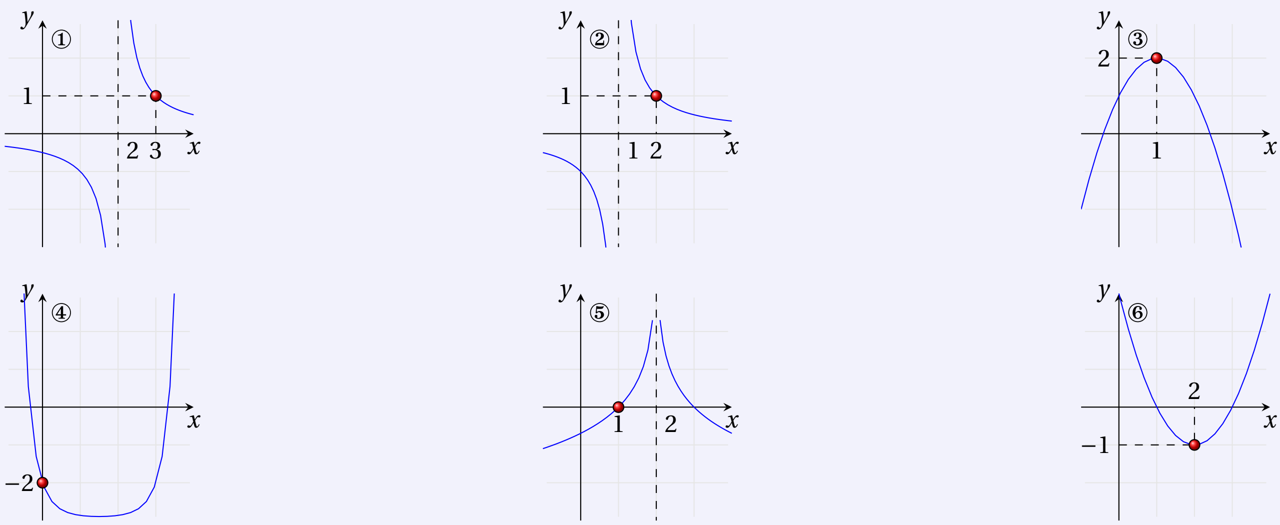
1. $\left]\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $\left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
3. $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4. $\left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cap \left]\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$
5. $\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
6. $\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}+k\pi, \pi/2+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

2.7. Miscellanea

Exercice 2.43

Redonner à chacune des fonctions son graphe.

1. $x \mapsto -3+\exp(x^2-3x)$
2. $x \mapsto (x-2)^2-1$
3. $x \mapsto -x^2+2x+1$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$
5. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{|x-2|}\right)$
6. $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-1} - 2$



Correction

1. ④
2. ⑥
3. ③
4. ①
5. ⑤
6. ②

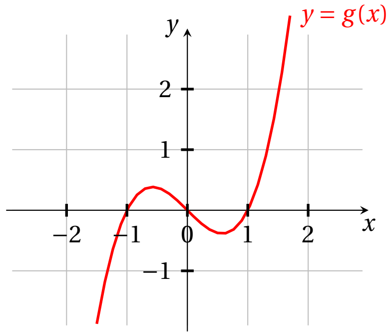
Exercice 2.44

Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

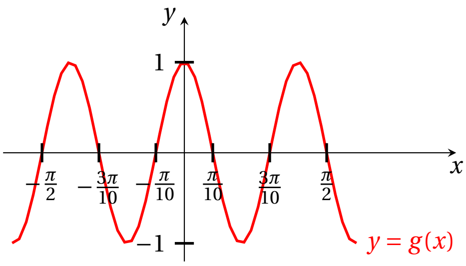
Correction

1. On cherche les intersections de la fonction définie par $g(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ avec la droite d'équation $y = m$:



Si $|m| > \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, il y a une seule intersection ; si $|m| < \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ il y a trois intersections ; si $|m| = \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ il y a deux intersections.

2. On cherche les intersections de la fonction définie par $g(x) = \cos(5x)$ avec la droite d'équation $y = m$:



Si $|m| > 1$, il n'y a pas d'intersections, sinon il y a une infinité d'intersections.

Exercice 2.45

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (utiliser des graphes lorsque possible).

1. $\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{1-\ln(x-2)}} < 2$
2. $\dfrac{(2/3)^{x-1}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$
3. $3^{x+2} \le 3^{\sqrt{x^2+x-2}}$
4. $(2^{\sqrt{x}} - 2^x)(\ln^2 x - 4) \le 0$
5. $\log_2 \dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$
6. $\log_{1/4} \sqrt{6+x-x^2} < \log_{1/4}(x-1)$
7. $\log_{1/2}(7^{2x} - 7^x + 1) > 0$
8. $\log_2 \left(\dfrac{|x|-1}{2-|x+3|}\right) \le 2$

Correction

1. $\left]2, e^{2(\sqrt{2}-1)} + 2\right[$
2. $]1, 5/2[$
3. $]-\infty, -2]$
4. $]0, e^{-2}] \cup [1, e^2]$
5. $]0, 3/(2\sqrt{2})[$
6. $]1, 5/2[$
7. $]-\infty, 0[$
8. $]-21/5, -1[\cup]-1, 1[$

Exercice 2.46

Écrire les ensembles suivants sous la forme d'intervalles et les représenter graphiquement :

1. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 3x + 2 \le 0\right\}$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 3x + 2 \ge 0\right\}$
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 3x < 4\right\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 5 < 2x\right\}$
5. $]0;1[\, \cup \,]5;7]$
6. $\left(\{1\} \cup \{2;3\}\right) \cap \,]0; 2\sqrt{2}[$

Correction

1. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 3x + 2 \le 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x-1) \le 0\} = [1;2]$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 3x + 2 \ge 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x-1) \ge 0\} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 3x < 4\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-3) < 4\} =]-1;4[$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 5 < 2x\right\} =]1-\sqrt{6}; 1+\sqrt{6}[$
5. $]0;1[\, \cup \,]5;7]$
6. $(\{1\} \cup \{2;3\}) \cap \,]0; 2\sqrt{2}[= \{1;2\}$

Chapitre 3.

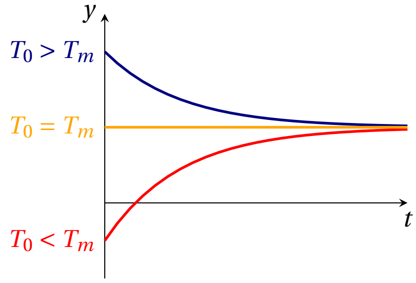
Limites et continuité

Exercice 3.1

1. Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'**évolution de sa température** est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Tracer le graphe de $t \mapsto T(t)$. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?
2. En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de g m s^{-2}. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un **fluide très visqueux** (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$
Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?
3. La force d'attraction entre deux masses est donnée par la **loi de Newton** $F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ où F est la force d'attraction (en newtons), $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} est une constante universelle, r est la distance (en mètres) entre les masses et m_1 et m_2 sont les masses. Soit la masse de la Terre 6×10^{24} kg et celle, approximative, d'un satellite 10^4 kg. À partir de quelle distance la force exercée par la Terre sur le satellite est-elle inférieure à 10 N ? Et inférieure à $\varepsilon > 0$ N ? Que vaut la limite $\lim_{r\to+\infty} F(t)$?
4. Dans le **modèle de croissance de population** de Verhulst la taille de la population est donnée par
$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_mt}}{K + e^{rP_mt}}$$
où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Correction

1. C'est une fonction de la forme $T(t) = A + Be^{-t}$ avec $B \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_m$:



2. $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{\mu}$.
Notons que $v(t) = \frac{mg}{\mu} + \left(v_0 - \frac{mg}{\mu}\right)e^{-\frac{\mu}{m}t}$ qui a la même structure que la fonction au point précédent $v(t) = A + Be^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} A$.
3. $\frac{Gm_1m_2}{r^2} < \varepsilon \overset{(\varepsilon>0)}{\iff} \frac{Gm_1m_2}{r^2\varepsilon} < 0 \overset{(r^2>0)}{\iff} \frac{Gm_1m_2}{\varepsilon} < r^2 \overset{(r>0)}{\iff} \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\varepsilon}} < r$
À partir de $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{10}}$ mètres la force exercée par la Terre sur le satellite est inférieure à 10 N. À partir de $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\varepsilon}} \approx \frac{2\times10^9}{\varepsilon}$ m la force exercée par la Terre sur le satellite est inférieure à $\varepsilon > 0$ N. On a $\lim\limits_{r\to+\infty} F(r) = 0$.
4. $\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} P_m \frac{1}{\frac{K}{e^{rP_mt}}+1} = \lim_{t\to+\infty} P_m \frac{1}{Ke^{-rP_mt}+1} = P_m$.

3.1. Calcul de limites et formes indéterminées

Exercice 3.2 (Limite du rapport de deux polynômes)
Soient $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes.

Calculer les limites suivantes en se rappelant que, si $\lim_{x\to x_0}\frac{N(x)}{D(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$, il suffit de factoriser N et D par $(x-x_0)$ pour enlever la forme indéterminée.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{4x-12}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$, $(n\in\mathbb{N})$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}$

Calculer les limites suivantes en se rappelant que, pour calculer la limite pour $x\to\infty$, il suffit de factoriser N par x^n où n est le degré de N et D par x^d où d est le degré de D pour enlever la forme indéterminée.

12. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{2x+1}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2}{5x-3}$
16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x^3+x^2}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x+3}$
18. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}$
19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}$
20. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$

Correction

1. $\displaystyle\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}\xrightarrow[x\to 2]{}\frac{2+2}{2-1}=4$,
2. $\displaystyle\frac{x^2-4x+3}{4x-12}=\frac{(x-1)(x-3)}{4(x-3)}=\frac{x-1}{4}\xrightarrow[x\to 3]{}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$
3. $\displaystyle\frac{x-1}{x^n-1}=\frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1}\xrightarrow[x\to 1]{}\frac{1}{n}$, car $x^n-1=(x-1)\sum_{i=0}^{n-1}x^i$,
4. $\displaystyle\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$
5. $\displaystyle\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}\xrightarrow[x\to -1]{}2$
6. $\displaystyle\frac{2x^2+x}{x^2-x}=\frac{(2x+1)x}{(x-1)x}=\frac{2x+1}{x-1}\xrightarrow[x\to 0]{}-1$
7. $\displaystyle\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)^2}=\frac{x-2}{x-3}\xrightarrow[x\to 3]{}\infty$
8. $\displaystyle\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}=\frac{(x+7)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+7}{x-3}\xrightarrow[x\to -3]{}-\frac{2}{3}$
9. $\displaystyle\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}=\frac{(x+4)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x+4}{x}\xrightarrow[x\to 1]{}5$
10. $\displaystyle\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}\xrightarrow[x\to 2]{}\infty$
11. $\displaystyle\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}=\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}=\frac{x-2}{x}\xrightarrow[x\to 2]{}0$

12. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$
13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$
14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x}=2$
15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2}{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{5x}=\infty$
16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x^3+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x^3}=0$
17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x}=3$
18. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4}=0$
19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^2}=\infty$
20. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^4}=1$

Exercice 3.3 (F.I.)
Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-3}{e^x+1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-3}{e^x+1}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,
9. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$,
11. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x}$,
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$,

13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin(x)}{\ln(x)}$,

Correction

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-3}{e^x+1} = -3$,
2. $\displaystyle\frac{e^{2x}-3}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x-3e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x-3e^{-x}}{1+e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$,
3. $\displaystyle\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)} = 1-\cos(x) = \xrightarrow[x\to+\pi]{} 2$,
4. $\displaystyle(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$,
5. $\displaystyle\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1+x)-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[x\to0]{} \frac{1}{2}$,
6. La limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ n'existe pas car l'existence des racines impose $x\ge3$,
7. $\displaystyle\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{(1+x+x^2)-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \xrightarrow[x\to0]{} \frac{1}{2}$,
8. Puisqu'on doit calculer la limite en $+\infty$, on peut supposer $x>0$:
$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}-1}{x} \overset{(x\ge0)}{=} \frac{x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}-1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$
9. Puisqu'on doit calculer la limite en $-\infty$, on peut supposer $x<0$:
$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}-1}{x} \overset{(x\le0)}{=} \frac{-x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}-1}{x} = -\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$$
10. La limite $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x}$ n'existe pas car on a $\displaystyle\lim_{x\to0^\pm}\frac{x^2+2|x|}{x} = \pm2$,
11. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$,
12. La limite n'existe pas car $\lim_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|} = -1$ et $\lim_{x\to0^+}\dfrac{x}{|x|} = +1$;
13. $\displaystyle\frac{\sqrt{x}+\sin(x)}{\ln(x)} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}+\frac{\sin(x)}{\ln(x)}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $\frac{-1}{\ln(x)} \le \frac{\sin(x)}{\ln(x)} \le \frac{1}{\ln(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\pm1}{\ln(x)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} = 0$ pour tout $\alpha,\beta>0$;

Exercice 3.4

On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Compléter le tableau ci-dessus.

	$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to0} f(x)$				
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	1			
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$				

Correction

	$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to0} f(x)$	0	1	0	$\nexists$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	1	0	$+\infty$	0
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	1	0	$-\infty$	0

- D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $-1\le\sin(x)\le1$
- D'après la limite donnée $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

- Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x=-t}{=} \lim_{t\to+\infty} -t\sin\left(-\frac{1}{t}\right) \overset{\sin(-a)=-\sin(a)}{=} \lim_{t\to+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$
- Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\sin(x) \overset{x=1/t}{=} \lim_{t\to\pm\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$
- D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sin(x) = 0$ car $-1 \le \sin(x) \le 1$
- D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $-1 \le \cos(x) \le 1$
- $\lim_{x\to+\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\cos(x)$ n'existe pas car $\lim_{x\to0^\pm} \frac{1}{x}\cos(x) = \pm\infty$
- D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\cos(x) = 0$ car $-1 \le \cos(x) \le 1$

Exercice 3.5

Étudier les limites des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$

$$f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}.$$

Correction

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}; \\
g(x) &= \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.6

Étudier, en fonction des deux entiers positif n et m, la limite en 0 de la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Correction

En faisant intervenir l'expression conjuguée on réécrit la fonction sous la forme

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} = \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\frac{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}.$$

L'étude de la limite en 0 est alors le même que celle de la fonction $x\mapsto x^{m-n}$:

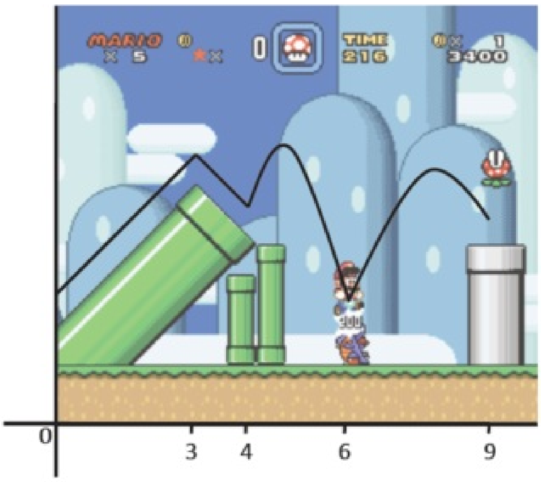
$$\lim_{x\to0^+} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m>n,\\ 1 & \text{si } m=n,\\ +\infty & \text{si } m<n \text{ et } m-n \text{ est pair},\\ +\infty & \text{si } m<n \text{ et } m-n \text{ est impair,} \end{cases} \qquad \lim_{x\to0^-} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m>n,\\ 1 & \text{si } m=n,\\ +\infty & \text{si } m<n \text{ et } m-n \text{ est pair},\\ -\infty & \text{si } m<n \text{ et } m-n \text{ est impair.} \end{cases}$$

3.2. Continuité

Exercice 3.7
Au niveau 1 de `Super Mario World`, Mario court et saute vers la droite. Notons x sa position horizontale. Sa hauteur h est décrite en fonction de x par la fonction définie par morceaux suivante :

$$h(x)=\begin{cases} x+a, & \text{si } 0\le x<3,\\ 9-x, & \text{si } 3\le x<4,\\ bx^2+39x-87, & \text{si } 4\le x<6,\\ -x^2+16x+c, & \text{si } 6\le x\le 9.\end{cases}$$

Calculer les valeurs de a, b et c pour que le parcours de Mario soit continue sur l'intervalle $[0;9]$.



Correction
Il s'agit de calculer les valeurs de a, b et c pour que la fonction h soit continue en $x=3$, $x=4$ et $x=6$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to3^-} h(x)=\lim_{x\to3^-} x+a=3+a, && \lim_{x\to3^+} h(x)=\lim_{x\to3^+} 9-x=6, && \implies a=3;\\
&\lim_{x\to4^-} h(x)=\lim_{x\to4^-} 9-x=5, && \lim_{x\to4^+} h(x)=\lim_{x\to4^+} bx^2+39x-87=16b+69, && \implies b=-4;\\
&\lim_{x\to6^-} h(x)=\lim_{x\to6^-} -4x^2+39x-87=3, && \lim_{x\to6^+} h(x)=\lim_{x\to6^+} -x^2+16x-57=-36+96+c, && \implies c=-57.
\end{aligned}$$

On obtient la fonction continue sur l'intervalle $[0;9]$ suivante :

$$h(x)=\begin{cases} x+3, & \text{si } 0\le x<3,\\ 9-x, & \text{si } 3\le x<4,\\ -4x^2+39x-87, & \text{si } 4\le x<6,\\ -x^2+16x-57, & \text{si } 6\le x\le 9.\end{cases}$$

Exercice 3.8 (Discontinuité de première espèce)
Montrer que $f\colon \mathbb{R}_*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{x}{|x|}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction
On ne peut pas définir une application $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_*$ car

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=-1,\qquad \lim_{x\to0^+} f(x)=+1.$$

Exercice 3.9 (Discontinuité de seconde espèce)
Montrer que $f\colon \mathbb{R}_*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction
La limite de $f(x)$ pour x qui tend vers 0 n'existe pas.

Exercice 3.10 (Fonction prolongeable par continuité)
Montrer que $f\colon \mathbb{R}_*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.

Correction
Comme $\lim_{x\to0} f(x)=1$, on peut définir la fonction continue

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq0,\\ 1 & \text{si } x=0,\end{cases}\end{aligned}$$

Exercice 3.11

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Correction

Elle est continue car $\frac{\sin(x)}{x}$ est continue pour $x \neq 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$.

Exercice 3.12

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Correction

Elle est continue car $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x > 0$, $x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x < 0$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Exercice 3.13

1. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Correction

1. On a $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x\to-1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1 mais elle est prolongeable par continuité en -1 et ce prolongement vaut $-1/2$.
2. On a $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \mp\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1 mais elle est prolongeable par continuité en 1 et ce prolongement vaut $-1/2$.

Exercice 3.14

Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Correction

On considère la fonction $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. On remarque que $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$. D'après le théorème d'existence des zéros d'une fonction continue, il existe (au moins un) $x_0 \in [a,b]$ tel que $h(x_0) = 0$. Comme $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$, alors $x_0 \in]a,b[$. Comme $h(x_0) = 0$ alors $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 3.15

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Correction

Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ est solution du problème. Si $f(1) = 1$ alors $\alpha = 1$ est solution du problème. Supposons $f(0) \neq 0$ (donc $f(0) > 0$) et $f(1) \neq 1$ (donc $f(1) < 0$). Soit g la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x) - x$. Comme $f(0) > 0$ alors $g(0) > 0$. Comme $f(1) < 1$ alors $g(1) < 0$. Or g est continue sur $[0,1]$ donc il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, ce qui implique $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 3.16

Un alpiniste commence à escalader une montagne un samedi à 7 heures du matin. À 5 heures de l'après-midi, il atteint le sommet, où il décide de passer la nuit. Le dimanche matin à 7 heures, il entame sa descente. Il arrive à son point de départ à 17 heures. On suppose que son altitude varie continûment au cours du temps. Prouver qu'à un même moment de la journée du samedi et celle du dimanche, il était à la même altitude.

Correction
Pour $t \in [7, 17]$, on note $S(t)$ (resp. $D(t)$) l'altitude de l'alpiniste au moment t de la journée de samedi (resp. dimanche). La fonction $f = S - D$ est continue et vérifie $f(7) \le 0 \le f(17)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [7, 17]$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $S(c) = D(c)$.

Exercice 3.17 (Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{35} + x - 10^{-35}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant à $f(x) = 0$ et $0 < x < \frac{1}{10}$.

Correction
Puisque $f(0) = -10^{-35} < 0$, $f(10^{-1}) = 10^{-35} + 10^{-1} - 10^{-35} = 10^{-1} > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe (au moins un) $x \in [0; 10^{-1}]$ tel que $f(x) = 0$.

Chapitre 4.

Dérivées

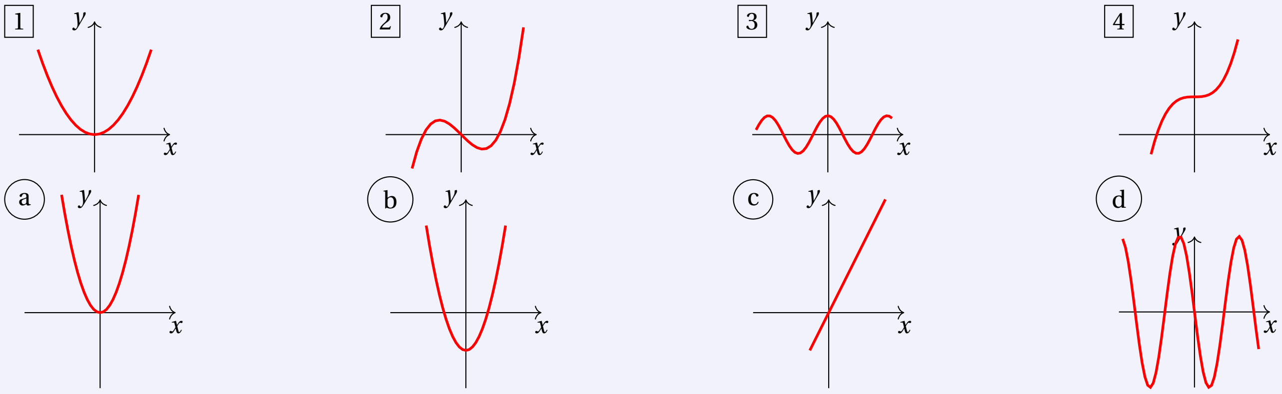
4.1. Graphes

Rappels

$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
	>0	$\nearrow$
	$=0$	f tangente horizontale
	<0	$\searrow$
>0	$\nearrow$	convexe
$=0$	$\longleftrightarrow$	
<0	$\searrow$	concave

Exercice 4.1

Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.

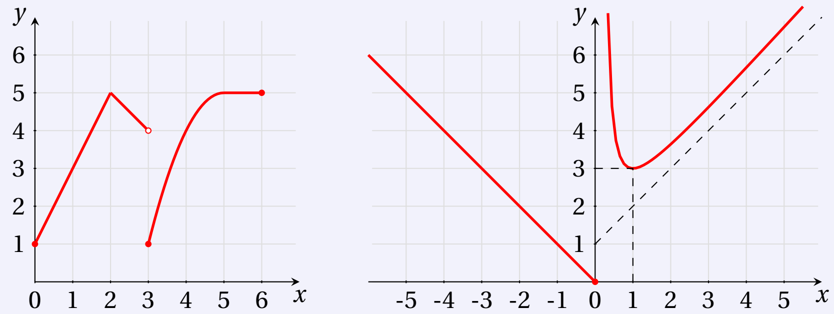


Correction

$\boxed{1}$-c $\boxed{2}$-b $\boxed{3}$-d $\boxed{4}$-a

Exercice 4.2

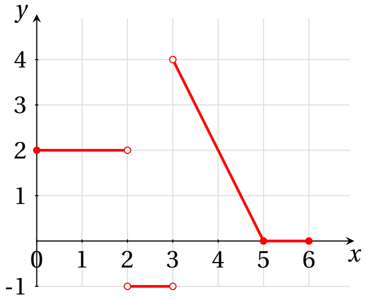
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée (la graphe de gauche est constitué de parties de droites ou paraboles).

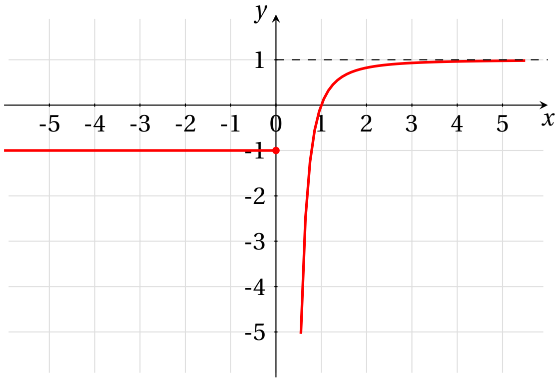


Correction
Pour la fonction de gauche on remarque que $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ -x+7 & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 5-(x-5)^2 & \text{si } 3 \le x \le 5, \\ 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$ ainsi $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x < 2, \\ -1 & \text{si } 2 < x < 3, \\ -2x & \text{si } 3 \le x < 5, \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

Étudions les raccordements :

- $f'(2)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2$ tandis que $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$
- $f'(3)$ n'existe pas car f n'est pas continue en $x = 3$
- $f'(5) = 0$





4.2. Calcul de dérivées

Exercice 4.3
Calculer les dérivées des fonctions :

1. $5x^2$
2. $4x^3+2x-1$
3. $\left(1-\frac{x}{7}\right)^7$
4. $(3x+2)^9$
5. $\frac{1}{(2x+1)^4}$
6. $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$
7. $\frac{x^2+3}{x^3+3x-7}$
8. $x^3\sin(x)$
9. $x^2\tan(x)$
10. $\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$
11. $\sin(x)\cos(x)$
12. $\cos(-2x+1)$
13. $\frac{x}{\sin(2x)}$
14. $\ln(x^2+1)$
15. e^{x^2-3}
16. $\frac{4x}{\cos(x)}$
17. $2xe^{\cos(x)}$
18. $\sqrt{\cos(x)+2}$
19. $\sin(2x+1)$
20. $x\cos(5x)$
21. $\sin(x^2)$
22. $\sin\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$
23. $\sin(2x)\cos(7x)$

Correction

1. $10x$
2. $12x^2+2$
3. $-\left(1-\frac{x}{7}\right)^6$
4. $27(3x+2)^8$
5. $-\frac{8}{(2x+1)^5}$
6. $(x^{-3/2})' = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$
7. $\frac{2x(x^3+3x-7)-(x^2+3)(3x^2+3)}{(x^3+3x-7)^2} = -\frac{x^4+6x^2+14x+9}{(x^3+3x-7)^2}$
8. $x^2(3\sin(x)+x\cos(x))$
9. $2x\tan(x)+x^2(1+\tan^2(x))$
10. $\frac{1}{1-\sin(x)}$
11. $\cos^2(x)-\sin^2(x) = \left| \begin{array}{l} 2\cos^2(x)-1 \\ 1-2\sin^2(x) \end{array}\right.$
12. $2\sin(-2x+1)$
13. $\frac{\sin(2x)-2x\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$
14. $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
15. $2xe^{x^2-3}$
16. $\frac{4\cos(x)+4x\sin(x)}{\cos^2(x)}$
17. $2(1-x\sin(x))e^{\cos(x)}$
18. $\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+2}}$
19. $2\cos(2x+1)$
20. $\cos(5x)-5x\sin(5x)$
21. $2x\cos(x^2)$
22. $\frac{5}{(x+3)^2}\cos\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$
23. $2\cos(2x)\cos(7x)-7\sin(2x)\sin(7x)$

Exercice 4.4

Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Correction

On a

- $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$ ssi $A = -1$ et $B = 1$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\dfrac{1}{x} = (-1)^n n! \dfrac{1}{x^{n+1}}$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\dfrac{1}{x-1} = (-1)^n n! \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}$

donc $(x^2 - x)^{-1} = (x-1)^{-1} - x^{-1}$ donc $f^{(100)}(x) = 100!\big((x-1)^{-101} - x^{-101}\big)$ et plus généralement

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n n! \big((x-1)^{-n-1} - x^{-n-1}\big)$$

Exercice 4.5

Vérifier que la fonction donnée est solution de l'EDO (équation différentielle ordinaire) indiquée :

1. $y(x) = e^{-x}$ et $y'(x) = -y(x)$
2. $y(x) = Ce^{x^2/2}$ et $y'(x) = xy(x)$
3. $y(x) = Ce^x - (1+x)$ et $y'(x) + y(x) = x$
4. $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{\gamma t}$ et $T'(t) = \gamma(T(t) - T_a$
5. $y(x) = \frac{1}{c+x^2}$ et $y'(x) + 2xy^2(x) = 0$

Correction

1. $y(x) = e^{-x}$ donc $y'(x) = -e^{-x} = -y(x)$
2. $y(x) = Ce^{x^2/2}$ donc $y'(x) = Cxe^{x^2/2} = xy(x)$
3. $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{\gamma t}$ donc $T'(t) = \gamma(T_0 - T_a)e^{\gamma t} = \gamma(T(t) - T_a)$
4. $y(x) = \frac{1}{c+x^2}$ donc $y'(x) = -\frac{2x}{(c+x^2)^2} = -2xy^2(x)$

Exercice 4.6

1. Une masse tombe avec une accélération constante a. Comment évolue sa vitesse ?
2. Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de VAN DER WAALS qui s'écrit $P(V) = nRT/(V - nb) - an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.
3. Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?
4. Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de $200\,\mathrm{m}$ d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur lorsque l'angle d'élévation est égal à $\pi/4$?
5. Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de $100\,\mathrm{m}$ d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur après $10\,\mathrm{s}$?
6. Quelle accélération constante (en $\mathrm{m\,s^{-2}}$) un véhicule doit-il avoir pour passer d'une vitesse de $0\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ à une vitesse de $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ en $10\,\mathrm{s}$?
7. Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
8. Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Correction

1. $v(t) = at + v(0)$.
2. $P'(V) = -\dfrac{nRT}{(V-nb)^2} + \dfrac{2an^2}{V^3}$.
3. $x'(t) = -2\pi\omega A\sin(2\pi\omega t)$. Lorsque l'amplitude double, la vitesse double.
4. $h(t) = 10t$ et $\dfrac{h(t)}{200} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\left(\dfrac{t}{20}\right)$ et $\vartheta'(t) = \dfrac{20}{400+t^2}$. Si $\bar{t}$ est l'instant tel que $\vartheta(\bar{t}) = \pi/4$, alors $\bar{t} = 20\tan(\pi/4) = 20$ et $\vartheta'(\bar{t}) = \dfrac{20}{400+400} = \dfrac{1}{40}$ radians par second.
5. $h(t) = 10t$ et $\dfrac{h(t)}{100} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\left(\dfrac{t}{10}\right)$ et $\vartheta'(t) = \dfrac{10}{100+t^2}$ et $\vartheta'(10) = \dfrac{1}{20}$ radians par second.
6. $100\,\mathrm{km\,h^{-1}} = \frac{100000}{3600}\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{1000}{36}\mathrm{m\,s^{-1}}$ donc $a = (1000/36-0)/10\mathrm{m\,s^{-2}} = \frac{10}{36}\mathrm{m\,s^{-2}}$.
7. Le rayon est fonction du temps donc $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2r'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k4\pi[r(t)]^2$. Donc $4\pi[r(t)]^2r'(t) = k4\pi[r(t)]^2$, autrement dit $k = r'(t)$ ce qui implique que $r(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement, on a $r(0) = 1$ et $r(1) = 0$ et on obtient la relation $r(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi(1-\hat{t})^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.
8. La surface et le volume d'un cube de coté ℓ sont respectivement $S = 6\ell^2$ et $V = \ell^3$. Le coté est fonction du temps donc $V'(t) = [\ell(t)]^2\ell'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k6[\ell(t)]^2$. Donc $[\ell(t)]^2\ell'(t) = k6[\ell(t)]^2$, autrement dit $6k = \ell'(t)$ ce qui implique que $\ell(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement, on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = 0$ et on obtient la relation $\ell(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $(1-\hat{t})^3 = 1/2$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.

4.3. Dérivées partielles

Jusqu'à maintenant nous avons considerée des fonctions d'une seule variable, *i.e.* $f\colon x \mapsto f(x)$. Nous avons alors definie la dérivée de f en x_0 et nous l'avons notée $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.
Dans cette partie nous considérons des fonctions de plusieurs variables, par exemple $f\colon (x,a) \mapsto f(x,a) = a^2 + x$. Les fonctions de plusieurs variables sont le sujet de cours spécifiques. Ici nous allons juste apprendre à dériver formellement ce type de fonctions. L'idée est de travailler **comme si elles sont fonction d'une seule variable à la fois, les autres variables étant considérées comme des paramètres constants lors de la dérivation.** Dans ce cas, lorsqu'on dérive f par rapport à "la" variable considerée (par exemple la variable x), il faut indiquer explicitement cette variable : la dérivée, dite "dérivée partielle par rapport à x", se notera $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou encore $\partial_x f$.
Concrètement, pour calculer la dérivée partielle $\partial_x f$, on dérive f comme si elle est une fonction de la seule variable x et que l'autre variable est une constante. Quelques exemples :

1. Si $f(x,a) = a^2 + x$ alors $\partial_x f(x,a) = 1$, $\partial_a f(x,a) = 2a$.
2. Considérons l'entropie d'un gaz parfait en fonction de l'énergie interne spécifique ε et du volume spécifique τ : $s(\tau,\varepsilon) = c_v\ln\left(\varepsilon\tau^{\gamma-1}\right) = c_v\ln(\varepsilon) + c_v(\gamma-1)\ln(\tau)$ (avec c_v et $\gamma > 1$ deux constantes). Comme la température et la pression sont définies respectivement par $T = 1/\partial_\varepsilon s$ et $P = T\partial_\tau s$, on obtient $T = \frac{1}{\partial_\varepsilon s} = \frac{\varepsilon}{c_v}$ et $P = T\partial_\tau s = \frac{\varepsilon}{c_v}\frac{c_v(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}}{\varepsilon\tau^{\gamma-1}} = (\gamma-1)\frac{\varepsilon}{\tau}$. On retrouve ainsi la relation bien connue $P\tau = RT$ avec $R = c_v(\gamma-1)$.
3. La résistance totale R d'un conducteur produite par trois conducteurs de résistances R_1, R_2 R_3, connectés en parallèle, est donnée par la formule
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$
On a alors $\partial_{R_i} R(R_1,R_2,R_3) = R^2/R_i^2$.

Exercice 4.7
Calculer toutes les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^2$
2. $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$
3. $f(x,y) = y^5 - 3xy$
4. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$
5. $f(x,y) = x\cos(e^{xy})$
6. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
7. $f(x,t) = e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $f(x,y) = (2x+3y)^{10}$

9. $f(x,y)=\frac{ax+by}{cx+dy}$ 10. $f(x,y)=x^y$

Correction

1. $\partial_x f(x,y)=6x+y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x,y)=x-4y$ (car x est considérée constante)
2. $\partial_x f(x,y)=-2x$ et $\partial_y f(x,y)=-4y$
3. $\partial_x f(x,y)=-3y$ et $\partial_y f(x,y)=5y^4-3x$
4. $\partial_x f(x,y)=2x+3y^2$ et $\partial_y f(x,y)=6xy-30y^4$
5. $\partial_x f(x,y)=\cos(e^{xy})-xye^{xy}\sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x,y)=-x^2e^{xy}\sin(e^{xy})$
6. $\partial_x f(x,y)=1/y$ et $\partial_y f(x,y)=-x/y^2$
7. $\partial_x f(x,t)=-\pi e^{-t}\sin(\pi x)$ et $\partial_t f(x,t)=-e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $\partial_x f(x,y)=20(2x+3y)^9$ et $\partial_y f(x,y)=30(2x+3y)^9$
9. $\partial_x f(x,y)=\frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$ et $\partial_y f(x,y)=\frac{(bc-ad)x}{(cx+dy)^2}$
10. $\partial_x f(x,y)=yx^y/x$ et $\partial_y f(x,y)=\ln(x)x^y$ ⚠ $x^y=e^{y\ln(x)}$ donc $x>0$

⚠ Exercice 4.8 (Loi de Fick)

Les lois de diffusion de Fick décrivent la diffusion. Les expériences de Fick portaient sur la mesure des concentrations et des flux de sel, diffusant entre deux réservoirs à travers des tubes d'eau.

La deuxième loi de Fick prédit comment la diffusion fait changer la concentration en fonction du temps. Notons φ la concentration (une fonction qui dépend de l'emplacement x et du temps t) et soit D le coefficient de diffusion (supposé constant). La deuxième loi de Fick postule que, pour tout (t,x),

$$\partial_t\varphi=\partial_x\left(D\partial_x\varphi\right).$$

Montrer que la fonction suivante est solution de cette équation différentielle :

$$\varphi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

Correction

Dans un premier temps, pour simplifier nos calculs, nous allons introduire des constantes auxiliaires : on pose $A\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{4\pi D}}$ et $B=-\frac{1}{4D}$ ainsi

$$\varphi(t,x)=\frac{A}{\sqrt{t}}\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right).$$

Il est alors plus simple de calculer les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\partial_t\varphi(t,x)&=\frac{-A}{2t\sqrt{t}}\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)-\frac{A}{\sqrt{t}}B\frac{x^2}{t^2}\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)=-\frac{A}{2}\times\frac{2Bx^2+t}{t^2\sqrt{t}}\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)\\
\partial_x\varphi(t,x)&=\frac{2ABx}{t\sqrt{t}}\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)\\
\partial_x\left(\partial_x\varphi(t,x)\right)=D\partial_x\left(\partial_x\varphi(t,x)\right)&=\frac{2ABD(2Bx^2+t)}{t^2\sqrt{t}}\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)
\end{aligned}$$

La relation s'écrit donc

$$\partial_t\varphi(t,x)-D\partial_x\left(\partial_x\varphi(t,x)\right)=\left[-\frac{A}{2}\times\frac{2Bx^2+t}{t^2\sqrt{t}}-\frac{2ABD(2Bx^2+t)}{t^2\sqrt{t}}\right]\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)=-\frac{A(1+4BD)(2Bx^2+t)}{2t^2\sqrt{t}}\exp\left(B\frac{x^2}{t}\right).$$

En remplaçant B par sa définition on a $(4BD+1)=0$ ainsi l'égalité est satisfaite pour tout (t,x).

Exercice 4.9

1 mole de gaz parfait qui occupe le volume V à la température T et à la pression P vérifie la relation $PV=RT$ où R est une constante. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}=-1,\qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T}=R.$$

Correction
On a

$$\frac{\partial P}{\partial V}=-R\frac{T}{V^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P} \qquad \frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R} \qquad \frac{\partial P}{\partial T}=\frac{R}{V}$$

donc

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}=-R\frac{T}{V^2}\frac{R}{P}\frac{V}{R}=-1, \qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T}=T\frac{R}{V}\frac{R}{P}=R.$$

Exercice 4.10

Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction

$$T(x,t)=T_0+T_1e^{-\lambda x}\sin(\omega t-\lambda x)$$

où $\omega=2\pi/365$ et λ sont deux constantes positives.

1. Calculer $\partial_x T$ et $\partial_t T$.
2. Montrer que T satisfait l'équation de la chaleur $\partial_t T=k\partial_x(\partial_x T)$ pour une certaine constante k.

Correction
1. $\partial_x T=-\lambda T_1e^{-\lambda x}(\sin(\omega t-\lambda x)+\cos(\omega t-\lambda x))$ et $\partial_t T=\omega T_1e^{-\lambda x}\cos(\omega t-\lambda x)$.
2. On a $\partial_x(\partial_x T)=2\lambda^2T_1e^{-\lambda x}\cos(\omega t-\lambda x)$ donc $\frac{\partial_t T}{\partial_x(\partial_x T)}=\frac{\omega T_1e^{-\lambda x}\cos(\omega t-\lambda x)}{2\lambda^2T_1e^{-\lambda x}\cos(\omega t-\lambda x)}=\frac{\omega}{2\lambda^2}$.

Exercice 4.11 (Gaz parfait)

Pour un gaz parfait, l'énergie interne ε s'écrit en fonction du volume spécifique τ et de l'entropie spécifique s comme

$$\begin{aligned}\varepsilon\colon \mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\(\tau,s)&\mapsto\tau^{1-\gamma}e^{s/c_v}\end{aligned}$$

où $\gamma>1$ et $c_v>0$ sont deux constantes. Sachant que la pression p et la température T sont liées à l'énergie interne par les relations

$$p=-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}, \qquad T=\frac{\partial\varepsilon}{\partial s},$$

prouver la loi des gaz parfait, *i.e.* prouver que

$$\frac{p\tau}{T}=\text{constante}.$$

Correction

$$p=-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}=-(1-\gamma)\tau^{-\gamma}e^{s/c_v}=\frac{\gamma-1}{\tau}\varepsilon, \qquad T=\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}=\frac{1}{c_v}\tau^{1-\gamma}e^{s/c_v}=\frac{\varepsilon}{c_v}, \qquad \frac{p\tau}{T}=(\gamma-1)c_v.$$

Exercice 4.12 (Gaz raidis)

Notons

- ▷ τ le volume,
- ▷ ε l'énergie interne,
- ▷ s l'entropie,
- ▷ T la température,
- ▷ P la pression,
- ▷ g le potentiel de GIBBS (ou enthalpie libre),
- ▷ h l'enthalpie,
- ▷ Γ le coefficient de GRÜNEISEN,
- ▷ c^* la vitesse du son.

On a les relations suivantes :

$$T=1/\partial_\varepsilon s(\tau,\varepsilon) \qquad P=T\partial_\tau s(\tau,\varepsilon)$$
$$g=\varepsilon-Ts+P\tau \qquad h=\varepsilon+P\tau$$

$$\Gamma = -\tau T\left(P\partial^2_{\varepsilon\varepsilon}s(\tau,\varepsilon) - \partial^2_{\varepsilon\tau}s(\tau,\varepsilon)\right) \qquad\qquad (c^*)^2 = \tau^2\left(P\partial_\varepsilon P(\tau,\varepsilon) - \partial_\tau P(\tau,\varepsilon)\right).$$

La loi d'état des gaz raidis qui exprime l'entropie en fonction du volume et de l'énergie interne s'écrit

$$(\tau,\varepsilon) \mapsto s(\tau,\varepsilon) = c_v \ln(\varepsilon - q - \pi\tau) + c_v(\gamma-1)\ln(\tau)$$

où les paramètres $c_v > 0$, $\gamma > 1$, $\pi > 0$ et q sont des constantes qui décrivent les propriétés thermodynamique du fluide. Le domaine de définition de l'entropie s est l'ensemble $\left\{(\tau,\varepsilon)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \tau>0, \varepsilon - q - \pi\tau > 0\right\}$. La loi des gaz parfaits correspond au cas $\pi = q = 0$.
Calculer $T(\tau,\varepsilon)$, $P(\tau,\varepsilon)$, $h(\tau,\varepsilon)$, $g(\tau,\varepsilon)$, $\Gamma(\tau,\varepsilon)$ et $(c^*)^2(\tau,\varepsilon)$ pour un gaz raidi.

Correction

$$\begin{aligned}
&T = \frac{\varepsilon - q - \pi\tau}{c_v} > 0, && P = \frac{\varepsilon - q - \pi\tau}{\tau}(\gamma-1) - \pi = (\gamma-1)\frac{\varepsilon - q}{\tau} - \gamma\pi,\\
&h = q + (\varepsilon - q - \pi\tau)\gamma > q, && g = q + (\varepsilon - q - \pi\tau)\left(\gamma - \ln\left((\varepsilon - q - \pi\tau)\tau^{(\gamma-1)}\right)\right),\\
&\Gamma = \gamma - 1 > 0, && (c^*)^2 = \gamma(\gamma-1)(\varepsilon - q - \pi\tau) = \gamma(P+\pi)\tau = \gamma(\gamma-1)c_v T = (\gamma-1)(h-q) > 0.
\end{aligned}$$

Exercice 4.13 (Van der Waals)
La loi de Van der Waals pour 1 mole d'un gaz s'écrit

$$P(V,T) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

où P est la pression, V le volume, T la température du gaz, R la constant universelle des gaz et a et b deux constantes positives.
Le point critique est définit comme le point $(V_c, T_c, P_c = P(V_c,T_c))$ où s'annulent les deux dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial V}$ et $\frac{\partial \frac{\partial P}{\partial V}}{\partial V}$. Exprimer a et b en fonction du point critique.

Correction

$$\begin{cases} P(V_c,T_c) = P_c\\ \frac{\partial P}{\partial V}(V_c,T_c) = 0\\ \frac{\partial\frac{\partial P}{\partial V}}{\partial V}(V_c,T_c) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{RT_c}{V_c-b} - \frac{a}{V_c^2} = P_c\\ \frac{-RT_c}{(V_c-b)^2} + \frac{2a}{V_c^3} = 0\\ \frac{2RT_c}{(V_c-b)^3} - \frac{6a}{V_c^4} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c} = \frac{9}{8}RT_cV_c\\ b = \frac{RT_c}{8P_c} = \frac{V_c}{3} \end{cases}$$

4.4. Droite tangente au graphe d'une fonction

Exercice 4.14 (Droite tangente au graphe d'une fonction)

1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$. Trouver a et b.
5. La pente de la tangente au graphe de f en $x = 1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x = 1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$ si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$?

Correction
L'équation de la droite tangente au graphe de f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1. Pente : $f'(1) = 2$. Équation : $y = 2(x-1) + f(1) = 2x$.
2. Pente : $f'(0) = 4$. Équation : $y = 4x + f(0) = 4x$.
3. Pente : $f'(1) = 0$. Équation : $y = f(1) = 2$.

4. $f'(2)=3$ et $f(2)=0$ donc $a=9/4$ et $b=-6$.
5. $f'(1)=3$ et $g'(1)=7$, alors $(f+g)'(1)=10$ (pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x=1$). Comme $(fg)'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$ on ne peut rien dire sans connaître $f(1)$ et $g(1)$. Si $f(1)=3$ et $g(1)=2$ alors $(fg)'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=3\times2+3\times7=27$ (pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$).

Exercice 4.15 (Parabole osculatrice au graphe d'une fonction)

Trouver l'équation de la parabole osculatrice au graphe de la fonction en le point indiqué.

1. $f(x)=x^2+1$ en $x_0=1$
2. $g(x)=e^x$ en $x_0=0$
3. $h(x)=\ln(1+x)$ en $x_0=0$
4. $w(x)=\cos(x)$ en $x_0=0$

Correction

L'équation de la parabole osculatrice au graphe de f en x_0 est $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$.

1. On a $f(x)=x^2+1$, $f'(x)=2x$ et $f''(x)=2$ donc $f(1)=2$, $f'(1)=2$, $f''(1)=2$. L'équation cherchée est $y=2+2(x-1)+\frac{2}{2}(x-1)^2=2x+(x-1)^2=x^2+1$, ce qui est évident car la meilleure parabole qui approche f est f elle même car f est une parabole.
2. On a $g(x)=e^x$, $g'(x)=g''(x)=e^x$ donc $g(0)=g'(0)=g''(0)=1$. L'équation cherchée est $y=1+1(x-0)+\frac{1}{2}(x-0)^2=1+x+\frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction exponentielle par sa droite tangente ou, encore mieux, par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\sqrt{e}$ par $1+\frac{1}{2}$ ou, encore mieux, par $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}$. Avec une calculatrice on vérifie que $\sqrt{e}\approx1.648721271$, $1+\frac{1}{2}=1.5$ et $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}=1.625$.
3. On a $h(x)=\ln(1+x)$, $h'(x)=\frac{1}{1+x}$ et $g''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ donc $h(0)=0$, $h'(0)=1$ et $h''(0)=-1$. L'équation cherchée est $y=0+1(x-0)-\frac{1}{2}(x-0)^2=x-\frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction h par sa droite tangente ou, encore mieux, par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\ln(1.5)$ par $\frac{1}{2}$ ou, encore mieux, par $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}$. Avec une calculatrice on vérifie que $\ln(1.5)\approx0.405465108$, $\frac{1}{2}=0.5$ et $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}=0,375$.
4. On a $w(x)=\cos(x)$, $w'(x)=-\sin(x)$ et $w''(x)=-\cos(x)$ donc $w(0)=1$, $w'(0)=0$ et $w''(0)=-1$. L'équation cherchée est $y=1-\frac{1}{2}(x-0)^2=1-\frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction $\cos(x)$ par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\cos(\pi/6)$ (radiants!) par $1-\frac{1}{72}\pi^2$. Avec une calculatrice on vérifie que $\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2\approx0.86602540378$ et $1-\frac{1}{72}\pi^2\approx0.862922161$.

Exercice 4.16

On considère une fonction exponentielle $f\colon x\mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* qu'importe la valeur choisie pour c.

Correction

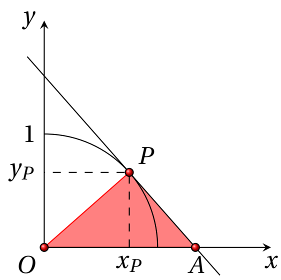
Notons (x_P,y_P) les coordonnées de P.

- P appartient au graphe de la courbe, donc $y_P=c^{x_P}$.
- P appartient à la tangente au graphe de f passant par l'origine. Cette droite a pour équation $y=f'(x_P)x$ et l'on a $f'(x)=\ln(c)c^x$ donc on a aussi $y_P=\ln(c)c^{x_P}x_P$.

x_P est alors solution de l'équation $c^{x_P}=\ln(c)c^{x_P}x_P$, ce qui équivaut à $x_P=\frac{1}{\ln(c)}=\log_c(e)$. Alors $y_P=c^{x_P}=e$ quelque soit la base c choisie.

Exercice 4.17

On considère le quart de circonférence d'équation $y=\sqrt{1-x^2}$ pour $0<x<1$. Soit $P=(x_P,y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par A le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe x. Exprimer la surface du triangle OAP en fonction de x_P.



Correction

Soit $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x=x_P$ s'écrit

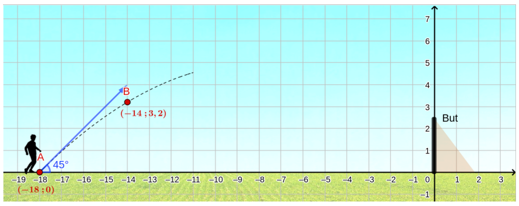
$$y=f'(x_P)(x-x_P)+f(x_P)=\frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x-x_P)+\sqrt{1-x_P^2}$$

$A = (x_A, 0)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $y = 0$, donc on a

$$\frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x_A - x_P) + \sqrt{1-x_P^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_A = \frac{1}{x_P}$$

et la surface du triangle OAP en fonction de x_P est $\frac{x_A y_P}{2} = \frac{\sqrt{1-x_P^2}}{2x_P}$.

Exercice 4.18
Un joueur de foot, situé à 18m du but, effectue un tir en cloche. On modélise la situation dans un repère orthonormé (l'unité choisie est le mètre). On suppose que la trajectoire du ballon est parabolique et passe par les points $(-18;0)$ et $(-14;3.2)$, la tangente à la courbe en $x = -18$ forme un angle de 45° avec l'horizontale. On note p la fonction qui à l'abscisse x de la balle associe son ordonnée $p(x)$.



1. Écrire et résoudre le système qui permet de déterminer p.
2. À quelle hauteur maximale le ballon va-t-il s'élever ?
3. Sachant que le but a une hauteur de 2.44m, le tir est-il cadré ?

Correction
Source : https://www.python-lycee.com/activite-en-ligne-mathematiques

1. On cherche a, b, c tels que $p(x) = c + bx + ax^2$. On sait que $p(-18) = 0$, $p(-14) = \frac{32}{10}$ et $p'(-18) = 1$, d'où le système linéaire
$$\begin{cases} c - 18b + (-18)^2 a = 0 \\ c - 14b + (-14)^2 a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases}$$
On utilise la méthode de Gauss (pour les calculs se rappeler que $14^2 - 18^2 = (14-18)(14+18) = -4 \times 32$) :
$$\begin{cases} c - 18b + (-18)^2 a = 0 \\ c - 14b + (-14)^2 a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ 4b - 4 \times 32a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ b - 32a = \frac{8}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ b - 32a = \frac{8}{10} \\ -4a = \frac{1}{5} \end{cases}$$
donc
$$c = \frac{9}{5}, \quad b = -\frac{4}{5}, \quad a = -\frac{1}{20}.$$
2. $p'(x) = 0$ ssi $x = -\frac{b}{2a} = -8$ et $p(-8) = 5$: le ballon s'élèvera jusqu'à 5m et cette hauteur sera atteinte en $x = -8$.
3. Le but est en $x = 0$ et l'on a $p(0) = \frac{9}{5} = 1.8 < 2.44$: le tir est cadré.

4.5. Règle de l'Hôpital

Exercice 4.19 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{2x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{3x^2}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{3e^x-3}{4x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{2-2e^x}{x}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{\ln(x)}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{e^x-e}{\ln(x)}$
16. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos^2(x)}{x}$

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(x)}{x}$ 18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x^2}$ 19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x^3}$ 20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos(x)}{x-\pi}$ 22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x+\sin(x)}$ 23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ 24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(-x)}{x^3}$

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(x)}{x^3}$ 26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$ 27. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^2}$ 28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$

29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(kx)}{x}$ 30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(kx)}{x}$ 31. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ 32. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(ax)}{\tan(bx)}$

33. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$ 34. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}$ 35. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$ 36. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

Correction

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-5}{1}=0$
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-5}{2x}=0$
3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-5}{3x^2}=0$
4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^3-3x^2+4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{3x^2-6x}=\infty$
5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x}{3x^2-6x}=\infty$
6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2}{3x^2-6x}=\infty$
7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1}=1$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2x}=\infty$
10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{6x}=\infty$
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3e^x-3}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3e^x}{4}=\dfrac{3}{4}$
12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2e^x}{1}=-2$
13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{x}=1$
14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{\frac{1}{x}}=2$
15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{\ln(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x}{\frac{1}{x}}=e$
16. ∞ (No Hôpital!)
17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{1}=0$
18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)}{2x}=\infty$
19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)}{3x^2}=\infty$
20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{1}=0$
21. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos(x)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\sin(x)}{1}=0$
22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x+\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}=0$
23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)}{2}=\dfrac{1}{2}$
24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(-x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin(-x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(-x)}{6x}=\infty$
25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos(2x)}{6x}=\infty$
26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{\cos(x)}-x\sin(x)-\cancel{\cos(x)}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin(x)-x\cos(x)}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x)}{6}=-\dfrac{1}{3}$
27. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{2}=0$
28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)}{6}=\dfrac{1}{6}$
29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(kx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k\cos(kx)}{1}=k$
30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(kx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{k}{\cos^2(kx)}}{1}=k$
31. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)}=\dfrac{a}{b}$
32. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(ax)}{\tan(bx)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{a}{\cos^2(ax)}}{\frac{b}{\cos^2(bx)}}=\dfrac{a}{b}$
33. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(a+h)}{1}=\cos(a)$
34. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-\sin(a+h)}{1}=-\sin(a)$
35. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)}{1}=\cos(a)$
36. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-\sin(x)}{1}=-\sin(a)$

Exercice 4.20 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{e^x}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{e^x}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^4}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$
12. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Correction

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. $+\infty$
4. 0
5. $+\infty$ (No Hôpital!)
6. $+\infty$
7. $+\infty$
8. 0
9. 0
10. 0
11. 0
12. 0
13. $+\infty$

Exercice 4.21 (Théorème de l'Hôpital)

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'Hôpital pour les calculer ?

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$,
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(x)}{x}$,
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x}{x}$,
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}$,
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$,
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\ln(x)}$,
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$,
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Correction

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)$ n'existe pas.
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(x)}{x}=\infty$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car ce n'est pas une F.I. : $\lim\limits_{x\to0}\cos(x)=1$.
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x}{x}=\infty$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car ce n'est pas une F.I. : $\lim\limits_{x\to0}e^x=1$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car ce n'est pas une F.I. : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\lim\limits_{x\to0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ qui n'existe pas.
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\ln(x)}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car $\lim\limits_{x\to0}x\neq\lim\limits_{x\to0}\ln(x)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}=1$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+\sin(x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}1+\cos(x)$ qui n'existe pas.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\cos(x)}{x}}{2-\frac{\cos(x)}{x}}=\frac{1}{2}$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car $\lim\limits_{x\to0}\sin(x)$ n'existe pas.

Exercice 4.22 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $[0\cdot\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{1/x}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$
7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Correction

Si $\lim u(x)=0$ et $\lim v(x)=\infty$, on réécrit le produit $u(x)v(x)$ comme le rapport $\frac{v(x)}{1/u(x)}$ pour obtenir une F.I. $\frac{\infty}{\infty}$ et pouvoir utiliser le théorème de l'Hôpital.

1. 0
2. 0
3. 0
4. 0
5. $+\infty$
6. -1
7. 0

Exercice 4.23

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$,
2. $\lim_{x\to1}\dfrac{2\ln(x)}{x-1}$,
3. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$,
4. $\lim_{x\to2}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-2}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,
9. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$,
10. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$,
11. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{2^x-\cos(x)}{x}$,
12. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)}$.

Correction

1. Soient $f(x)=\sin(\pi x)$ et $g(x)=\ln(x)$; alors $f'(x)=\pi\cos(\pi x)$, $g'(x)=\frac{1}{x}$ et
$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}(\pi x)\cos(\pi x)=-\pi$$
donc $\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}=-\pi$.

2. Soient $f(x)=2\ln(x)$ et $g(x)=x-1$; alors $f'(x)=\frac{2}{x}$, $g'(x)=1$ et
$$\lim_{x\to1}\frac{2\ln(x)}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{x}=2$$
donc $\lim_{x\to1}\frac{2\ln(x)}{x-1}=2$.

3. Soient $f(x)=e^x-1$ et $g(x)=x$; alors $f'(x)=e^x$, $g'(x)=1$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}e^x=1$$
donc $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

4. Soient $f(x)=\sin(\pi x)$ et $g(x)=x-2$; alors $f'(x)=\pi\cos(\pi x)$, $g'(x)=1$ et
$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to2}\pi\cos(\pi x)=\pi$$
donc $\lim_{x\to2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}=\pi$.

5. $\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$. Soient $f(x)=1-\cos(x)$ et $g(x)=\sin(x)$; alors $f'(x)=\sin(x)$, $g'(x)=\cos(x)$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=0$$
donc $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)=0$.

6. Soient $f(x)=x$ et $g(x)=1-\sqrt{1-x}$; alors $f'(x)=1$, $g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}-2\sqrt{1-x}=-2$$
donc $\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=-2$.

7. $\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}$. Soient $f(x)=x-\sin(x)$ et $g(x)=x\sin(x)$; alors $f'(x)=1-\cos(x)$, $g'(x)=\sin(x)+x\cos(x)$, $f''(x)=\sin(x)$, $g''(x)=2\cos(x)-x\sin(x)$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0$$
donc $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=0$.

8. Soient $f(x)=1-\cos(ax)$ et $g(x)=x^2$; alors $f'(x)=a\sin(ax)$, $g'(x)=2x$, $f''(x)=a^2\cos(ax)$, $g''(x)=x$ et

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{a\sin(ax)}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\cos(ax)}{2}=\frac{a^2}{2}$$

donc $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}$.

9. Soient $f(x)=\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}$ et $g(x)=x^5$; alors $f'(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}$, $g'(x)=5x^4$, $f''(x)=-\sin(x)+x$, $g''(x)=20x^3$, $f'''(x)=-\cos(x)+1$, $g'''(x)=60x^2$, $f^{(iv)}(x)=\sin(x)$, $g^{(iv)}(x)=120x$ et

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f^{(iv)}(x)}{g^{(iv)}(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{120x}=\frac{1}{120}$$

donc $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{120}$.

10. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}=\dfrac{1}{3}$,

11. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{2^x-\cos(x)}{x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0^+}(\ln(2)\times2^x+\sin(x))=\ln(2)$,

12. $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2\ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)}=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\times\dfrac{x}{\sin(x)}\times\dfrac{(3x)^2}{\cos(3x)-1}\times\dfrac{1}{9}\right)$.
En appliquant la règle de l'Hôpital on montre que $\frac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1$, $\frac{\sin(x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1$ et $\frac{1-\cos(x)}{x^2}\xrightarrow[x\to0]{}\frac{1}{2}$ ainsi

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{(3x)^2}{\cos(3x)-1}\times\frac{1}{9}\right)=1\times1\times(-2)\times\frac{1}{9}=-\frac{2}{9}.$$

Exercice 4.24

Si $f(x)=\sum_{k=1}^n x^k$, que vaut $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{an^2+bn+c}{f'(1)}$?

Correction

Puisque $f(x)=x+x^2+x^3+\dots+x^n$, nous avons $f'(x)=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$. Cela implique $f'(1)=1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{an^2+bn+c}{f'(1)}=\lim_{n\to+\infty}2\frac{an^2+bn+c}{n^2+n}=2a.$$

Exercice 4.25 (Théorème de l'Hôpital)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n e^{kx}}{n}\right)}{x}.$$

Correction

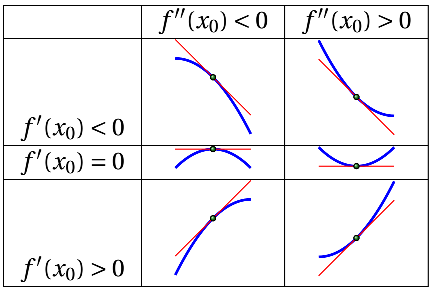
On a une forme indéterminée du type $\left[\frac{0}{0}\right]$ car

$$\lim_{x\to0}\sum_{k=1}^n e^{kx}=\sum_{k=1}^n 1=n.$$

On utilise la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n e^{kx}}{n}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{n}{\sum_{k=1}^n e^{kx}}\times\frac{\sum_{k=1}^n ke^{kx}}{n}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{\sum_{k=1}^n ke^{kx}}{\sum_{k=1}^n e^{kx}}=\frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n 1}=\frac{n+1}{2}.$$

4.6. Sens de variation, concavité, convexité, points stationnaires et d'inflexion



Exercice 4.26

Calculer les points stationnaires des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes et établir leur nature.

1. $f(x) = (x-2)^2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
4. $f(x) = xe^{-x}$
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$

Correction

1. $f(x) = (x-2)^2$
   $f'(x) = 2(x-2)$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 2$.
   $f''(x) = 2$ et $f''(2) = 2 > 0$ donc $x = 2$ est un minimum.
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = 3$.
   $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$ et $f''(1) = -6 < 0$ donc $x = 1$ est un maximum tandis que $f''(3) = 6 > 0$ donc $x = 3$ est un minimum.
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = x^2(3x^2 - 8x + 6) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 1$.
   f décroissante pour $x < 0$ et f croissante pour $x > 0$ avec tangente horizontale en $x = 1$.
   $x = 0$ est un minimum.
   $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(x-1)(3x-1)$ et $f''(1) = 0$ avec $f''(x) < 0$ si $\frac{1}{3} < x < 1$ et $f''(x) > 0$ si $x > 1$ donc $x = 1$ est un point d'inflexion.
4. $f(x) = xe^{-x}$
   $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$.
   $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ et $f''(1) = -1/e < 0$ donc $x = 1$ est un maximum.
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$ donc $x > 0$
   $f'(x) = x(1 + 2\ln(x))$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1/\sqrt{e}$.
   $f''(x) = 3 + 2\ln(x)$ et $f''(1/\sqrt{e}) = 2 > 0$ donc $x = 1/\sqrt{e}$ est un minimum

Exercice 4.27

Un triangle a deux côtés et l'angle entre eux mesurant respectivement a, b et δ. Quelle est la valeur de δ qui maximise l'aire du triangle ?

Correction

L'aire du triangle vaut $A(\delta) = \frac{ab}{2}\sin(\delta)$ avec $0 \le \delta \le \pi$. On a $A'(\delta) = \frac{ab}{2}\cos(\delta)$ et $A'(\delta) = 0$ ssi $\delta = \frac{\pi}{2}$. Comme $A''(\delta) = -\frac{ab}{2}\sin(\delta)$, alors $A''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{ab}{2} < 0$ donc il s'agit bien d'un maximum.

Exercice 4.28

Une société produit des boîtes en carton de 5 L en forme de parallélépipède à base carrée. Les boîtes doivent utiliser la moindre quantité de carton possible. Quelles dimensions doit-elle fixer ?

Correction

Notons ℓ la longueur (en décimètre) des cotés de la base (carrée) et h la hauteur (en décimètre) de la boîte. On a $\ell^2 h = 5$ ainsi la surface de la boîte mesure $S(\ell) = 2\ell^2 + 4h\ell = 2\ell^2 + \frac{20}{\ell}$ décimètres carrées. Il s'agit d'une parabole dont le minimum s'obtient pour $\ell = \sqrt[3]{5} \simeq 171$ mm et dans ce cas l'on a $h = \ell$: la boîte qui utilise la moindre quantité de carton possible est un cube.

Exercice 4.29

La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive proportionnelle à $1/r^6$ et une force répulsive proportionnelle à $1/r^{12}$. La distance d'équilibre est celle pour laquelle le potentiel de LENNARD-JONES est minimal. Calculer cette distance sachant que ce potentiel est donné par

$$V(r) = 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$

où σ est une distance, appelée distance de collision, et ε est le potentiel minimal.

Correction

$$V'(r) = 4\varepsilon\left(-\frac{12}{r}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} + \frac{6}{r}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right) = 0 \qquad\iff\qquad r = \sqrt[6]{2}\sigma \qquad \text{et} \qquad V(\sqrt[6]{2}\sigma) = -\varepsilon.$$

Exercice 4.30

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha-\beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Correction

- Position d'équilibre :

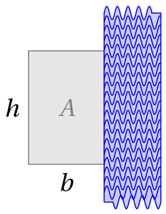
$$V'(r) = 2D(1-e^{\alpha-\beta r}) \times (-e^{\alpha-\beta r}) \times (-\beta) = -2\beta V(r) = 0 \qquad\iff\qquad V(r) = 0 \qquad\iff\qquad r = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{et} \qquad V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = D.$$

- Énergie de dissociation :

$$\lim_{r\to+\infty} V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - V(r) = \lim_{r\to+\infty} D\left(1 - (1 - e^{\alpha-\beta r})^2\right) = \lim_{r\to+\infty} D\left(-e^{2(\alpha-\beta r)} + 2e^{\alpha-\beta r}\right) = D.$$

Exercice 4.31

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?

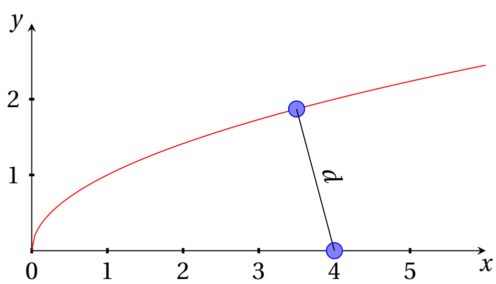


Correction

Aire : $A = bh$. Longueur clôture : $\ell(b) = 2b + h(b) = 2b + \frac{A}{b}$. Recherche du minimum : $\ell'(b) = 2 - \frac{A}{b^2}$ et $\ell'(b) = 0$ ssi $b = \sqrt{\frac{A}{2}}$.
Comme $\ell''(b) = \frac{2A}{b^3} > 0$ pour tout $b > 0$, il s'agit bien d'un minimum et la clôture mesure $\ell(b) = 2\sqrt{\frac{A}{2}} + \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{A}}$.
Remarque : si on clôture tous les quatre côtés on a $\ell(b) = 2b + 2h(b)$ et donc $h = b = \sqrt{A}$.

Exercice 4.32

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.



Correction
Soit $(x, \sqrt{x})$ un point quelconque de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la distance entre ce point et le point $(4, 0)$:

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}.$$

Sa dérivée vaut

$$d'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}.$$

Dans ce cas il est plus simple d'étudier directement le signe de d' (qui est le même que celui de $2x-7$) plutôt que de calculer la dérivée seconde. On a

- $d'(x) = 0 \iff x = \frac{7}{2}$,
- $d'(x) > 0 \iff x > \frac{7}{2}$,
- $d'(x) < 0 \iff x < \frac{7}{2}$,

par conséquent le point cherché est $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.
Méthode simplifiée : comme la fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante, minimiser d équivaut à minimiser d^2 : c'est une parabole convexe de sommet $x = \frac{7}{2}$ et $d(7/2) = \sqrt{d_2(7/2)} = \sqrt{7/2}$.

Exercice 4.33

La mesure de la distance entre deux points donne une série de valeurs expérimentales $d_1, d_2, \dots, d_n$. Sur la base de ces valeurs, on désire obtenir une estimation de d qui soit la plus proche possible de la réalité. Trouver une formule pour d telle que la mesure d'erreur

$$(d-d_1)^2 + (d-d_2)^2 + \cdots + (d-d_1)^n$$

soit minimale.

Correction
On veut minimiser la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(d) = \sum_{i=1}^n (d-d_i)^2$. On a

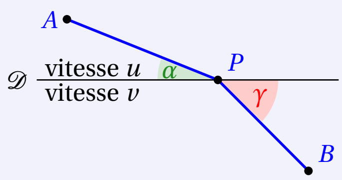
$$f'(d) = 2\sum_{i=1}^n (d-d_i) = 2\left(nd - \sum_{i=1}^n d_i\right)$$

donc $f'(d) = 0$ ssi $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i$.

Exercice 4.34 (Loi de réfraction)

D'après le principe de FERMAT un rayon lumineux n'emprunte pas le chemin le plus court mais le chemin le plus rapide. Autrement dit, ce n'est pas la longueur du parcours mais sa durée qui est minimale.

1. Démontrer la loi de la réfraction : “dans le plan soient A et B deux points de chaque côté d'une droite $\mathscr{D}$. On suppose que la lumière voyage à vitesse u dans le demi plan contenant A et à vitesse v dans l'autre demi-plan. Alors le rayon lumineux prend le chemin caractérisé par l'équation $u\cos(\gamma) = v\cos(\alpha)$ où α et γ sont les angles indiqués ci-dessous.”

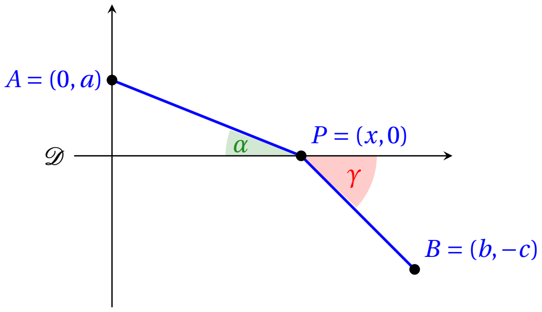


(Indication : choisir un repère adapté et exprimer le temps nécessaire pour le chemin en fonction de la position du point P; puis minimiser par un calcul de dérivée.)

2. Pour un rayon lumineux qui arrive sur la surface d'un lac un nageur mesure $\alpha = 45°$ et $\gamma = 58°$. En déduire la vitesse de la lumière dans l'eau.

Correction

1. On remarque que sur le dessin $u > v$. En effet, dans le demi-plan supérieur la partie du chemin est un peu plus longue que si on suivait le chemin direct $[AC]$; on gagne du temps en faisant un chemin plus long dans le demi-plan où la vitesse est plus rapide. Choisissons un système de coordonnées orthonormées et des notations comme indiquées ci-dessous.



Alors

$$AP=\sqrt{x^2+a^2},$$
$$CP=\sqrt{(b-x)^2+c^2}.$$

Ainsi la durée du trajet APC est

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u}+\frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v}.$$

Cette expression définit une fonction dérivable f sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{x}{u\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{b-x}{v\sqrt{(b-x)^2+c^2}}=\frac{\cos(\alpha)}{u}-\frac{\sin(\gamma)}{u}.$$

Ainsi $f'(x)=0$ si et seulement si $u\cos(\gamma)=v\cos(\alpha)$. Géométriquement il est plus ou moins évident que cette condition correspond effectivement à un minimum de la fonction f, mais on peut aussi procéder rigoureusement en dérivant encore une fois :

$$f''(x)=\frac{a^2}{u\sqrt{(x^2+a^2)^3}}+\frac{c^2}{v\sqrt{((b-x)^2+c^2)^3}}>0.$$

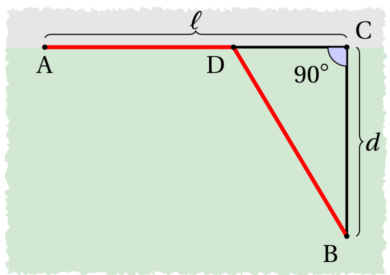
Le signe de la dérivée seconde étant strictement positif la dérivée f' change de signe au point où elle s'annule, de sorte que ce point est un minimum. Remarque : si la vitesse de la lumière varie en fonction du lieu (lieu anisotrope) le chemin le plus court n'est pas forcément le plus rapide! C'est comme en voiture, un détour peut être plus rapide s'il évite des bouchons.

2. On obtient comme vitesse de la lumière dans l'eau :

$$v=\frac{\cos(58°)}{\cos(45°)}u\simeq\sqrt{2}\times0.53\times3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}\simeq2.25\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Exercice 4.35

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connait les distances $AC=\ell$ et $CB=d$ et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d.



Correction

Soit $AD=x$ avec $0\le x\le\ell$. On a alors $DB=\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}$. Si v désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est de $2v$ et le temps total mis pas le tracteur pour atteindre B depuis A est

$$t(x)=\frac{x}{2v}+\frac{\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}}{v}.$$

On cherche $x\in[0;\ell]$ qui minimise la fonction t. On a

$$t'(x)=\frac{1}{2v}+\frac{-2(\ell-x)}{2v\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}}=\frac{\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}-2(\ell-x)}{2v\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}}$$

donc $t'(x)=0$ si et seulement si $x=\ell-\frac{d}{\sqrt{3}}$ et

$$t''(x)=\frac{d^2}{v((\ell-x)^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}>0.$$

ce qui implique que $t'(x)>0$ si et seulement si $x<\ell-\frac{d}{\sqrt{3}}$. Par conséquent,

- si $\ell<\frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x)<0$ pour tout $x\in[0;\ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x=0$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A ;

- si $\ell > \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}]$ et $t'(x) > 0$ pour tout $x \in [\ell - \frac{d}{\sqrt{3}}; \ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4.36

On note x la quantité produite, p le prix et $f(x)$ le coût. On suppose que l'on se trouve dans un cas de concurrence parfaite, dans lequel le prix de la marchandise est indépendant de la quantité produite. Le profit est la fonction $\Pi(x) =$ recette − coût. Prouver que le profit est optimal lorsque la recette marginale est égal au coût marginal.

Correction

La recette est $g(x) = px$. La recette marginale est $g'(x) = p$ et le coût marginal est $f'(x)$. Le profit est $\Pi(x) = g(x) - f(x)$. On a $\Pi'(x) = g'(x) - f'(x) = p - f'(x)$. Donc si $p = f'(x)$ la dérivée du profit s'annule et le profit et extrémal.

Exercice 4.37

On considère un produit dont le prix unitaire est p ($p > 0$). On note q la quantité vendue de ce produit pendant un mois et on suppose que $q(p) = \alpha + \beta p$ où α et β sont des réels.

1. Peut-on déjà prédire le signe de la constante β ?
2. De combien varie la quantité vendue lorsque le prix augmente de 1 ?
3. Quelle est la plus grande valeur de p possible sachant que la quantité vendue q est un nombre positif?
4. On suppose désormais que $q = 5000$ si $p = 100$, et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β.
5. Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
6. Quelle est la valeur maximale des recettes ?
7. Le coût unitaire de fabrication du produit est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $g(p)$ total réalisé (c'est-à-dire la différence entre recettes et coût).
8. Pour quelle quantité le profit est-il maximal ?

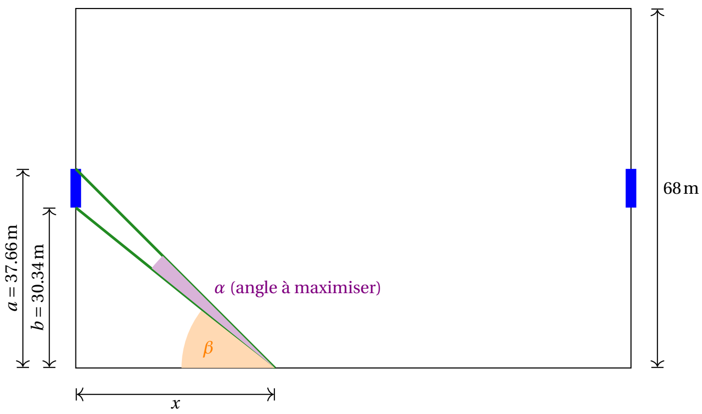
Correction

1. La fonction q est affine. La quantité vendue est forcement une fonction décroissante du prix, donc β doit être négatif.
2. Le taux d'accroissement est $\beta = \frac{5000-4000}{100-200} = -10$. On en déduit (par décalage) que
$$q(p) = -10(p - 100) + 5000 = 6000 - 10p.$$
Donc $\alpha = 6000$.
3. Comme $\beta = -10$, lorsque le prix augmente de 1 on perd 10 acheteurs.
4. On résout l'inégalité
$$q(p) \geq 0 \iff 6000 - 10p \geq 0 \iff p \leq 600.$$
Donc on trouve des acheteurs si et seulement si le prix est inférieur à 600.
5. Les recettes mensuelles sont
$$r(p) = \text{prix unitaire} \times \text{quantité vendue} = p \times q(p) = 10p(600 - p).$$
6. La dérivée est
$$r'(p) = 20(300 - p),$$
donc r est croissante sur $[0, 300]$ et décroissante sur $[300, 600]$. Il y a donc un maximum en $p = 300$. Les recettes maximales sont donc
$$r(300) = 900000.$$
Solution alternative : la courbe de la fonction $p \mapsto r$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p = 0$ et $p = 600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 300.
7. On a
$$g(p) = r(p) - 100q(p) = (10p - 1000)(600 - p).$$
8. Après un petit calcul on trouve $g'(p) = 7000 - 20p$, donc g est croissante sur $[0, 350]$ et décroissante sur $[350; 600]$. Il y a donc un maximum pour le prix 350. Cela correspond à une quantité de $q(350) = 2500$.
Solution alternative : la courbe de la fonction $p \mapsto g$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p = 100$ et $p = 600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 350.

Exercice 4.38

Un joueur de football, en possession du ballon, court sur la ligne de touche. Ayant une frappe extrêmement forte il ne se soucie pas de la distance et tire à l'endroit où l'angle d'ouverture par rapport au but est maximal. Quel est alors cet angle (en degrés) ?
Utiliser les dimensions recommandées par la FIFA : terrain 105 m × 68 m et largeur du but 7.32 m.

Correction
D'après ce dessin



on trouve

$$\begin{cases} \tan(\beta) = \frac{b}{x}, \\ \tan(\alpha+\beta) = \frac{a}{x}, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \arctan\left(\frac{b}{x}\right), \\ \alpha+\beta = \arctan\left(\frac{a}{x}\right), \end{cases} \implies \alpha(x) = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x}\right),$$

puis, par dérivation,

$$\alpha'(x) = \frac{b}{x^2+b^2} - \frac{a}{x^2+a^2} = \frac{(a-b)(ab-x^2)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Cette dérivée s'annule au seul point

$$x_0 = \sqrt{ab} = \sqrt{30.34\,\text{m} \times 37.66\,\text{m}} \simeq 33.8\,\text{m}.$$

Géométriquement il est évident que la fonction $x \mapsto a(x)$ possède un unique maximum qui est donc x_0. (On peut aussi remarquer que $a(x) \ge 0$ pour tout $x \ge 0$ et que $\lim_{x\to 0} a(x) = \lim_{x\to\infty} a(x) = 0$; ainsi la fonction dérivable α possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$ qui se trouve donc en x_0). L'angle maximal est alors

$$\alpha(x_0) = \arctan\left(\frac{a}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x_0}\right) \simeq 6.18°.$$

Exercice 4.39

Deux rues se coupent en formant un angle droit. Une voiture circule sur une rue à une vitesse de $2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ et une seconde voiture circule sur l'autre rue à une vitesse de $4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Les voitures partent toutes les deux d'une distance de 200 m du point d'intersection et se dirigent vers l'intersection des rues. Quelle sera leur distance minimale ?

Correction
Plaçons les deux rues dans un plan cartésien, la première rue sera l'axe des abscisses, la deuxième ceux des ordonnées et l'intersection des deux rue se trouve au point de coordonnées $(0,0)$. Indiquons par (x_i, y_i) la position de la voiture i ($i = 1$ ou 2). Alors

$$(x_1, y_1) = (-200+2t, 0) \qquad (x_2, y_2) = (0, -200+4t)$$

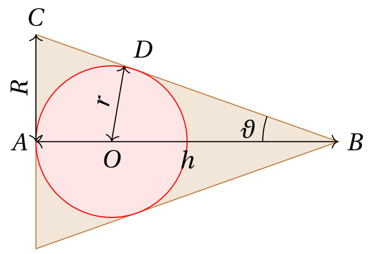
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ le carré de la fonction distance des deux voitures en fonction du temps :

$$f(t) = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = (-200+2t-0)^2 + (0+200-4t)^2 = 20t^2 - 2400t + 80000.$$

Cette fonction est minimale pour $t = 60\,\text{s}$ et l'on a $\sqrt{f(t)} = \sqrt{20\times 60^2 - 2400\times 60 + 80000} = \sqrt{8000} \approx 90\,\text{m}$.

Exercice 4.40 (Cônes de glace)

On veut insérer entièrement une sphère de glace dans un cône de biscuit de sorte à ce que le cône soit le plus remplis possible. Ceci revient à minimiser le rapport entre le volume du cône et le volume de la sphère.



- Exprimer la hauteur h et le rayon R du cône en fonction de $r>0$ le rayon de la sphère et de $\vartheta\in]0;\frac{\pi}{2}[$ l'angle du cône.
- Trouver la valeur de ϑ qui minimise le rapport $\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}}$.
- Calculer la hauteur h et le rayon R optimales du cône en fonction du rayon de la sphère r.

Correction

- On a deux triangles rectangles : le triangle ABC rectangle en A et le triangle OBD rectangle en D, par conséquent

$$\tan(\vartheta)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{R}{h},\qquad \sin(\vartheta)=\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}=\frac{r}{h-r},\qquad \text{donc}\qquad R=h\tan(\vartheta),\qquad h=\left(\frac{1}{\sin(\vartheta)}+1\right)r.$$

- Soit $f\colon]0;\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie :

$$f(\vartheta)=\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{R^2h}{4r^3}=\frac{(1+\sin(\vartheta))^3}{4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)}.$$

Pour minimiser f on cherche a annuler sa dérivée première :

$$\begin{aligned} f'(\vartheta)&=\frac{\left[3(1+\sin(\vartheta))^2\cos(\vartheta)\right]\times\left[4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right]-\left[(1+\sin(\vartheta))^3\right]\times\left[4\left(\cos(\vartheta)\cos^2(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)\right)\right]}{\left[4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right]^2}\\ &=4\frac{3\sin(\vartheta)\cos^3(\vartheta)-(1+\sin(\vartheta))\left(\cos^3(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)\right)}{\left(4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right)^2}(1+\sin(\vartheta))^2\end{aligned}$$

et $f'(\vartheta)=0$ si et seulement si

$$3\sin(\vartheta)\cos^3(\vartheta)-(1+\sin(\vartheta))\left(\cos^2(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\right)\cos(\vartheta)=0.$$

On peut diviser par $\cos(\vartheta)$ car $\vartheta\in]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)-(1+\sin(\vartheta))\left(\cos^2(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\right)=0.$$

On utilise la relation $\cos^2(\vartheta)=1-\sin^2(\vartheta)$

$$3\sin(\vartheta)\left(1-\sin^2(\vartheta)\right)-(1+\sin(\vartheta))\left(1-3\sin^2(\vartheta)\right)=0.$$

On remarque que $\left(1-\sin^2(\vartheta)\right)=(1-\sin(\vartheta))(1+\sin(\vartheta))$ et qu'on peut diviser par $(1+\sin(\vartheta))$ car $\vartheta\in]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3\sin(\vartheta)(1-\sin(\vartheta))-\left(1-3\sin^2(\vartheta)\right)=0.$$

On trouve ainsi que l'angle $\hat{\vartheta}$ qui annule la dérivée première est tel que

$$\sin(\hat{\vartheta})=\frac{1}{3}$$

et l'on a $f(\hat{\vartheta})=2$, *i.e.* la sphère occupe la moitié du volume du cône.

- On trouve directement $h=\left(\frac{1}{\sin(\vartheta)}+1\right)r=4r$. De plus, sachant que pour $\vartheta\in]0;\frac{\pi}{2}[$ on a

$$\tan(\vartheta)=\frac{\sin(\vartheta)}{\sqrt{1-\sin^2(\vartheta)}},$$

on conclut que $R=h\tan(\vartheta)=h\frac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}r$.

Chapitre 5.

Étude de fonction

Exercice 5.1 (MICHAELIS et MENTEN)

D'après MICHAELIS et MENTEN, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S]+K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de MICHAELIS-MENTEN spécifique de l'enzyme.
Tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

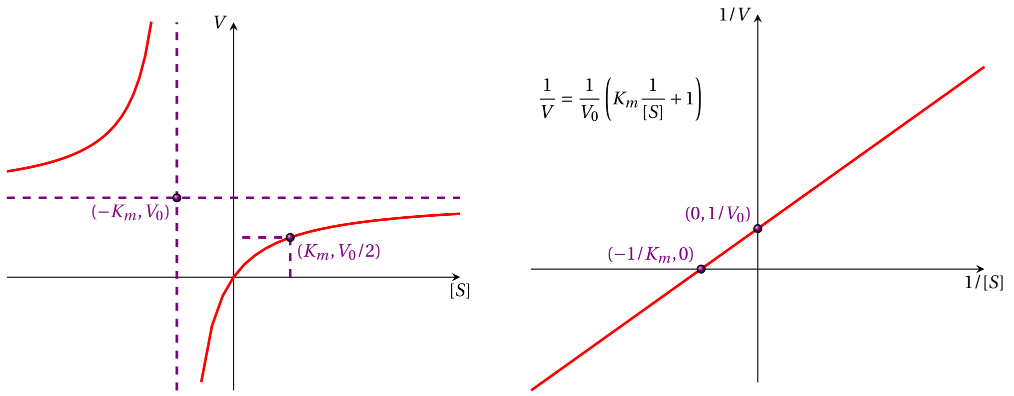
Correction
Il s'agit d'une fonction du type $f(x) = \frac{ax}{x+d} = a\frac{x+d-d}{x+d} = a\left(1-\frac{d}{x+d}\right) = a - \frac{ad}{x+d}$ avec $a, d > 0$.

- Domaine de définition : la fonction est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-d\}$.
- Limites aux extrémités du domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to(-d)^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to(-d)^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

- Dérivée première et sens de variation : $f'(x) = \dfrac{ad}{(x+d)^2} > 0$ donc f est strictement croissante.
- Dérivée seconde et concavité : $f''(x) = -\dfrac{2ad}{(x+d)^3}$, $f''(x) > 0$ ssi $x < -d$ donc f est convexe pour $x < -d$ et concave pour $x > -d$.
- Le graphe de f est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-d, a)$.

Le graphe de $[S] \mapsto V$ est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-K_m, V_0)$; le graphe de $1/[S] \mapsto 1/V$ est une droite passant par $(-1/K_m, 0)$ et $(0, 1/V_0)$.



Exercice 5.2 (loi de BOYLE-MARIOTTE)

D'après la loi de BOYLE-MARIOTTE pour les gaz parfaits, la pression P, le volume $V > 0$ et la température $T > 0$ d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants, et ceux pour différentes valeurs de température.

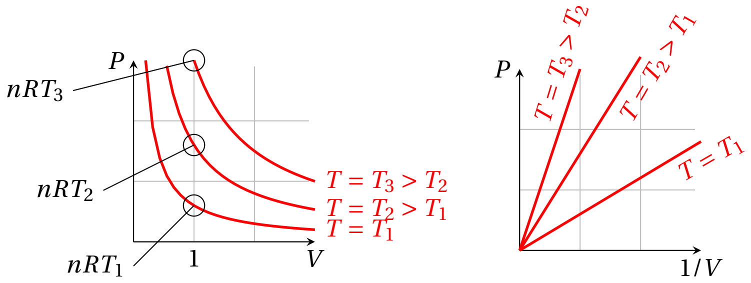
Correction
Si on note $x = V$, $a = nRT$ et $y = P$, on voit qu'il s'agit d'une fonction du type $y = f(x) = \frac{a}{x}$ avec $a > 0$.

- Domaine de définition : la fonction est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Limites aux extrémités du domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- Dérivée première et sens de variation : $f'(x) = \dfrac{-a}{x^2} < 0$ donc f est décroissante.
- Dérivée seconde et concavité : $f''(x) = \dfrac{2a}{x^3}$, $f''(x) > 0$ ssi $x > 0$ donc f est convexe pour $x > 0$ et concave pour $x < 0$.
- Le graphe de f est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(0,0)$.

Pour chaque T fixé, le graphe de $V \mapsto P$ est une hyperbole et celui de $\frac{1}{V} \mapsto P$ une droite.



> **Exercice 5.3**
> La concentration C d'un réactif d'une réaction chimique de second ordre est donnée par $C(t) = \dfrac{C_0}{1+kC_0t}$ où $C_0 > 0$ est la concentration initiale et $k > 0$ est une constante cinétique chimique.
> Tracez le graphe de la fonction $C\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ pour différentes valeurs de k.
> En déduire le graphe de la fonction $\frac{1}{C}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ pour différentes valeurs de k.

Correction

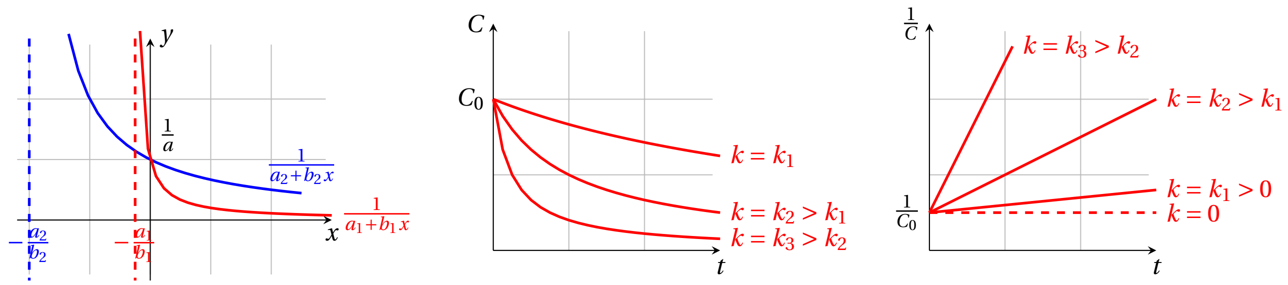
Il s'agit d'une fonction du type $f(x) = \frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b}\left(\frac{a}{b}+x\right)^{-1}$ avec $a, b > 0$ (car $a = \frac{1}{C_0}$ et $b = k$). On pourrait étudier f que pour $x \ge 0$, mais nous allons l'étudier sur $\mathbb{R}$.

- Domaine de définition : la fonction est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{a}{b}\right\}$.
- Limites aux extrémités du domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to(-\frac{a}{b})^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to(-\frac{a}{b})^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- Dérivée première et sens de variation : $f'(x) = \dfrac{-b}{(a+bx)^2} > 0$ donc f est croissante.
- Dérivée seconde et concavité : $f''(x) = \dfrac{-2b^2}{(a+bx)^3}$, $f''(x) > 0$ ssi $x < -\frac{a}{b}$ donc f est convexe pour $x < -\frac{a}{b}$ et concave pour $x > -\frac{a}{b}$.
- Le graphe de f est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-\frac{a}{b}, 0)$.

Le graphe de $t \mapsto C$ est une hyperbole.



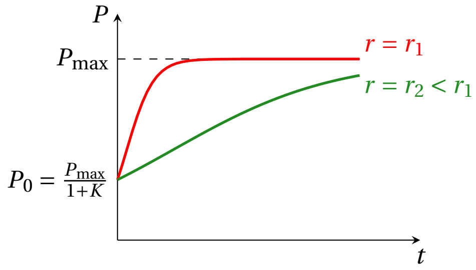
Exercice 5.4

Le mathématicien P.F. Verhulst a proposé au XIX^e siècle un modèle de croissance de population. Dans ce modèle, la population P au temps t est donnée par

$$P(t) = P_{\max} \frac{\exp(r P_{\max} t)}{K + \exp(r P_{\max} t)}$$

où $P_{\max}$ est la population maximale et $r > 0$ et $K > 1$ sont des constantes. Simplifier l'expression et tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs des constantes.

Correction
Notons $A = r P_{\max}$, alors $P(t) = \frac{A}{r} \frac{\exp(At)}{K + \exp(At)} = \frac{A}{r} \frac{1}{K \exp(-At) + 1} = P_{\max} \frac{1}{1 + K \exp(-r P_{\max} t)}$.



Exercice 5.5

Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

en détaillant

1. son domaine de définition et son signe,
2. les limites pour $x \to \pm\infty$ et aux bornes du domaine de définition,
3. étudier la dérivée première de f.

Correction
Notons que

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x}{(x-1)(x-4)} = \frac{x}{3}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1}\right).$$

1. Pour que $\frac{1}{\star}$ soit défini il faut que $\star \neq 0$ donc l'ensemble de définition A de f est l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 \neq 0\} =]-\infty; 1[\cup]1; 4[\cup]4; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}.$$

$\mathbb{R}$

	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
signe du numérateur		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe du dénominateur		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

2. Limites de f pour $x \to \pm\infty$ (et où f n'est pas définie) :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 4^\mp} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

donc

- $y = 0$ est asymptote horizontale à $-\infty$ et à $+\infty$,

- $y = 1$ et $y = 4$ sont asymptotes verticales.

3. Dérivée première :

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2-5x+4) - x(x^2-5x+4)'}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{(x^2-5x+4) - x(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}.$$

Comme $(x^2-5x+4)^2 > 0$ pour tout $x \in A$, le signe de f' coïncide avec le signe de $-x^2+4$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x = \pm 2, \\ f'(x) < 0 &\iff x \in]-\infty; -2[\cup]2;4[\cup]4;+\infty[, \\ f'(x) > 0 &\iff x \in]-2;1[\cup]1;2[. \end{aligned}$$

Pour le graphe de f voir la figure 5.1a page 72.

Exercice 5.6

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
2. Calculer les dérivées f' et f'' de f.
3. La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.
4. Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
5. La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.
6. La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$?
7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$. En déduire pour quelle valeur elle croise l'axe des abscisses. Même question avec la tangente en $x = 2$.
8. Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes en $x = 1$ et $x = 2$.

Correction

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+x} = 0, \quad \lim_{\substack{x<-1\\x\to-1}} \frac{e^x}{1+x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x>-1\\x\to-1}} \frac{e^x}{1+x} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x} = +\infty$$

où la limite en $+\infty$ est la seule forme indéterminée, et se déduit de la croissance comparée de e^x et de x en $+\infty$.

2. On trouve $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$ et

$$f''(x) = \frac{(e^x + xe^x)(1+x)^2 - xe^x 2(1+x)}{((1+x)^2)^2} = \frac{(e^x + xe^x)(1+x) - 2xe^x}{(1+x)^3} = \frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}.$$

3. Le numérateur de f'' ne s'annule pas sur le domaine de définition de f, donc f'' ne s'annule pas et f n'a pas de point d'inflexion. Comme $f''(x)$ est du signe de $(1+x)^3$, f est concave sur $]-\infty, -1[$ et convexe sur $]-1, +\infty[$.
4. $f'(x)$ est du signe de x, d'où le tableau de variations de f :

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f atteint un minimum local en $x = 0$.

5. Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, la courbe représentative de f admet la droite $y = 0$ comme droite asymptote en $-\infty$.
6. Comme $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (croissance comparée de e^x et de x^2 en $+\infty$), la courbe représentative de f n'admet pas de droite asymptote en $+\infty$.

7. L'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$ est $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$. Cette droite croise l'axe des abscisses pour $0 = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$ ce qui donne $x = -1$.
   L'équation de la tangente à la courbe en $x = 2$ est $y = \frac{2e^2}{9}x - \frac{e^2}{9}$. Cette droite croise l'axe des abscisses pour $0 = \frac{2e^2}{9} - \frac{e^2}{9}$ et donc $x = \frac{1}{2}$.
8. Tracé de la courbe représentative de f et de ses tangentes en $x = 1$ et $x = 2$: voir la figure 5.1b page 72.

Exercice 5.7

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :
1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $x^2 - 1 > 0$ donc
$$\mathscr{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$
2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x\left(1 + \frac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} 1 + \frac{\ln(x^2-1)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to \pm\infty} \ln(x^2-1) = +\infty.$$
   Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.
3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est l'application
$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x^2-1} \end{aligned}$$
   Dans $\mathscr{D}_f$ on a
$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -1-\sqrt{2}[\cup]1; +\infty[, \\ &f'(x) = 0 \text{ ssi } x = -1-\sqrt{2}, \\ &f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-1-\sqrt{2}; -1[. \end{aligned}$$
   On conclut que
   - f est strictement croissante sur $]-\infty; -1-\sqrt{2}[$ et sur $]1; +\infty[$,
   - f est strictement décroissante sur $]-1-\sqrt{2}; -1[$,
   - $x = -1-\sqrt{2}$ est un point de maximum local et on a $f(-1-\sqrt{2}) = -1-\sqrt{2} + \ln(2+2\sqrt{2})$.

   Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est l'application

$$\begin{aligned} f'' &: \mathscr{D}_f \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = \left(1 + \frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que la fonction est concave séparément sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.

5. *Graphe :* voir la figure 5.1c page 72

Exercice 5.8

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $x^2 - 1 \ge 0$ donc

$$\mathscr{D}_f =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\qquad .$$

2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x\left(2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = -\infty, \\ \lim_{x\to-1^-} f(x) &= f(-1) = -2, \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= f(1) = 2, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

- Si $x > 0$, en calculant le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 3.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 3x$ est l'asymptote de f en $+\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptôte).

- Si $x < 0$, en calculant le développement asymptotique à l'ordre 2 en $-\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est l'asymptote de f en $-\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptote).

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est la fonction

$$\begin{aligned} f' &: \mathscr{D}_f \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 2 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f \setminus \{\pm1\}$ on a

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}[\cup]1;+\infty[,$$

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$
$$f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-\frac{2}{\sqrt{3}};-1[$$

et $\lim_{x\to\pm1^\pm} f'(x) = +\infty$. On conclut que

- f est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}[$ et sur $]1;+\infty[$,
- f est strictement décroissante sur $]-\frac{2}{\sqrt{3}};-1[$,
- $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ est un point de minimum local et on a $f(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\sqrt{3}$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-2		2	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction

$$\begin{aligned} f'' \colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f \setminus \{\pm1\}$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que f est concave sur $\mathscr{D}_f$.

5. *Graphe :* voir la figure 5.1d page 72

Exercice 5.9

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2+2x-2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Correction

1. La fonction $\star \mapsto \sqrt{\star}$ n'est définie que si $\star \geq 0$ donc

$$\mathscr{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;:\; x^2+2x-2 \geq 0 \right\} = \left]-\infty;-1-\sqrt{3}\right] \cup \left[-1+\sqrt{3};+\infty\right[.$$

2. Observons d'abord que $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+2x-2} = 2x + |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}$ donc

$$\lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2+2x-2} = \lim_{x\to-\infty} x\left(2 - \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1-\sqrt{3}} 2x + \sqrt{x^2+2x-2} = f(-1-\sqrt{3}) = -2-2\sqrt{3},$$
$$\lim_{x\to-1+\sqrt{3}} 2x + \sqrt{x^2+2x-2} = f(-1+\sqrt{3}) = -2+2\sqrt{3},$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{x^2+2x-2} = \lim_{x\to+\infty} x\left(2+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = +\infty.$$

3. $f'(x) = 2+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-2}}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f \setminus \{-1\pm\sqrt{3}\}$ (car il faut exclure les $x\in\mathcal{D}_f$ qui annulent le dénominateur). Pour en étudier le signe on se rappelle que

	Solutions de l'équation $A(x)=\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)>\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)<\sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impair	$(A(x))^n = B(x)$	$(A(x))^n > B(x)$	$(A(x))^n < B(x)$
Si n est pair	$\begin{cases} A(x)\ge 0\\ (A(x))^n = B(x)\end{cases}$	$\begin{cases} B(x)\ge 0\\ A(x)>0\\ (A(x))^n > B(x)\end{cases}$	$\begin{cases} A(x)<0\\ B(x)\ge 0\end{cases} \vee \begin{cases} A(x)\ge 0\\ (A(x))^n < B(x)\end{cases}$

donc

$$f'(x)=0 \iff 2\sqrt{x^2+2x-2}+x+1=0 \iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} = \underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}}$$
$$\iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2}\ge 0,\\ x^2+2x+1=4x^2+8x-8,\end{cases} \iff \begin{cases} x\le -1,\\ x^2+2x-3=0,\end{cases} \iff x=-3$$

et

$$f'(x)>0 \iff \frac{x+1+2\sqrt{x^2+2x-2}}{\sqrt{x^2+2x-2}}>0 \iff x+1+2\sqrt{x^2+2x-2}>0$$
$$\iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} < \underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}} \iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2}<0,\\ x^2+2x-2\ge 0\end{cases} \cup \begin{cases} -\frac{x+1}{2}\ge 0,\\ x^2+2x+1<4x^2+8x-8,\end{cases} \iff x>-1+\sqrt{3}.$$

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-2-2\sqrt{3}$		$-2+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On a

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 2+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x>0,\\ 2-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x<-1-\sqrt{3}\cup -1+\sqrt{3}\le x<0,\end{cases}$$

donc

- le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t) = tf(1/t) = 2-\sqrt{1+2t-2t^2} = 2-1-\frac{(2t-2t^2)}{2}+\frac{(2t-2t^2)^2}{8}+o(t^2) = 1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

donc $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $-\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y=x-1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $-\infty$; l'asymptote est en dessous de la courbe ;

- le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t) = tf(1/t) = 2+\sqrt{1+2t-2t^2} = 2+1+\frac{(2t-2t^2)}{2}-\frac{(2t-2t^2)^2}{8}+o(t^2) = 3+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

donc $3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $+\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y=3x+1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$; l'asymptote est au dessus de la courbe.

6. *Graphe :* voir la figure 5.1e page suivante

Exercice 5.10

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=\frac{\ln^2(x)}{x^2} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

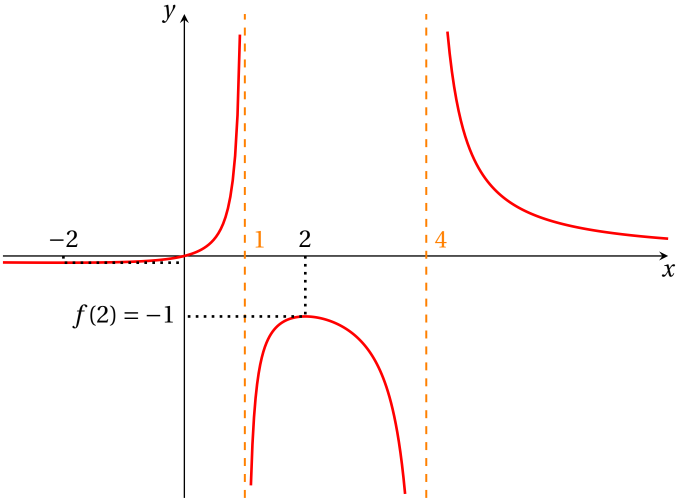
Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $\begin{cases} x\neq 0 \\ x>0 \end{cases}$ donc
$$\mathscr{D}_f=]0;+\infty[.$$
2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0^+.$$
$y=0$ est asymptote pour $x\to+\infty$.
3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est la fonction
$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x)=2\frac{\ln(x)(1-\ln(x))}{x^3} \end{aligned}$$
Dans $\mathscr{D}_f$ on a
$$\begin{aligned} &f'(x)>0 \text{ ssi } x\in]1;e[, \\ &f'(x)=0 \text{ ssi } x=e, \\ &f'(x)<0 \text{ ssi } x\in]0;1[\cup]e;+\infty[. \end{aligned}$$
On conclut que
   - f est strictement croissante sur $]1;e[$[,
   - f est strictement décroissante sur $]0;1[$ et sur $]e;+\infty[$,
   - $x=1$ est un point de minimum absolu, $x=e$ est un point de maximum local et on a $f(1)=0$, $f(e)=\frac{1}{e^2}$.

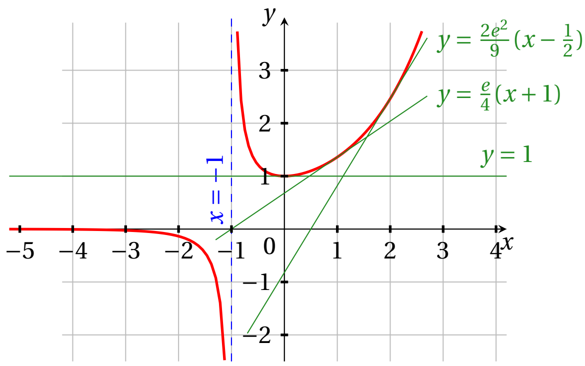
   Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

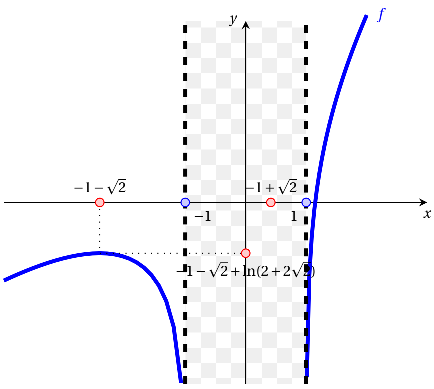
4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction
$$f''\colon \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$$



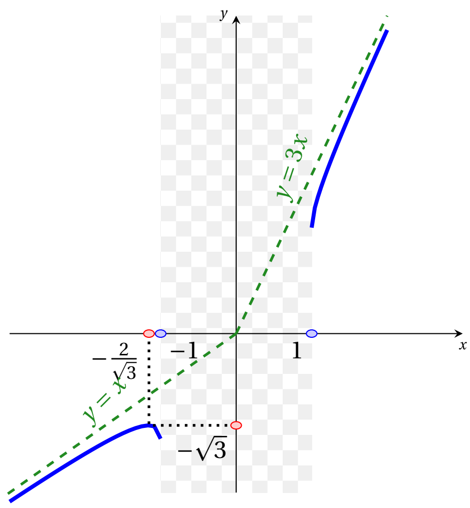
(a) Exercice 5.5 page 65



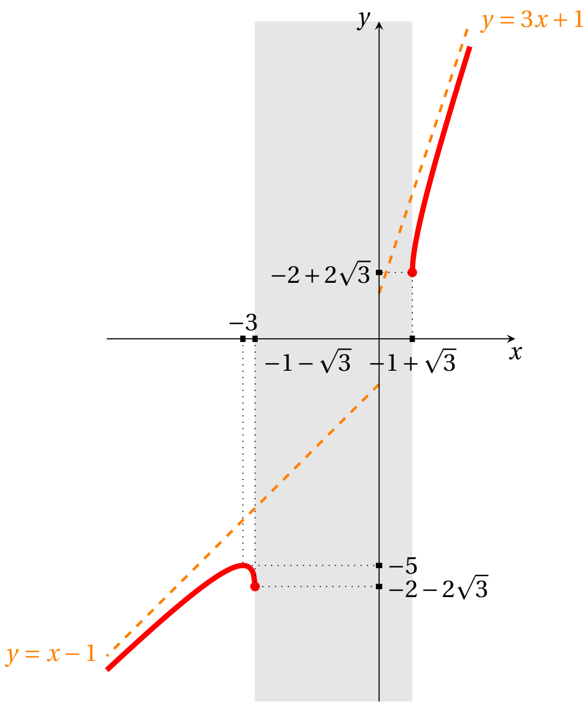
(b) Exercice 5.6 page 66



(c) Exercice 5.7 page 67



(d) Exercice 5.8 page 68



(e) Exercice 5.9 page 69

FIGURE 5.1. – Exercices 5.6 page 66, 5.7 page 67, 5.5 page 65, 5.8 page 68 et 5.9 page 69

$$x \mapsto f''(x) = 2\frac{3\ln^2(x) - 5\ln(x) + 1}{x^4}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a

$$\begin{aligned}
&f''(x) > 0 \text{ ssi } x \in]0; e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[\cup]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}; +\infty[,\\
&f''(x) = 0 \text{ ssi } x = e^{\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}},\\
&f''(x) < 0 \text{ ssi } x \in]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}; e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[.
\end{aligned}$$

On conclut que

- f est convexe sur $]0; e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[$ et sur $]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}; +\infty[$,
- f est concave sur $]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}; e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[$,
- $x = e^{\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}}$ sont des points d'inflexion.

5. *Graphe :* voir la figure 5.2 page 77

Exercice 5.11

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto f(x) = \ln(x - x^5)
\end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. graphe

Correction

1. *Ensemble de définition de f :* il faut $x - x^5 > 0$ donc

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +1[.$$

2. *Comportement de f aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+1^+} f(x) = -\infty.$$

Puisque $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ il n'y a pas d'asymptotes en $-\infty$.

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f :* la dérivée de f est l'application

$$\begin{aligned}
f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto f'(x) = \frac{1-5x^4}{x(1-x^4)}
\end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a

$$\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]0; 5^{-1/4}[,\\
&f'(x) = 0 \text{ ssi } x = 5^{-1/4},\\
&f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -1[\cup]5^{-1/4}; 1[.
\end{aligned}$$

On conclut que

- f est strictement croissante sur $]0; 5^{-1/4}[$,
- f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]5^{-1/4}; 1[$,
- $x_M = 5^{-1/4}$ est un point de minimum local et on a $f(x_M) < 0$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$5^{-1/4}$		$+1$
$f'(x)$		$-$				$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_M)$	$\searrow$	$-\infty$

4. *Graphe :* voir la figure 5.3a page 77

Exercice 5.12

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)-1}\end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. graphe

Correction

La fonction est paire, *i.e.* $f(-x)=f(x)$: on étudie donc seulement la fonction f^+ restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

1. *Ensemble de définition de f^+ :* il faut $\begin{cases}\ln(x^2)-1\neq 0\\ x^2>0\end{cases}$ donc

$$\mathscr{D}_{f^+}=]0,\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e},+\infty[.$$

Remarque : $\ln(x^2)=2\ln|x|$.

2. *Comportement de f^+ aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{x\to0^+} f^+(x)=0^-, \qquad \lim_{x\to(\sqrt{e})^-} f^+(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to(\sqrt{e})^+} f^+(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f^+(x)=+\infty.$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{f^+(x)}{x}=+\infty$, il n'y a pas d'asymptotes en $+\infty$.

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f^+ :* la dérivée de f^+ est l'application

$$\begin{aligned}(f^+)'\colon \mathscr{D}_{f^+} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f^+)'(x)=\frac{2x(2\ln(x)-1)-x^2\frac{2}{x}}{(2\ln(x)-1)^2}=4\frac{x(\ln(x)-1)}{(2\ln(x)-1)^2}\end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_{f^+}$ on a

$$\begin{aligned}&(f^+)'(x)>0 \text{ ssi } x\in]e;+\infty[,\\ &(f^+)'(x)=0 \text{ ssi } x=e,\\ &(f^+)'(x)<0 \text{ ssi } x\in]0;\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e};e[\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to0^+} f'(x)=0$. On conclut que

- f^+ est strictement croissante sur $]e;+\infty[$,
- f^+ est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{e}[$ et sur $]\sqrt{e};e[$,
- $x=e$ est un point de minimum local et on a $f^+(e)=e^2$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$(f^+)'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f^+(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Graphe :* voir la figure 5.3b page 77

Exercice 5.13

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
2. Calculer les limites de f en 0 et aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
4. Dresser le graphe de f.

Correction

L'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\\ x^2\ln(-x), & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

1. La dérivée de f est l'application $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln(x) + x, & \text{si } x > 0,\\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0, & \text{si } x = 0,\\ 2x\ln(-x) + x, & \text{si } x < 0,\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln|x| + x, & \text{si } x \neq 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

2. Limites de f en 0 et aux extrémités de l'ensemble de définition :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.

3. On a
   - $f'(x) = 0$ ssi $x \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$,
   - $f'(x) > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}};0\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$,
   - $f'(x) < 0$ ssi $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$;

   donc

- f est croissante pour $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}};0\right[$ et pour $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$,
- f est décroissante pour $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ et pour $x \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$,
- f a un maximun (locale) en $x = 0$ et $f(0) = 0$,
- f a un minimum (absolue) en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ et $f(\pm\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$.

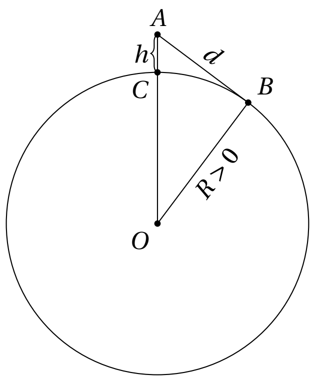
Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{x}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Graphe :* voir la figure 5.3c page ci-contre

Exercice 5.14 (Jusqu'où peut-on voir à l'horizon ?)

On veut déterminer la limite de visibilité d depuis un point d'altitude $h \ge 0$ au-dessus du niveau de la mer.
On approche la Terre a une sphère de rayon $R = 6371\,\text{km}$. Si on regarde droit devant, il y a un moment où une partie de la Terre va être cachée. Nous allons essayer de préciser où se situe cet endroit géométriquement. Imaginons un observateur A de hauteur h regardant le point B à l'horizon devant lui. Le rayon lumineux venant de l'horizon qui parvient aux yeux de l'observateur est une droite tangente à la Terre. Pour savoir jusqu'où on peut voir à l'horizon, il faut calculer la distance d il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore (le rectangle ABO) est rectangle en B.



Du point A on voit jusqu'au point B ainsi

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2$$

donc

$$d(h) = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Si on choisit une personne de taille moyenne, c'est-à-dire $h = 1.80\,\text{m}$, on trouve que la distance qui la sépare de l'horizon est $d(h) \approx 4.789\,\text{km}$, de même un enfant de $h = 1\,\text{m}$ verra jusqu'à $d(h) \approx 3.569\,\text{km}$. Et si on monte au sommet de la tour Eiffel ($h = 273\,\text{m}$) on verra jusqu'à $d(h) \approx 58.98\,\text{km}$.
Étudier la fonction $h \mapsto d(h)$.

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $2Rh + h^2 \ge 0$, *i.e.* $\mathscr{D}_d = \mathbb{R}^+$.
2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{h\to 0^+} d(h) = d(0) = 0,$$
$$\lim_{h\to +\infty} d(h) = +\infty.$$

De plus

$$\frac{d(h)}{h} = \frac{h\sqrt{\frac{2R}{h}+1}}{h} = \sqrt{\frac{2R}{h}+1} \xrightarrow[h\to+\infty]{} 1$$

et

$$\lim_{h\to+\infty} d(h) - h = \lim_{h\to+\infty} h\left(\sqrt{\frac{2R}{h}+1}-1\right) = \lim_{h\to+\infty} h\frac{\frac{2R}{h}+1-1}{\sqrt{\frac{2R}{h}+1}+1} = \lim_{h\to+\infty} \frac{2R}{\sqrt{\frac{2R}{h}+1}+1} = R.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = h + R$ est l'asymptote de h en $+\infty$.

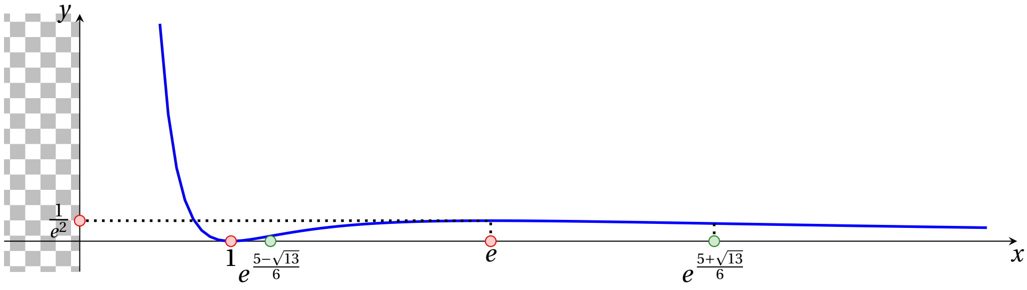
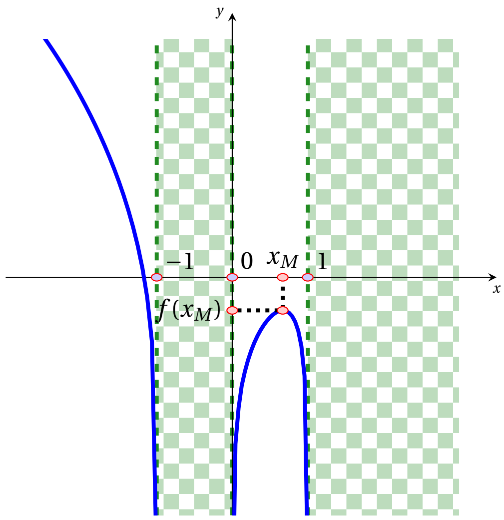
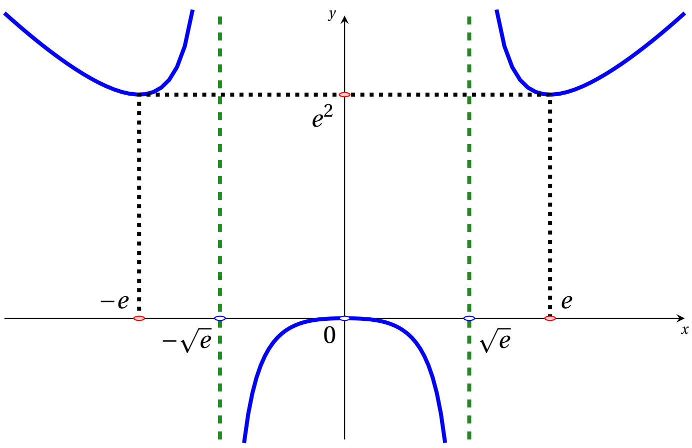


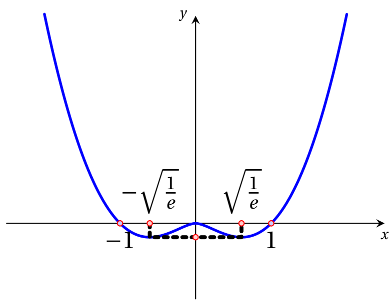
FIGURE 5.2. – Exercice 5.10 page 71



(a) Exercice 5.11 page 73.



(b) Exercice 5.12 page 74



(c) Exercice 5.13 page 75

FIGURE 5.3. – Exercices 5.11 page 73, 5.12 page 74 et 5.13 page 75

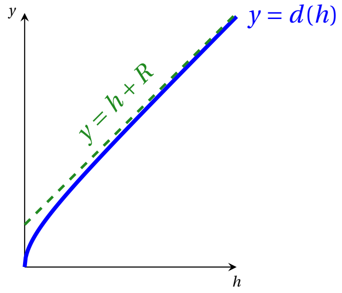


FIGURE 5.4. – Exercice 5.14 page 76

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de d est la fonction

$$\begin{aligned} d' \colon \mathscr{D}_d &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d'(h) = \frac{R+h}{\sqrt{2Rh+h^2}} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_d^*$ on a $d'(h) > 0$ et $\lim_{h\to 0^+} d'(h) = +\infty$ donc d est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction

$$\begin{aligned} d'' \colon \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto d''(h) = \frac{-R^2}{(2Rh+h^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

On conclut que d est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. *Graphe :* voir la figure 5.4

Cf. https://blogdemaths.wordpress.com/2015/06/27/jusquou-peut-on-voir-a-lhorizon/

Exercice 5.15

Étudier brièvement la fonction $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Correction

- Étude de la fonction :
  - $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$,
  - $f'(x) = 0$ ssi $x = e$ et l'on a $f(e) = e$,
  - $f''(x) = \frac{2-\ln(x)}{x\ln^3(x)}$,
  - $f''(e) = \frac{1}{e} > 0$,
- Lien entre la fonction f et l'inégalité :

$$e^\pi > \pi^e \iff \ln(e^\pi) > \ln(\pi^e) \iff \pi > e\ln(\pi) \overset{e<\pi}{\iff} e < \frac{\pi}{\ln(\pi)}.$$

Comme $x = e$ est un minimum pour f, *i.e.* $f(x) \ge f(e)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, cela est vraie en particulier pour $x = \pi$ et notre inégalité est bien vérifiée.

Exercice 5.16

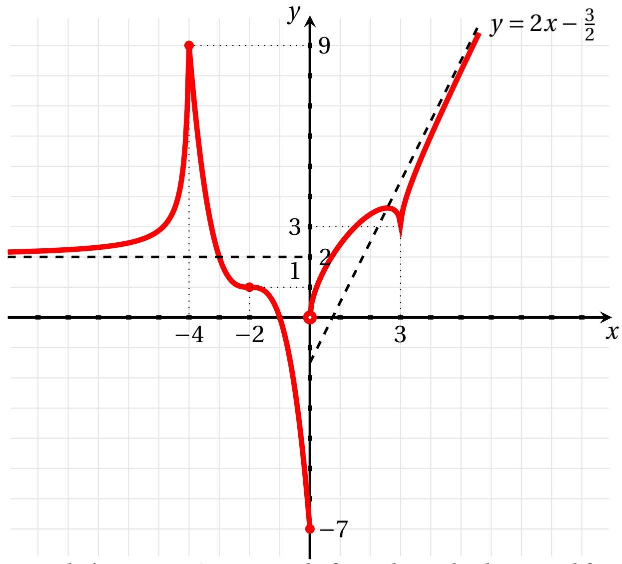
Étudier brièvement la fonction $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Correction

- Étude de la fonction :
  - Notons que $f(x) = \frac{e^x}{e^{\ln(x)}}$
  - $f'(x) = \frac{e^x x^e - e^x x^e / x}{x^{2e}} = e^x \frac{x-1}{x^{e+1}}$,
  - $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$,

- ○ f croissante pour $x>1$, décroissante pour $x<1$.
- Lien entre la fonction f et l'inégalité :
$$e^{\pi}>\pi^{e}\iff\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}>1.$$
Comme f est croissante pour $x>1$ et $1<\pi$ alors $1<e<f(1)<f(\pi)=\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}$ et notre inégalité est bien vérifiée.

Exercice 5.17



Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x)=\begin{cases}2-\dfrac{7}{7x+27} & \text{si } x\le-4,\\ 1-(x+2)^3 & \text{si } -4<x\le 0,\\ x+\sqrt{|x^2-3x|} & \text{si } x>0,\end{cases}$$
dont le graphe est représenté dans la figure ci-contre.

Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=-4$, en $x=-2$, en $x=0$ et en $x=3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-2$? Et en $x=4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x\in\mathcal{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x\in\mathcal{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)-2x$.

Correction

1. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
   - f est continue en -4 et $f(-4)=9$; elle n'est pas dérivable en $x=-4$ car $\displaystyle\lim_{h\to0^-}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{2-\frac{7}{7(h-4)+27}-9}{h}=\frac{49}{(55)^2}$ tandis que $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{1-(-4+h+2)^3-9}{h}=-12$;
   - f est continue en -2 et $f(-2)=1$; f est dérivable en -2 et $f'(-2)=0$;
   - f n'est pas continue en $x=0$ car $f(0)=1-(-4+2)^3=-7$ mais $\displaystyle\lim_{h\to0^+}f(x)=\lim_{h\to0^+}x+\sqrt{|x^2-3x|}=0$;
   - f est continue en $x=3$ et $f(3)=3$; elle n'est pas dérivable en $x=3$ car $\displaystyle\lim_{h\to0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{h+3+\sqrt{3(h+3)-(h+3)^2}}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{h+3+\sqrt{-h(h+3)}}{h}=\infty$ et de même $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h+3+\sqrt{(h+3)^2-3(h+3)}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h+3+\sqrt{h(h+3)}}{h}=\infty$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-2$ est $y=1$ et en $x=4$ est $y=f'(4)(x-4)+f(4)=\frac{9}{4}x-3$.
4. $f'(x)=0$ pour $x=-2$ et $x=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-4,0,3\}$, $f'(x)>0$ pour $x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right[\cup\left]3;+\infty\right[$ et $f'(x)<0$ pour $x\in\left]-4;-2\right[\cup\left]-2;0\right[\cup\left]\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);3\right[$.

5. $f''(x) = 0$ pour $x = -2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-4, 0, 3\}$, $f''(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]-4; -2[$ et $f''(x) < 0$ pour $x \in]-2; 0[\cup]0; 3[\cup]3; +\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est asymptote en $-\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -\frac{3}{2}$.

Chapitre 6.

Primitives et intégrales

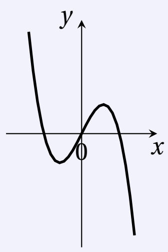
Si F est une primitive de f alors $F' = f$.

Rappels

$F'' = f'$	$F' = f$	F
	>0	$\nearrow$
	$=0$	f tangente horizontale
	<0	$\searrow$
>0	$\nearrow$	convexe
$=0$	$\longleftrightarrow$	
<0	$\searrow$	concave

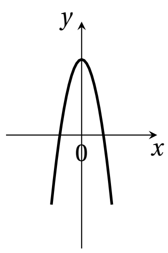
Ainsi,
- si F est croissante (résp. décroissante), alors sa dérivée f est positive (résp. négative); si F a des extrema, alors sa dérivée f s'annule;
- si F est convexe (résp. concave), alors sa dérivée seconde f' est positive (résp. négative), c'est-à-dire f est croissante (résp. décroissante); si F a un point d'inflexion, alors sa dérivée seconde f' s'annule, c'est-à-dire f a un extremum.

Exercice 6.1
Soit f une fonction. Ci-dessous on a tracé le graphe d'une de ses primitives.



Que peut-on dire sur le signe de f? Et sur la croissance de f?

Correction
Un graphe possible de f est donc



6.1. Primitives : techniques d'intégration

Exercice 6.2 (Par intégration directe)
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int 2x^3-3x+1\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int (1+2x^3)^2\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \sqrt[4]{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $\displaystyle 2\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+x+c=\frac{1}{2}x(x^3-3x+2)+c$
2. $\displaystyle\int 4x^6+4x^3+1\,\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^7+x^4+x+c$
3. $\displaystyle\int x^{1/2}+x^{1/3}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{3}{4}x^{4/3}+c$
4. $\displaystyle\int x^{-4/3}\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+c$
5. $\displaystyle\frac{(x+1)^{1/2}}{1/2}+c=2\sqrt{x+1}+c$
6. $\displaystyle\frac{4}{7}(x-1)^{7/4}+c$
7. $\displaystyle\int \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int 1-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=x-\ln(x+1)+c$
8. $\displaystyle\int \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int x+\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\arctan(x)+c$

Exercice 6.3

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $\displaystyle u(x)=1+x,\ u'(x)=1,\ \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|1+x|+c$
2. $\displaystyle u(x)=1-x,\ u'(x)=-1,\ -\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=-\ln|1-x|+c$
3. $\arctan(x)+c$
4. $\displaystyle\frac{1}{1-x^2}=\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x},\ \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln|1+x|-\ln|1-x|)+c=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+c=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+c$
5. $\arcsin(x)+c=-\arccos(x)+c$

Exercice 6.4 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)

Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\underbrace{u'(x)}_{=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}\,\mathrm{d}x=\int f(t)\frac{\mathrm{d}t}{\cancel{\mathrm{d}x}}\cancel{\mathrm{d}x}=\int f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : si $u(x)=Ax+B$ alors $u'(x)=A$ constante et on pourra utiliser la propriété $\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{A}\int f(t)A\,\mathrm{d}t$.

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int x\sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$
23. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
24. $\displaystyle\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$
25. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $u(x)=1+e^x,\ u'(x)=e^x,\ \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(1+e^x)+c$

2. $u(x)=1+e^x$, $u'(x)=e^x$, $\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x-\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=x-\ln(1+e^x)+c$
3. $u(x)=2x+1$, $u'(x)=2$, $\frac{1}{2}\int \sqrt{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int [u(x)]^{1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{[u(x)]^{3/2}}{3}=\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c$
4. $u(x)=\ln(x)$, $u'(x)=1/x$, $\int (u(x))^3u'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\ln^4(x)}{4}+c$
5. $u(x)=-1/x$, $u'(x)=1/x^2$, $\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=e^{-1/x}+c$
6. $u(x)=\ln(x)$, $u'(x)=1/x$, $\int \frac{u'(x)}{(u(x))^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\ln^2(x)}+c$
7. $u(x)=x+\sin(x)$, $u'(x)=1+\cos(x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|x+\sin(x)|+c$
8. $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$, $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}\,\mathrm{d}x=\arctan(x^2)+c$
9. $u(x)=1+\sin^2(x)$, $u'(x)=2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(1+\sin^2(x))+c$
10. $u(x)=\sin(x)$, $u'(x)=\cos(x)$, $\int (u(x))^3u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin^4(x)}{4}+c$
11. $u(x)=\tan(x)$, $u'(x)=1/\cos^2(x)$, $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|\tan(x)|+c$
12. $u(x)=\tan(x)$, $u'(x)=1/\cos^2(x)$, $\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=e^{\tan(x)}+c$
13. $u(x)=1-x^2$, $u'(x)=-2x$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x+\int (u(x))^{-1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x=\arcsin(x)+2\sqrt{1-x^2}+c$
14. $u(x)=x^2+2x+1$, $u'(x)=2x+2$, $\frac{1}{2}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1)+c$
15. $u(x)=x^2+1$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^2u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(x^2+1)^3}{6}+c$
16. $u(x)=2x+1$, $u'(x)=2$, $\frac{1}{2}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{u(x)}+c=\frac{e^{2x+1}}{2}+c$
17. $u(x)=5+x^2$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^{1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2}+c$
18. $u(x)=\sqrt{x}$, $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $2\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=2e^{\sqrt{x}}+c$
19. $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^2}}{2}+c$
20. $u(x)=x^3$, $u'(x)=3x^2$, $\frac{1}{3}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^3}}{3}+c$
21. $u(x)=\sqrt{x}$, $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{1}{2}\int \sin(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x=-2\cos\sqrt{x}+c$
22. $u(x)=x^2+3$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^{-1/3}u'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^2}+c$
23. $u(x)=1+x^4$, $u'(x)=4x^3$, $\frac{1}{4}\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+x^4)}{4}+c$
24. $u(x)=3x$, $u'(x)=3$, $\frac{1}{3}\int \sin(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos(3x)+c$
25. Si on pose $t=\tan(x)$ alors $\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et on obtient $e^{\tan(x)}+c$ car $\frac{1}{\cos^1(x)}=1+\tan^2(x)=$

Exercice 6.5 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)

Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\,\mathrm{d}x=\int f(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela il faut tout d'abord calculer $x=u^{-1}(t)$ puis en calculer la dérivée. Plus généralement, si on a une relation du type $u(x)=h(t)$ alors $u'(x)\,\mathrm{d}x=h'(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui permet de remplacer $\mathrm{d}x=\frac{h'(t)}{u'(x)}\,\mathrm{d}t$ avec $x=u^{-1}(h(t))$.

1. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2+\ln^2(x))}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int x\sqrt{a+x^2}\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x$
23. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

Correction

Ici c'est plus difficile de reconnaître $u'(x)$ ainsi on inverse la relation $t=u(x)$ pour obtenir $x=u^{-1}(t)$ avant de calculer les dérivées et trouver la relation entre $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$:

1. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-\cos(\ln(x))+c$
2. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2(\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}})+c$
3. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\ln(\sqrt{x}-1)+c$
4. Pour $x>0$, si $x>0$. Si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$
5. Si on pose $t=e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln(1+e^x)+c$
6. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|\ln(x)|+c$
7. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$ alors $-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}+c$
8. Si on pose $t=1+e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ ainsi $\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x=\int\ln(t)\,\mathrm{d}t$. Sans utiliser l'intégration par partie, si on pose $t=e^w$ alors $\mathrm{d}t=e^w\,\mathrm{d}w$ ainsi $\int\ln(t)\,\mathrm{d}t=\int we^w\,\mathrm{d}w=(w-1)e^w$ et on obtient $(1+e^x)\ln(1+e^x)-e^x+c$.
9. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)+c$
10. Si on pose $t^2=1-x^2$ alors $-x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+c$
11. Si on pose $t^2=x^3-1$ alors $3x^2\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3-1}+c$
12. Si on pose $t^2=e^x-1$ alors $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan(\sqrt{e^x-1})\right)+c$
13. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\mathrm{d}x=e^t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{2}\ln^2(x)+c$
14. Si on pose $t=e^x$ alors $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\arctan e^x+c$
15. Si on pose $t=\sqrt{1+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\sqrt{1+x^2}+c$
16. Pour $a+x^2\ge0$, si on pose $t=\sqrt{a+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{3}\sqrt{(a+x^2)^3}+c$
17. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\arcsin(\ln(x))+c$
18. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-e^{1/x}+c$
19. Si on pose $t=1+\sin(x)$ alors $\cos(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|1+\sin(x)|+c$
20. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$
21. Si on pose $t^2=1+x^2$ alors $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}+c$
22. $\int\frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$. Si on pose $t=x/\sqrt{3}$ alors $\mathrm{d}x=\sqrt{3}t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(x/\sqrt{3})+c$
23. Si on pose $t=x^2$ alors $2\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{2}\arctan(x^2)+c$

Exercice 6.6

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=(1-\sin(x))(1+\sin(x))$, $\int\frac{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x=x-\cos(x)+c$
2. $1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$, $u(x)=\sin(x)-\cos(x)$, $u'(x)=\sin(x)+\cos(x)$, $\int\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(\sin(x)-\cos(x))+c$
3. $1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$, $\int\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x=\tan(x)-\dfrac{1}{\tan(x)}+c$
4. $1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$, $\int\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x)|+\ln|\sin(x)|+c$

5. $\sin(x)=2\sin(x/2)\cos(x/2)$, $u(x)=x/2$, $u'(x)=1/2$, $\int\frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos(u(x))\sin(u(x))}u'(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x/2)|+\ln|\sin(x/2)|+c=\ln|\tan(x/2)|+c$.
6. $\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $u(x)=\frac{\pi}{2}-x$, $u'(x)=-1$, $\int\frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\sin\left(u(x)\right)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\ln|\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|-\ln|\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|+c=\ln(\sin(x)-\cos(x))+c$

Exercice 6.7 (Intégration par parties)

Calculer les primitives suivantes en utilisant $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$:

1. $\displaystyle\int\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}e^{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int\frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

Correction

1. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\frac{1}{x^2}$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=-\frac{1}{x}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1+\ln(x)}{x}+c$
2. On pose $f(x)=\ln(1+x)$ et $g'(x)=1$. Alors $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ et $g(x)=x$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=(1+x)\ln(1+x)-x+c$
3. On pose $f(x)=x^2$ et $g'(x)=e^x$. Alors $f'(x)=2x$ et $g(x)=e^x$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=x^2e^x-2\int xe^x\,\mathrm{d}x$. On intègre encore par partie et on obtient$=e^x((x-2)x+2)+c$
4. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=2\sqrt{x}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}(\ln(x)-2)+c$
5. On pose $f(x)=x$ et $g'(x)=\sin(x)$. Alors $f'(x)=1$ et $g(x)=-\cos(x)$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=-x\cos(x)+\sin(x)+c$
6. On pose $f(x)=x^2$ et $g'(x)=\cos(x)$. Alors $f'(x)=2x$ et $g(x)=\sin(x)$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=x^2\sin(x)-2[-x\cos(x)+\sin(x)]+c$
7. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=x$. Alors $f'(x)=1/x$ et $g(x)=x^2/2$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+c$
8. On pose $f(x)={}^{\sin(x)}/_{\cos(x)}$ et $g'(x)={}^{e^{\tan(x)}}/_{\cos^2(x)}$. Alors $f'(x)={}^{1}/_{cos^2(x)}$ et $g(x)=e^{\tan(x)}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=e^{\tan(x)}(\tan(x)-1)+c$
9. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=x^3$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{x^4}{4}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{16}x^4(4\ln(x)-1)+c$
10. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{4x^{3/4}}{3}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}x^{3/4}\left(\ln(x)-\frac{4}{3}\right)+c$
11. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\ln(x)$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x\ln(x)-x$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=x(\ln^2(x)-2\ln(x)+2)+c$
12. On pose d'abord $t=x^2$ ainsi $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$. Alors $\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2\sin(x^2)2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $f(t)=t$ et $g'(t)=\sin(t)$. Alors $f'(t)=1$ et $g(t)=-\cos(t)$. On obtient $f(t)g(t)-\int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{-t\cos(t)+\sin(t)}{2}+c=\dfrac{-x^2\cos(x^2)+\sin(x^2)}{2}+c$

Exercice 6.8

Calculer la primitive suivante en utilisant un changement de variable. Comparer ensuite au résultat obtenu en utilisant l'intégration par parties :

$$\int\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Correction

CV Si on pose $t=\arcsin(x)$ alors $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$ et $x=\sin(t)$ et on obtient

$$\int\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

On a calculé cette intégrale à l'exercice 6.7(5.) :

$$\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t = -t\cos(t)+\sin(t)+c = -\arcsin(x)\cos(\arcsin(x))+x+c$$

IPP

$$\begin{array}{cccccc} \displaystyle\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x & & = & & = -\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin(x)+x+c \\ & f(x)=\arcsin(x) & \Rightarrow & f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\ & g(x)=-\sqrt{1-x^2} & \Leftarrow & g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \end{array}$$

Les deux calculs donnent le même résultat car $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \pm\sqrt{1-x^2}$

Exercice 6.9 (cf. P. Halmos)

Si $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables quelconques, on sait que **la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées**, autrement dit $(fg)'\neq f'g'$. Cependant, il existe des fonctions f et g pour lesquelles on a bien $(fg)'=f'g'$, par exemple si f et g sont toutes deux égales à une constante (pas nécessairement la même). Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Correction

- Si $f(x)=k_1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $g(x)=k_2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors $(fg)'(x)=(k_1k_2)'=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f'(x)g'(x)=0\times 0=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- Si $g=f$, on cherche f telle que $(f^2)'=(f')^2$, c'est-à-dire $2f(x)f'(x)=(f'(x))^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc, soit $f'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et on trouve à nouveau $f(x)=g(x)=k$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, soit $2f(x)=f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et on trouve $f(x)=g(x)=ke^{2x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- Dire que $(fg)'=f'g'$ revient à dire que $f'g+fg'=f'g'$. En divisant par le produit fg (il est inutile à ce stade de se préoccuper de la possibilité de diviser par 0, nous cherchons seulement formellement des conditions nécessaires) on a
$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}$$
c'est-à-dire $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{g'(x)}{g(x)}}{1-\frac{g'(x)}{g(x)}}$, soit encore
$$[\ln(f(x))]'=\frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}.$$
Si on choisit g, il suffit de poser $f=e^G$ où G est une primitive de $\frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}$.
Voyons quelques exemples :
  - si on pose $g(x)=x$ alors $G(x)=\int\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$ et $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Vérifions si on a bien $(fg)'=f'g'$:
$$(fg)'(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$f'(x)g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$
  - si on pose $g(x)=x^a$ alors $G(x)=\int\frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,\mathrm{d}x=\int\frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,\mathrm{d}x=-a\ln(a-x)$ et $f(x)=\frac{1}{(a-x)^a}$. Vérifions si on a bien $(fg)'=f'g'$:
$$(fg)'(x)=\left(\frac{x^a}{(a-x)^a}\right)'=a^2x^{a-1}(a-x)^{-a-1}$$
$$f'(x)g'(x)=a(a-x)^{-a-1}\cdot ax^{a-1}=a^2x^{a-1}(a-x)^{-a-1}$$
  - si on pose $g(x)=e^{ax}$ alors $G(x)=\int\frac{ae^{ax}}{ae^{ax}-e^{ax}}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{a-1}x$ et $f(x)=e^{bx}$ où $b=a/(a-1)$. Vérifions si on a bien $(fg)'=f'g'$:
$$(fg)'(x)=(e^{bx}e^{ax})'=(e^{(a+b)x})'=(a+b)e^{(a+b)x}$$
$$f'(x)g'(x)=be^{bx}ae^{ax}=(ab)e^{(a+b)x}=(a+b)e^{(a+b)x}$$

Exercice 6.10 (Formules de réduction)
Les formules de réduction dérivent de l'application répétée de la règle d'intégration par parties.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, montrer que
$$\int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \left(x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots + (-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\int x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^n\cos(x) + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\sin(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq -1$ et $x > 0$. Montrer que
$$\int x^\alpha \ln^n(x)\,\mathrm{d}x = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Correction

1. On pose $I_n = \int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = e^{\alpha x}$) on trouve
$$I_n = x^n\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha}I_{n-1} = x^n\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha}\left(x^{n-1}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n-1}{\alpha}I_{n-2}\right) = \cdots = \left(x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots + (-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$
2. On pose $I_n = \int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = \sin^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \sin(x)$) on trouve
$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$
De la même manière, on pose $I_n = \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = \cos^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \cos(x)$) on trouve
$$I_n = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$
3. On pose $I_n = \int x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = \sin(x)$ dans la première intégrale et $f(x) = x^n$ et $g'(x) = \cos(x)$ dans la deuxième intégrale) on trouve
$$I_n = -x^n\cos(x) + nJ_{n-1} \qquad J_n = x^n\sin(x) - nI_{n-1}$$
Par conséquence
$$I_n = -x^n\cos(x) + n\left(x^{n-1}\sin(x) - (n-1)I_{n-2}\right) = -x^n\cos(x) + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)I_{n-2}$$
$$J_n = x^n\sin(x) - n\left(-x^{n-1}\cos(x) + (n-1)J_{n-2}\right) = x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)J_{n-2}$$
4. On pose $I_n = \int x^\alpha\ln^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = \ln^n(x)$ et $g'(x) = x^\alpha$) on trouve
$$I_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1} = \cdots = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

6.2. Intégrales : aires, déplacements, vitesses, accélérations

Exercice 6.11 (Vitesse et accélération)
Soit $V > 0$ une constante. Une voiture roule à une vitesse de $v(t) = Vt(1-t)$ km h^{-1} durant l'intervalle de temps $0 \le t \le 1$ h. Quelle a été sa vitesse maximale ? Que vaut l'accélération instantanée ? Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Correction
- Vitesse maximale : $v(t) = Vt(1-t) = V(t-t^2)$, $v'(t) = V(1-2t)$, $v'(t) = 0$ ssi $t = \frac{1}{2}$ et $v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{V}{4}$.
- Accélération instantanée : $a(t) = v'(t = V(1-2t)$ donc $a > 0$ si $t < \frac{1}{2}$ et $a < 0$ si $t > \frac{1}{2}$
- Distance parcourue : $v(t) = x'(t)$ donc $x_{\text{parcourue}} = \displaystyle\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{V}{6}$.

Exercice 6.12
Calculer

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathscr{B} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathscr{C} = \int_{-1}^{1} \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x.$$

Correction

$$\mathscr{A} = [\arctan(x)]_{-1}^{1} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$
$$\mathscr{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathscr{A}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathscr{C} = \int_{-1}^{1} \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x^2-5x+6|\right]_{-1}^{1} = \ln(2) - \ln(12) = \ln(2) - \ln(3) - 2\ln(2) = -\ln(2) - \ln(3).$$

Exercice 6.13 (Calcul de l'aire)
Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$

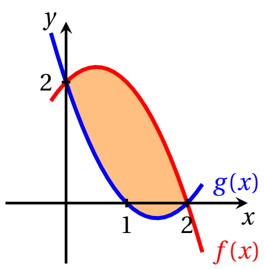
b) $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x$

Correction

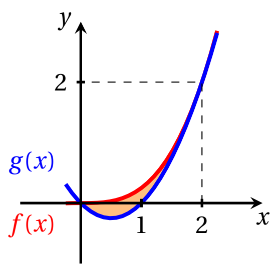
a) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0,2\}$ et $f(x) \ge g(x)$ pour $x \in [0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\displaystyle\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -2x^2 + 4x\,\mathrm{d}x = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

b) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0,2\}$ et $f(x) \ge g(x)$ pour $x \in [0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\displaystyle\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^3}{4} - x^2 + x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{3}$.

$f(x) = -x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2)$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

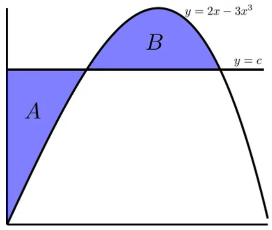


$f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x = x(x-1)$



Exercice 6.14 (Putnam 1993)

La ligne horizontale $y = c$ coupe la courbe $y = 2x - 3x^3$ dans le premier quadrant comme sur la figure. Trouvez c de sorte que les aires des deux régions coloriées soient égales.



Correction

Les deux aires dépendent de l'endroit où la ligne $y = c$ coupe la courbe $y = 2x-3x^3$. Notons ces points a et b avec $0 < a < b$. On a alors

$$A = \int_0^a c \,\mathrm{d}x - \int_0^a 2x - 3x^3 \,\mathrm{d}x, \qquad\qquad B = \int_a^b 2x - 3x^3 \,\mathrm{d}x - \int_a^b c \,\mathrm{d}x.$$

Si $A = B$ alors

$$\begin{aligned} 0 = B - A &= \int_a^b 2x - 3x^3 \,\mathrm{d}x - \int_a^b c \,\mathrm{d}x - \int_0^a c \,\mathrm{d}x + \int_0^a 2x - 3x^3 \,\mathrm{d}x = \int_0^b 2x - 3x^3 x^3 \,\mathrm{d}x - \int_0^b c \,\mathrm{d}x \\ &= [cx]_0^b - \left[x^2 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^b = bc - b^2 + \frac{3}{4}b^4 = b\left(c - b + \frac{3}{4}b^3\right). \end{aligned}$$

Cela signifie que la solution du problème ne dépend pas de a.
Comme $2b - 3b^3 = c$ (le point (b, c) appartient à la parabole), on doit alors résoudre

$$0 = 2b - 3b^3 - b + \frac{3}{4}b^3 = b - \frac{9}{4}b^3 = b\left(1 - \frac{9}{4}b^2\right)$$

ainsi $b = \frac{2}{3}$ et $c = 2b - 3b^3 = \frac{4}{9}$.

Exercice 6.15 (Calcul de l'aire)

Calculer l'aire de A et de B ainsi définis :

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 2\pi, \frac{1}{8} \le y \le \cos^3(x) \right\}, \qquad\qquad B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\pi \le x \le \pi, \frac{1}{8} \le y \le \cos^3(x) \right\}.$$

Correction

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \int \cos^3(x) \,\mathrm{d}x &\overset{\cos^2(x)=1-\sin^2(x)}{=} \int (1 - \sin^2(x))\cos(x) \,\mathrm{d}x = \\ &= \int \cos(x) - \cos(x)\sin^2(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) - \int \cos x \,\sin^2(x) \,\mathrm{d}x \overset{\substack{t=\sin(x)\\ \mathrm{d}t=\cos(x)\,\mathrm{d}x}}{=} \\ &= \sin(x) - \int t^2 \,\mathrm{d}t = \sin(x) - \frac{t^3}{3} + k = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $\cos^3(x) = \frac{1}{8}$ ssi $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ alors

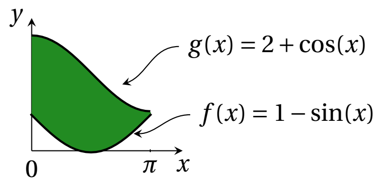
$$\text{Aire } (A) = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x) \,\mathrm{d}x - \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{8}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{9\sqrt{3} - \pi}{12}$$

et

$$\text{Aire } (B) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x) \,\mathrm{d}x - 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{8} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{9\sqrt{3} - \pi}{12}.$$

Exercice 6.16

Que vaut l'aire coloriée comprise entre les deux courbes ?



Correction

$\int_0^\pi 2+\cos(x)-1+\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1+\cos(x)+\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x+\sin(x)-\cos(x)]_0^\pi = (\pi+0-(-1))-(0+0-1) = \pi+2.$

Exercice 6.17

La valeur moyenne de la fonction $f(x)=x^3$ sur l'intervalle $[0;k]$ est 9. Calculer k.

Correction

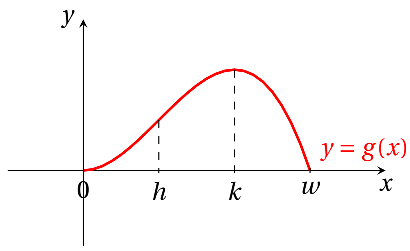
valeur moyenne de $f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k}\int_0^k x^3\,\mathrm{d}x = 9 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{k}\frac{k^4}{4}=9 \quad\Longrightarrow\quad k=\sqrt[3]{36}.$

Exercice 6.18

Dans la figure ci-contre on a tracé le graphe de la fonction $g\colon [0;w]\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec $f\colon [0;w]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Le graphe de g a tangente horizontale en $x=0$ et présente un changement de concavité en $x=h$ et un maximum en $x=k$.



1. Calculer $f(0)$ et $f(k)$.
2. Tracer un graphe plausible de f et montrer qu'elle admet un maximum.
3. Dorénavant on suppose que g est une fonction polynomiale de degré 3.
   3.1. Montrer que $h=w/3$ et $k=2h$.
   3.2. Pour $w=3$ et $g(1)=2/3$ trouver l'expression de g.

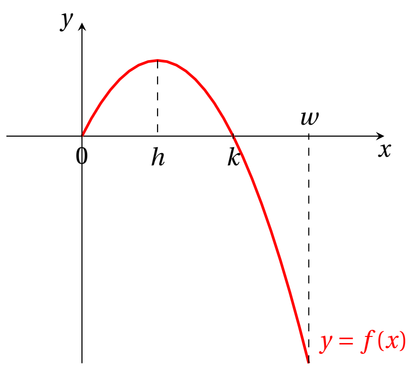
Correction

1. $g'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[0;w]$. Puisque $x=0$ et $x=k$ sont des points à tangente horizontale pour le graphe de g, alors $g'(0)=g'(k)=0$ donc $f(0)=f(k)=0$.
2. f est continue par hypothèse. D'après le théorème de Weierstrass elle admet un maximum et un minimum sur $[0;w]$.

   On a vu au point précédent que $f(0)=f(k)=0$ et que $g'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[0;w]$. g est croissante ($g'(x)>0$) sur $[0;k]$ et décroissante ($g'(x)<0$) sur $[k;w]$, donc f est positive sur $[0;h]$ et négative sur $[h;w]$.

   De plus, $g''(x)=f'(x)$ pour tout $x\in[0;w]$. g est convexe ($g''(x)>0$) sur $[0;h]$ et concave ($g''(x)<0$) sur $[h;w]$, donc f est croissante sur $[0;h]$ et décroissante sur $[h;w]$. $x=h$ est un maximum absolu pour f et $x=w$ un minimum absolu.

   Un graphe plausible de f est donc le suivant :



3. g est une fonction polynomiale de degré 3, $x = w$ est un zéro simple et $x = 0$ est un zéro double (car $g'(0) = 0$), donc $g(x) = a(x - w)(x - 0)^2 = ax^2(x - w)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre.

   3.1. On a $f(x) = g'(x) = ax(3x - 2w)$: il s'agit d'une parabole. Comme $f(0) = f(k) = 0$ alors $k = 2w/3$. De plus, le sommet de la parabole se trouve en $x = k/2$ et $f'(k/2) = 0$. Comme $x = h$ est le maximum de f, alors $h = k/2 = w/3$.

   3.2. Si $w = 3$ alors $g(x) = ax^2(x - 3)$ et la condition $g(1) = 2/3$ implique $a = -1/3$. On obtient ainsi $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$.

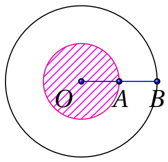
Exercice 6.19 (Probabilité géométrique)

1. On sélectionne un point au hasard sur une cible *circulaire*. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus prêt du centre que de la circonférence de la cible ?
2. On sélectionne un point au hasard sur une cible *carrée*. Quelle est la probabilité que le point sélectionné soit plus prêt du centre du carré que d'un de ses côtés ?

Source : `http://www.thedudeminds.net`

Correction

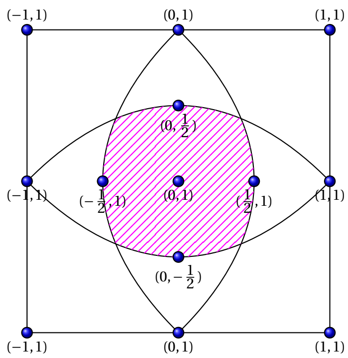
1. Il semble assez évident de délimiter correctement de manière intuitive les zones par deux disques concentriques.

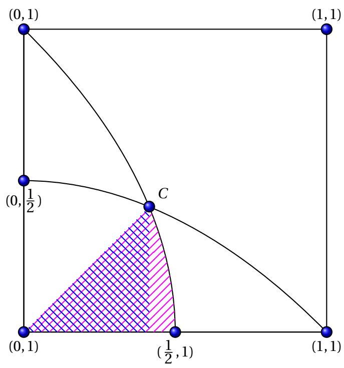


Attention néanmoins à ne pas répondre que la probabilité de choisir un point dans la zone hachurée est 1/2 (parce que le rayon du disque hachuré correspond à la moitié du rayon du grand disque). Or, si le petit disque possède un rayon de r et le grand $2r$, on a

$$P = \frac{\text{Aire du petit disque hachuré}}{\text{Aire du grand disque}} = \frac{\pi r^2}{\pi(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

2. L'ensemble de points équidistants d'un point et d'une droite est une parabole. La région à considérer est donc délimitée par quatre paraboles qui ont pour foyer le centre du carré et comme droites directrices les droites qui supportent les côtés du carré. On s'affaire donc à trouver l'aire de cette région hachurée. On place d'abord le tout dans un repère cartésien. Les sommets du carré sont $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$ (cf. figure à gauche). En vertu des symétries de la figure, il nous est possible de nous concentrer seulement sur la partie située dans le premier quadrant. Qui plus est, il est possible de ne s'attarder qu'à la moitié de cette dernière région (cf. figure à droite).





Ce «croissant de parabole» correspond à la moitié de la région à considérer dans le premier quadrant. On note au passage que l'aire du carré dans ce premier quadrant est 1. Le «croissant» est à son tour divisé en deux parties : la zone de forme triangulaire $\mathscr{T}$ et la zone $\mathscr{A}$. On cherche l'aire de ces zones. Pour y arriver, on aura besoin des coordonnées de C. L'équation de la parabole qui nous intéresse est $y^2 = 1 - 2x$. On ne s'intéressera qu'à la branche située au dessus de l'axe des abscisses. Ainsi $y = \sqrt{1 - 2x}$. On cherche ensuite les coordonnées de C, le point d'intersection entre la courbe d'équation $y = \sqrt{1 - 2x}$ et la droite d'équation $y = x$ et on obtient $x = -1 + \sqrt{2}$. Il nous est donc déjà possible de trouver l'aire du triangle, que l'on a identifié comme $\mathscr{T} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$. Il reste à trouver l'aire de la région sous la courbe :

$$\mathscr{A} = \int_{-1+\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - 2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{3-2\sqrt{2}}^{0} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sqrt{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^3} = \frac{(-1 + \sqrt{2})^3}{3}.$$

L'aire totale est donc
$$\mathscr{T}+\mathscr{A}=\frac{-5+4\sqrt{2}}{6}.$$
Comme le carré du premier quadrant à une aire de 1, il ne reste qu'à doubler ce résultat afin d'obtenir la probabilité recherchée
$$P=\frac{-5+4\sqrt{2}}{3}$$
ce qui correspond à un peu moins de 22%.

Annexe A.

Prérequis

A.1. Manipulations élémentaires

Exercice A.1

Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

1. $\dfrac{51}{136}$
2. $\dfrac{1015}{2450}$
3. $\dfrac{9}{40}+\dfrac{9}{50}+\dfrac{18}{125}$
4. $1-\dfrac{27}{125}-\dfrac{549}{1000}$
5. $\dfrac{549}{1000}+2\times\dfrac{235}{1000}$
6. $0.000\,001\,25$

Correction

1. $\dfrac{3\times 17}{2^3\times 17}=\dfrac{3}{8}$
2. $\dfrac{5\times 7\times 29}{2\times 5^2\times 7^2}=\dfrac{29}{70}$
3. $\dfrac{3^2}{2^3\times 5}+\dfrac{3^2}{2\times 5^2}+\dfrac{2\times 3^2}{5^3}=\dfrac{3^2\times(5^2+2^2\times 5+2^4)}{2^3\times 5^3}=\dfrac{549}{1000}$
4. $1-\dfrac{3^3}{5^3}-\dfrac{3^2\times 61}{2^3\times 5^3}=\dfrac{47}{200}$
5. $\dfrac{3^2\times 61}{2^3\times 5^3}+2\times\dfrac{5\times 47}{2^3\times 5^3}=\dfrac{1019}{1000}$
6. $125\times 10^{-9}=5^3\times 2^{-9}\times 5^{-9}=2^{-3}\times 10^{-6}=\dfrac{1}{800\,000}$

Exercice A.2

Sans utiliser la calculatrice, calculer

1. 12.5% de 164
2. 13% de 50% de 800
3. $\dfrac{300}{30\%}$
4. $14\times 5\%$
5. $(412-518)\times 116\%$
6. $\dfrac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}$
7. $\dfrac{\left(\frac{2^{18}\times 2^{-6}}{2^9}\right)}{\left(2^{-2}\right)}$
8. 2001^2-1999^2

Correction

1. 20.5
2. 52
3. 1000
4. 0.7
5. -122.96
6. $\dfrac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}=\left(\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{8}\right)\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{4\times 8-1\times 7}{56}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{25}{56}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{45}{56}$
7. $\dfrac{\frac{2^{18}\times 2^{-6}}{2^9}}{2^{-2}}=2^{18}\times 2^{-6}\times 2^{-9}\times 2^{2}=2^{18-6-9+2}=2^5=32$
8. $2001^2-1999^2=(2001-1999)(2001+1999)=2\times 4000=8000$

Exercice A.3

Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\dfrac{4}{7},\quad\dfrac{5}{9},\quad\dfrac{7}{10},\quad\dfrac{5}{8};$

ii) $\sqrt{100+69}$, $\sqrt{100}\times\sqrt{9}$, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}$, $(\sqrt{100})^{-6}$.

Correction

i) ppcm(7; 9; 10; 8) =ppcm$(7;3^2;2\times5;2^3)=2^3\times3^2\times5\times7=2520$ et on a

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times(5\times8\times9)}{2520}=\frac{1440}{250},\quad \frac{5}{9}=\frac{5\times(5\times7\times8)}{2520}=\frac{1400}{250},\quad \frac{7}{10}=\frac{7\times(7\times4\times9)}{2520}=\frac{1764}{250},\quad \frac{5}{8}=\frac{5\times(5\times7\times9)}{2520}=\frac{1575}{250},$$

donc $\frac{5}{9}<\frac{4}{7}<\frac{5}{8}<\frac{7}{10}$.

ii) $\sqrt{100+69}=\sqrt{169}=13$, $\sqrt{100}\times\sqrt{9}=10\times3=30$, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}=\frac{10}{\sqrt{6}}$, $(\sqrt{100})^{-6}=\frac{1}{10^6}$, donc

$$(\sqrt{100})^{-6}<\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}<\sqrt{100+69}<\sqrt{100}\times\sqrt{9}.$$

Exercice A.4

Soit $x\in\mathbb{R}$. On donne $A=2x$, $B=4x^2-1$. Calculer les expressions suivantes en fonction de x :

$$C=2Bx-A,\qquad D=2Cx-B,\qquad E=2Dx-C.$$

Correction

$$\begin{aligned}
C&=2x(4x^2-1)-(2x)=4x(2x^2-1),\\
D&=2x(4x(2x^2-1))-(4x^2-1)=(4x^2-2x-1)(4x^2+2x-1),\\
E&=2x(4x^2-2x-1)(4x^2+2x-1)-(4x(2x^2-1))=2x(2x-1)(2x+1)(4x^2-3).
\end{aligned}$$

Exercice A.5

Écrire sous forme d'une seule fraction irréductible la fraction $\dfrac{\left(\frac{x}{2}+4x\right)}{\left(\frac{3x+2}{4-4x}x\right)}$.

Correction

$$\frac{\frac{x}{2}+4x}{\frac{3x+2}{4-4x}x}=\frac{\frac{1+8}{2}x}{\frac{(3x+2)x}{4(1-x)}}=\frac{9x}{2}\frac{4(1-x)}{(3x+2)x}=\frac{18(1-x)}{3x+2}$$

Exercice A.6

Soit $n\in\mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

1. $\dfrac{n^2-1}{9}-\dfrac{n+1}{6}$,
2. $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4}+4\dfrac{n+1}{3}$,
3. $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{(n+1)^2}{4}$,
4. $\dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}-4\dfrac{(n+1)^2}{9}$,
5. $-\dfrac{1}{n(n-1)}\left[\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$.

Correction

1. $\dfrac{n^2-1}{9}-\dfrac{n+1}{6}=\dfrac{(n+1)(2n-5)}{18}$,
2. $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4}+4\dfrac{n+1}{3}=\dfrac{(3n+10)(n+1)}{12}$,
3. $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{(n+1)^2}{4}=\dfrac{n^2-1}{12}$,
4. $\dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}-4\dfrac{(n+1)^2}{9}=\dfrac{(n+1)(n-2)}{18}$,
5. $-\dfrac{1}{n(n-1)}\left[\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=-\dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.

Exercice A.7 (Brevet Rennes 1999)

On donne les deux nombres $p = 2\sqrt{45}$ et $q = \sqrt{80}$.

1. Calculer $p+q$. On donnera le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, où b est un entier le plus petit possible.
2. Calculer pq.
3. Le nombre p est-il solution de l'équation $x^2 - 2x - 180 = -12\sqrt{5}$?

Correction

$p = 2\sqrt{3^2\times 5} = 6\sqrt{5}$, $q = \sqrt{2^4\times 5} = 4\sqrt{5}$.

1. $p+q = (6+4)\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.
2. $pq = 24\times 5 = 120$.
3. $p^2 - 2p - 180 = 36\times 5 - 12\sqrt{5} - 180 = -12\sqrt{5}$.

Exercice A.8

Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\sqrt{x^2} = 1$
2. $(\sqrt{x})^2 = 1$
3. $\dfrac{30}{75} = \dfrac{20}{x}$
4. $\dfrac{4}{x+5} = \dfrac{5}{x-23}$
5. $\dfrac{6x}{x+14} = \dfrac{6}{8}$
6. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11} = \dfrac{4}{3/8}$
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{8} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
8. $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2-(3+2x))(3-4)$
9. $35x + 3(18-26x+4^2) = 70-3x$

Correction

1. $x^2 \ge 0$ donc $x = \pm 1$
2. $x \ge 0$ donc $x = 1$
3. $x \neq 0$ et $x = 20\times\dfrac{75}{30} = 50$
4. $x \neq -5$, $x \neq 23$ et $4(x-23) = 5(x+5)$ donc $x = -117$
5. $x \neq -14$ et $8\times(6x) = 6\times(x+14)$ donc $x = 2$
6. $(55x-38) = \dfrac{4}{3/8}\times\dfrac{11}{4}$ d'où $55x = \dfrac{88}{3} + 38$ donc $x = \dfrac{88+3\times 38}{3\times 55} = \dfrac{202}{165}$
7. $x \ge 0$ et $\sqrt{x}\times\sqrt{x} = 4\times 8$ d'où $x = 32$
8. $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2-(3+2x))(3-4) \iff -12+3x = \frac{x}{2} + (2-3-2x) \iff -12+3x = \frac{x}{2} - 1 - 2x \iff 3x - \frac{x}{2} + 2x = -1+12 \iff \frac{10-1}{2}x = 11 \iff x = \frac{22}{9}$
9. $35x + 3(18-26x+4^2) = 70-3x \iff 35x + 54 - 78x + 48 = 70 - 3x \iff 32 = 40x \iff x = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$

Exercice A.9

Deux frères se partagent 500€ de sorte à ce que le double de ce que prend le premier est égale aux 2/3 de ce que prend le deuxième. Combien prend chaque frère ?

Correction

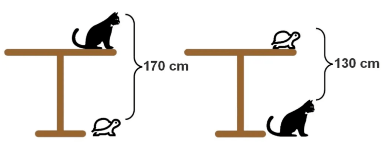
On a le système

$$\begin{cases} x+y = 500,\\ 2x = 2/3y. \end{cases}$$

D'après la deuxième équation on $3x = y$ donc $x + 3x = 500$: $x = 125$€ et $y = 375$€.

Exercice A.10

Énigme : arriverez-vous à déterminer la hauteur de cette table ? Et le poids de tous les animaux ?



Sources : https://www.science-et-vie.com/questions-reponses/enigme-arriverez-vous-a-determiner-la-hauteur-de-cette-table-66912 et https://mathematicsart.com/solved-exercises/solution-find-the-weight-of-all-animals/

Correction
Pour mettre en équations le schéma, on notera C la hauteur du chat, T la hauteur de la table et t la hauteur de la tortue. On a alors le système

$$\begin{cases} C+T-t=170,\\ t+T-C=130.\end{cases}$$

On a trois inconnues et 2 équations : le système est sous-déterminé. Cependant, il est possible de calculer T. En effet, si on somme les deux équations on obtient $2T=300$ d'où $T=150$.
Pour mettre en équations le deuxième problème, on notera C le poids du chat, M celui de la sourie et D celui du chien. On a alors le système

$$\begin{cases} C+M=10,\\ D+M=20,\\ C+D=24.\end{cases}$$

On a trois inconnues et 3 équations linéaires. On remarque que $(C+M)+(D+M)+(C+D)=2(C+D+M)$ donc $2(C+D+M)=10+20+24=54$ et finalement $C+D+M=27$.

A.2. Puissances

Rappels :

$$A^xA^y=A^{x+y}\qquad (A^x)^y=A^{xy}\qquad A^{-x}=\frac{1}{A^x}$$

Exercice A.11
Soit $n=10^{45}$, calculer $-\dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Correction
-10^{-30}

Exercice A.12
Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$a)\ (2^2)^2\qquad b)\ 2^{(2^2)}\qquad c)\ (2^2)^3\qquad d)\ 2^{(2^3)}\qquad e)\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}\qquad f)\ \dfrac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}},\qquad g)\ \dfrac{x\sqrt{32}}{\sqrt{4x}}.$

Correction

$$a)(2^2)^2=4^2=16\qquad b)2^{2^2}=2^4=16\qquad c)(2^2)^3=4^3=64$$
$$d)2^{2^3}=2^8=256\qquad e)\left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}=3^{2\frac{x}{2}-x}=3^0=1\qquad f)\frac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}=\frac{1}{a^8}\qquad g)\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

Exercice A.13
Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{3^n}{3^{3n}},\qquad B=\frac{(2^{2n+1})^2}{2^{2n-1}},\qquad C=4^n-2^{2n-1},\qquad D=\frac{1}{(-1)^{2n+1}}+(-1)^{2n-2}.$$

Correction
$A=9^{-n},\qquad B=2^{2n+3},\qquad C=2^{2n-1},\qquad D=0.$

Exercice A.14

Calculer, factoriser ou simplifier :

1. $(e^3)^6$
2. e^3e^6
3. e^3+e^6
4. $e^{-6}e^8$
5. 2^44^7
6. 2^4e^5

Correction

1. e^{18}
2. e^9
3. $e^3(1+e^3)$
4. e^2
5. 2^{18}
6. $(2e)^4e$

Exercice A.15

Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A=1\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^5}\qquad B=(\sqrt[6]{3})^3\qquad C=\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2}\qquad D=\frac{(x^2)^n}{x^{n+1}}\qquad E=\frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F=(x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2}\qquad G=\sqrt{2^{2^{(2n+1)}}}\qquad H=(2^{2n})^{(2n)^{2^n}}\qquad I=\frac{2\times\left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Correction

$$A=2^{1/3}\times2^{5/3}=2^2\qquad B=3^{3/6}=3^{1/2}=\sqrt{3}\qquad C=3^{1/5}\times3^{2/3}\times3^{2/15}=3\qquad D=x^{n-1}\qquad E=x^{3n-2}$$

$$F=x^{n-4}\qquad G=2^{2^{2n}}=2^{4^n}\qquad H(4^n)^{(2n)^{2^n}}\qquad I=2\frac{16^{n2^n}}{4^{2^n}8^{n^2}}$$

Exercice A.16

Soit n un entier naturel et soit a et u deux réels. Mettre sous la forme a^pu^q le réel $u_n=a\left(a^{2^{n+1}}u^{2^n}\right)^2$ (attention, les exposants ne sont pas $2n+1$ et $2n$ mais 2^{n+1} et 2^n).

Correction
$p=1+2^{n+2}$ et $q=2^{n+1}$

A.3. Problèmes

Exercice A.17

1. Un nénuphar vit paisible dans sa mare et double de taille tous les jours. Au 50ème jour de son existence, il a déjà recouvert la moitié de sa mare, combien de temps va-t-il mettre pour recouvrir la totalité de la mare ?
2. André gagne 1500 € net par mois. Il en déduit un tiers pour son loyer, 10 € par jour pour les repas, 60 € pour ses frais de transport et une centaine d'euros pour des frais divers. Quel est le montant qui reste à la disposition d'André ? (Compter 30 jours par mois).
3. Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing ?
4. Une bouteille et son bouchon coûtent 11 €. Sachant que la bouteille coûte 10 € de plus que le bouchon, combien coûte la bouteille ?
5. Si une bonbonne pleine de lait pèse 25 kg et que la même bonbonne à moitié pleine (ou à moitié vide selon votre conception de la vie. . .) pèse 13 kg, combien pèse la bonbonne vide ?
6. Un pack «raquette + balle» coûte 1.10 €. Vous avez déjà une raquette et vous ne voulez acheter que la balle. Le vendeur ne se souvient plus du prix de la balle, mais il dit : «Je me souviens que la raquette coûte un euro de plus que la balle». Combien coûte la balle seule ?
7. Paul et Marie ont acheté des pommes. Si Paul donne 5 de ses pommes à Marie, elle aura autant de pommes que lui. Si Marie donne 5 de ses pommes à Paul, il aura 5 fois plus de pommes qu'elle. Combien de pommes Paul et Marie ont-ils acheté ensemble ?
8. Dans un panier de fruits, 1/7 de tous les fruits sont des ananas, 3/8 des pamplemousses et 2/5 des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?
9. Mes 4 perroquets bleus mangent 4 kg de graines en 4 jours. Mes 5 perroquets verts mangent 5 kg de graines en

5 jours. Mes 8 perroquets oranges mangent 8 kg de graines en 8 jours. Quels sont les perroquets qui ont le plus d'appétit ?

10. En soustrayant le carré d'un nombre au carré du nombre qui le précède, on obtient 37. Quel est ce nombre ?
11. Un tramway arrive à l'arrêt prévu avec un certain nombre de passagers et repart avec 1/5 de plus. À l'arrêt suivant, 1/8 des passagers descendent et 42 restent. Combien de passagers y avait-il avant ces deux derniers arrêts ?

Correction

1. 1 jour.
2. $1500€ - \frac{1500}{3}€ - 30 \times 10€ - 60€ - 100€ = 540€$
3. Soit p le poids (en kilo) d'un parpaing. On a alors $p = 1 + \frac{p}{2}$, ce qui donne $p = 2$.
   Si on ne veut pas utiliser les équations, considérons une balance à deux plateaux; si on pose un parpaing sur le plateau de gauche et sur le plateau de droite un kilo et la moitié d'un parpaing, on est à l'équilibre. Maintenant, si on enlève des deux plateaux la moitié d'un parpaing, on est toujours à l'équilibre : sur le plateau de gauche il reste la moitié d'un parpaing et sur ceux de droite 1 kilo. On conclut que la moitié d'un parpaing pèse 1 kilo et donc qu'un parpaing pèse 2 kilo.
4. 10.50 € et le bouchon coûte 0.50 €.
5. Soit L le poids du lait contenu dans la bonbonne lorsqu'elle est pleine et T le poids de la bonbonne vide, on a
   $$\begin{cases} L + T = 25, \\ \frac{L}{2} + T = 13, \end{cases}$$
   ainsi $T = 1\,\text{kg}$.
6. Soit r le prix de la raquette et b le prix de la balle, on a
   $$\begin{cases} r + b = 1.10, \\ r = b + 1, \end{cases}$$
   ainsi $b = 0.05€$.
7. Soit p le nombre de pommes de Paul et m le nombre de pommes de Marie. Alors $\begin{cases} p - 5 = m + 5, \\ 5(m-5) = p + 5 \end{cases}$ ainsi $p = 20$ et $m = 10$.
8. Soit F le nombre total de fruits, A le nombre d'ananas, P le nombre de pamplemousses et N le nombre de nectarines. Alors
   $$\begin{cases} A = \frac{1}{7}F, \\ P = \frac{3}{8}F, \\ N = \frac{2}{5}F, \\ 23 = F - A - P - N, \end{cases}$$
   ainsi $F = 280$ donc $A = 40$.
9. 4 perroquets bleus mangent 1 kg de graines en 1 jour donc 1 perroquet bleu mange 0.25 kg de graines en 1 jour. De la même manière on trouve qu'1 perroquet vert mange 0.20 kg de graines en 1 jour et 1 perroquet orange mange 0.125 kg de graines en 1 jour, donc les perroquets bleu ont le plus d'appétit.
10. Soit $n = 37$ et x le nombre inconnu. On a $x^2 - (x-1)^2 = n$, *i.e.* $2x = n + 1$ ainsi $x = 38/2 = 19$.
11. Si on note par x le nombre de passagers avant ces deux derniers arrêts, on a $\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{8}\right)x = 42$ ainsi $\frac{6}{5}\frac{7}{8}x = 42$ et finalement $x = 42\frac{5}{6}\frac{8}{7} = 40$.

Exercice A.18 (Pourcentages)

1. D'une manière générale, le groupe sanguin AB est le plus rare et représente 4% de la population humaine. Le rhésus négatif, lui aussi, est assez rare (15% de la population uniquement). Si la population totale de la planète est de 6 milliards de personnes, combien sont de type AB- ?
2. 64% des élèves d'une classe sont des garçons et 25% parmi ces garçons apprennent l'allemand. Quel est le pourcentage des garçons qui font de l'allemand dans la classe ?
3. Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% de votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

4. Un commercial touche une commission de 15% sur les ventes qu'il réalise au cours d'un mois. Si pour le mois d'avril le commercial a touché 1400 € de commission, quel est le montant des ventes qu'il a perçu en avril ?
5. Le prix du blé dans un certain pays est indexé sur l'inflation. Au 1er janvier 1990, le blé coûtait 140 dollars la tonne. L'inflation de 1990 était de 3%. Par contre, en 1991, le pays a connu une déflation de 1.5%. Combien coûtait une tonne de blé au 1er janvier 1992 ?
6. La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?
7. Pendant la période des soldes, Éva trouve un pull marqué 59 € sur un stand avec une pancarte «−40%». Elle aime beaucoup le pull, mais il y a une petite tâche qu'Éva compte éliminer elle-même. La vendeuse lui propose une réduction supplémentaire de 10% sur le prix de caisse. Combien Éva payera-t-elle pour le pull ?
8. Un certain dessert coûte 12 € TTC. Avec la baisse de TVA sur la restauration, de 19.6% à 5.5%, quel sera le nouveau prix de ce dessert ?
9. Antoine place 1000 € sur son Livret A. Quel montant recevra-t-il au bout de deux ans si le taux en vigueur pour le Livret A est maintenu au niveau de 1.2% ?
10. Un capital a été placé dans une banque à un taux annuel de 4.5%. Les intérêts accumulés à la fin de l'année s'élèveront à 126 €. Quel est le montant initialement placé ?
11. Un artisan installe des fenêtres dans les habitations. Si un particulier achète uniquement une fenêtre sans installation, le taux de TVA applicable est de 19.6%. Si un particulier achète une fenêtre et commande son installation auprès du même artisan, le taux de TVA applicable au produit et au service est de 5.5%. Si le prix HT d'une fenêtre est 600 € et le prix HT de l'installation est de 150 €, quelle est la différence de prix des deux options pour le particulier ?
12. Sur 1.4 million d'iPhone vendu depuis juin, environ 250 000 ont été débloqué grâce à des logiciels pirates. Quel pourcentage représente cela ? (Arrondir à 1% près).
13. Le service de restauration dans un avion propose un plat au choix : soit de l'agneau, soit du poulet. 42% des passagers ont commandé l'agneau, 36% ont commandé le poulet, et les autres 55 passagers n'ont pas pris de plat chaud. Combien y a-t-il de passagers à bord de l'avion ?
14. Un couple achète un panneau photovoltaïque au prix de 1674.40 € TTC. Le gouvernement octroie un crédit d'impôt applicable à ce type d'installation à hauteur de 40% du prix HT. Si le taux de TVA en vigueur applicable aux panneaux photovoltaïques est de 19.6%, quel est le montant du crédit d'impôt dont bénéficiera le couple ?
15. Pendant les soldes un magasin donne une remise de 30%. Le prix non-soldé d'une veste est de 70 € ; quel est son prix soldé ? Le prix soldé d'une chemise est de 21 € ; quel est son prix non-soldé ?
16. Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?
17. Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?
18. Un prix subit les variations annuelles suivantes : +25%, −5%, +10%, −10%, −8%, +20%. À combien s'élève la variation annuelle moyenne ?
19. En Irlande, le prix d'un certain livre est 12.5 € HT ou 13.1 € TTC. Quel est le taux de la taxe sur la valeur ajoutée applicable aux livres en Irlande ?

Correction

1. $(6\times 10^9)\times 4\%\times 15\% = 36\times 10^6$
2. Ce sont 16% car $25\%\times 64\% = 0.25\times 0.64 = 0.16$.
3. Le premier candidat a obtenu 60% de votes, le deuxième 30%, ainsi $100\% - 60\% - 30\% = 10\%$ d'électeurs se sont abstenus, c'est-à-dire $71\times 10\% = 7$ personnes.
4. $\dfrac{1400€}{15\%} = 9333.33€$
5. $140\times(1+3\%)\times(1-1.5\%) = 142{,}04\$$
6. $82\,200\,000\times(1-0.3\%)^2 = 81\,707\,540$
7. Les deux réductions ne sont pas à additionner, car la deuxième ne s'applique qu'au prix «après la première réduction» (prix de caisse) : $59€\times(1-40\%)\times(1-10\%) = 31.86€$.
8. $12€\times\dfrac{1+5.5\%}{1+19.6\%} = 10.58€$

9. Notons bien qu'il s'agit des intérêts composés sur deux ans : $1000€ \times (1+1.2\%)^2 = 1024.14€$. Notons que dans le cas des intérêts simples (non composés), le montant final du placement aurait été 1024 € (les intérêts égaux à $1000€ \times 1.2\% = 12€$ gagnés au cours de chaque année).
10. $\frac{126€}{4.5\%} = 2800€$
11. Le prix de l'option 1 (fenêtre seule) : $600€ \times (1+19.6\%) = 717.60€$. Le prix de l'option 2 (fenêtre et installation) : $(600€+150€) \times (1+5.5\%) = 791.25€$. La différence est donc $791.25€ - 717.60€ = 73.65€$.
12. $\dfrac{250\,000}{1\,400\,000} = \dfrac{25}{140} = \dfrac{5}{28} \approx 0.18 = 18\%$
13. $55 = \dfrac{100-42-36}{100}x$ ainsi $x = 250$
14. Le prix HT d'un panneau photovoltaïque est de $1674.40€ \times (1-19.6\%) = 1346.22€$. Le crédit d'impôt égale 40% de cette somme : $1346.22€ \times 40\% = 560€$, autrement dit le panneau photovoltaïque leur revient à $1674.40€ - 560€ = 1114.40€$.
15. On paye 70% du prix non-soldé : prix soldé = $0.7\times$ prix non-soldé. Veste : pris soldé = $0.7 \times 70€ = 49€$. Chemise : prix non-soldé = $21€/0.7 = 30€$.
16. Augmenter le prix de 25% revient à le multiplier par 1.25 ou encore par 5/4. Donc, pour revenir au prix initial on le multiplie par 4/5 ou encore par 0.8 ; autrement dit, on fait une baisse de 20%.
17. $(1+20\%) \times (1+50\%) = 1.2 \times 1.5 = 1.8 = 1+80\%$: l'augmentation globale est de 80%, indépendamment de l'ordre dans laquelle les deux augmentations ont été faites.
18. $(1+25\%) \times (1-5\%) \times (1+10\%) \times (1-10\%) \times (1-8\%) \times (1+20\%) = 1.25 \times 0.95 \times 1.10 \times 0.90 \times 0.92 \times 1.20 = 1.30$ ce qui correspond à une augmentation annuelle de 30%.
19. TVA$= \dfrac{13.1€}{12.5€} - 1 = 4.8\%$

Exercice A.19 (Les poissons — MathC2+)

Un grand aquarium contient 200 poissons. De ceux-ci, 99% sont des poissons rouges. On voudrait que ce pourcentage baisse à 98%. On décide donc de retirer des poissons rouges. Combien de poissons rouges doit-on enlever de l'aquarium ?

Correction

Si les poissons rouges représentent 99% de la population de l'aquarium, cela signifie que "les autres" correspondent, eux, à 1% : il y a donc 2 de ces "autres" poissons. Si on désire que les poissons rouges représentent maintenant 98% de la population, "les autres", toujours au nombre de deux, doivent maintenant représenter 2% de la population. Mais pour ce faire, on doit avoir un total de 100 poissons et il faut donc retirer de l'aquarium, pour que la représentation des poissons rouges passe de 99% à 98%, un total de 100 poissons rouges !

Exercice A.20 (Proportionnalité)

1. Pour tenir le feu dans la cheminée pendant 5 heures, il faut 3 kg de bois. Combien de kg de bois faut-il pour tenir le feu pendant 24 heures ?
2. Une voiture consomme 6 L d'essence pour 100 km. Combien de kilomètres peut-on parcourir avec un réservoir plein dont les dimensions sont $20\,\text{cm}\times30\,\text{cm}\times70\,\text{cm}$?
3. La distance entre New York et Los Angeles est 3950 km. Quelle sera cette distance sur une carte $1 \div 10\,000\,000$?
4. Une chambre a les dimensions 10 m par 15 m. Sur un plan de l'appartement, la longueur de la chambre est de 10 cm. Quelle sera sa largeur sur le plan, en cm ?
5. La longueur de l'équateur de la Terre est de 40 000 km. Sur un globe d'école, l'équateur mesure 80 cm. À quelle échelle le globe a-t-il été réalisé ?
6. Un épicier a compté par erreur un poids de 50 g au lieu d'un poids de 20 g dans une pesée qu'il a estimée à 375 g d'épices. Celles-ci coûtent 28 euro le kilo. Quelle somme a-t-il demandée en trop ?
7. Le litre de bon lait pèse 1.030 kg. On achète 15 litres de lait qui pèsent 15.375 kg. Montrer que le lait n'est pas pur. Quelle quantité d'eau y a été mélangée ?
8. Nina voudrait estimer la distance entre Paris et Berlin en consultant la carte dont l'échelle est indiquée comme 1 :5 000 000. Elle mesure la distance avec une règle et obtient 21 cm. Quelle est la distance entre Paris et Berlin ?
9. Plusieurs métaux fondus ensemble constituent un alliage. Pour diverse raisons (dureté, couleur…), les bijoux dits en or ne sont jamais faits uniquement d'or. Par exemple, un bijou en or jaune est un alliage composé d'or

pur, d'argent et de cuivre. Un bijou en or pesant 16 grammes contient 12 grammes d'or pur. En gardant la même proportion dans l'alliage, combien d'or pur contiendrait un bijou de 24 grammes?

Correction

1. $\dfrac{3\,\text{kg}}{5\,\text{h}} = \dfrac{x\text{kg}}{24\,\text{h}}$ donc $14.4\,\text{kg}$
2. $20\,\text{cm}\times 30\,\text{cm}\times 70\,\text{cm}=42\,000\,\text{cm}^3=42\,\text{L}$ et $\dfrac{6\,\text{L}}{100\,\text{km}} = \dfrac{42\,\text{L}}{x\text{km}}$ donc $x = 700\,\text{km}$
3. $\dfrac{1}{10\,000\,000} = \dfrac{x\text{km}}{3950\,\text{km}}$ donc $39.5\,\text{cm}$.
4. $\dfrac{10\,\text{cm}}{x\text{cm}} = \dfrac{15\,\text{m}}{10\,\text{cm}}$ donc $6.7\,\text{cm}$.
5. $\dfrac{80\,\text{cm}}{4\,000\,000\,000\,\text{cm}} = \dfrac{1}{x}$ donc le globe est à $1 \div 50\,000\,000$.
6. L'épicier a fait payer 30 g en trop et l'on a $\dfrac{1000\,\text{g}}{28\,€} = \dfrac{30\,\text{g}}{x€}$ donc il a fait payer 0.84 € en trop.
7. Si 1 L de bon lait pèse 1.030 kg alors 15 L de bon lait pèsent 15.45 kg : le lait n'est pas pur.
   1 L d'eau pèse 1.000 kg et 1 L de bon lait pèse 1.030 kg. Puisque 15 L de lait pèsent 15.375 kg, cela signifie que 5/6ème sont de bon lait et 1/6 d'eau. En effet, si on note a la fraction de bon lait et b la fraction d'eau du mélange, on a
   $$\begin{cases} 15.375\,\text{kg} = a \times 15 \times 1.030\,\text{kg} + b \times 15 \times 1.000\,\text{kg} \\ a + b = 1 \end{cases}$$
8. L'échelle «$1 \div 5\,000\,000$» indique que chaque centimètre sur la carte correspond à 5 000 000 cm sur le terrain, ce qui égale 50 000 m ou 50 km. La distance entre Paris et Berlin égale donc $21 \times 50\,\text{km} = 1050\,\text{km}$.
9. Un simple calcul de proportion nous permet de trouver la solution : $12 : 16 = x : 24$ donc ce bijou contient $x = 18$ grammes d'or pur. Par définition, les carats indiquent la masse d'or pur (en grammes) contenue dans 24 grammes d'alliage. Nous avons ainsi un bijou de 18 carats. Le carat indique le degré de pureté d'un métal précieux. Attention, le carat est aussi une unité de masse utilisée par les joailliers. Elle correspond à 0,2 grammes.

Exercice A.21

1. La Terre se déplace autour du Soleil à une vitesse d'environ 30 km/s. Quelle est la longueur de l'orbite que la Terre parcourt en un an?
2. Un hors-bord navigue le long d'une rivière et avance à 45 km/h lorsqu'il suit le courant et à 36 lorsqu'il le remonte. Hier, il transportait des touristes et mettait une heure et quart entre deux voyages. Jusqu'où cela les a-t-il menés?
3. Deux baigneurs se trouvant l'un à côté de l'autre entendent une explosion à la surface de l'eau à une certaine distance. L'un a la tête sous l'eau et entend l'explosion 3 secondes avant l'autre. En effet, la vitesse du son dans l'eau est de 1435 m/s alors qu'elle est de 334 m/s dans l'air. Quelle distance les sépare de l'explosion?
4. Deux gares, A et B, se trouvent à 350 Km l'une de l'autre. Un train part à midi de la gare A vers la gare B et circule à une vitesse constante de 100 Km/h. Un deuxième train, quittant la gare B à $13h45$, se dirige vers la gare A à la vitesse constante de 75 Km/k. À quelle heure les deux trains se croisent-ils?
5. Deux tuyaux versent de l'eau dans un réservoir. Il est rempli en ouvrant le premier pendant 2 heures et le second pendant 2 heures et 20 minutes, ou le premier pendant 3 heures et l'autre pendant 1 heure. Combien de temps faut-il à chaque tuyau pour remplir le réservoir?

Correction

1. Si l'on considère que l'année compte 365 jours, il y a $60 \times 60 \times 24 \times 365 = 31\,536\,000$ secondes en un an. La Terre parcourt 30 mètres chaque second, donc elle parcours $60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 30 = 946\,080\,000$ mètres par an.
2. Sachant que "temps = espace / vitesse", si on indique par x la distance parcourue en suivant le courant (et donc la même distance parcourue en remontant le courant), le temps totale vaut $x/45 + x/36 = 1.25$ heures. On a donc
   $$x = \frac{1.25}{\frac{1}{45}+\frac{1}{36}} = \frac{125}{100}\frac{5\times 6^2\times 9}{36+45} = \frac{5}{4}\frac{5\times 6^2\times 9}{9^2} = 25\text{ Km}$$
3. Soit t le temps que le son prend dans l'eau pour parcourir la distance. La distance parcourue vérifie la relation $1435t = 334(t+3)$, on trouve alors $t = \frac{334\times 3}{1435-334} \approx 0.91\,\text{s}$ et donc la distance parcourue vaut $1435t \approx 1305\,\text{m}$.

4. Soit t le temps (en heures) à partir de midi. Le premier train parcourt la distance $100t$, le deuxième train parcourt la distance $75(t-1.75)$. Lorsqu'ils se rencontrent on a $100t+75(t-1.75)=350$ ainsi $t=2.75$ heures, autrement dit 2 heures et 45 minutes après midi, ils se rencontrent donc à 14 : 45.

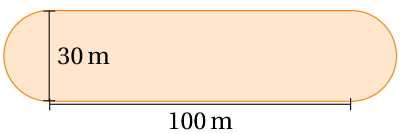
5. Notons x et y les litres versés par minute par les tuyaux et C la capacité du réservoir, le résultat est $120x+140y=C$ et $180x+60y=C$. Nous trouvons $C=300y=225x$ donc le premier prendra $300/60=5$ heures et le second $225/60=3.75$ heures ou $3h45$.

Exercice A.22 (Géométrie)

1. Le prix d'un carton est $5€\,\mathrm{m}^{-2}$. Vous achetez un rectangle de $120\,\mathrm{cm}\times 30\,\mathrm{cm}$. Combien ça coûte ?
2. La scène d'une salle de concert a la forme d'un demi-cercle. Sa longueur est de 16 m. Quelle est sa surface, en m^2 ?
3. La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?
4. Sur une piste d'athlétisme de 400 mètres, les lignes droites mesurent 84.39 m. Quel est le rayon des deux demi-cercles parcourus par un athlète dans le premier couloir ?
5. Dans un triangle ABC, rectangle en A, soit $\overline{AB}=8$ et $\overline{AC}=6$. Quel est son périmètre ? Et son aire ?
6. L'aire d'un carré égale a. Quelle est la longueur de sa diagonale ?
7. Une pyramide à base carrée a une hauteur de 9 cm. Si le volume de la pyramide égale $768\,\mathrm{cm}^3$, quelle est la longueur du côté de sa base ?
8. Il faut vider un chauffe-eau en forme de cylindre horizontal qui occupe un espace de $60\,\mathrm{cm}\times 60\,\mathrm{cm}\times 1\,\mathrm{m}$. Si le chauffe-eau a été vidé en 1.5 h, quel est le débit du tuyau d'évacuation en $\mathrm{L\,min}^{-1}$?
9. Le produit "pH-Moins granulés" sert à baisser le pH de l'eau des piscines. Il s'utilise lorsque le pH est supérieur à 7.4 : pour baisser de 0.1 le pH d'un mètre cube d'eau il faut y diluer 10 g de produit. Si on a une piscine circulaire autoportante de 2.44 m de diamètre et dont la hauteur de la ligne d'eau est de 50 cm et le pH est de 7.8, combien de produit doit-on ajouter ?
10. Donatello prépare 500 g de pâte à pain pour cuisiner deux pizzas. Il dispose pour les cuire de deux plaques circulaires, l'une de 15 cm de diamètre, l'autre de 30 cm. Comment doit-il répartir les 500 g de pâte ?
11. Dans la liste des ingrédients d'une recette de punch, il faut 5 citrons jaunes, mais le barman ne dispose que de citrons verts dont le diamètre est deux fois plus petit. Combien de citrons verts faut-il ?
12. Si nous versons entièrement une bouteille de vin de 75 centilitres dans un verre hémisphérique, nous le remplissons à ras bord. Quel est le rayon du verre ?
13. Un cylindre circulaire droit de rayon r et de hauteur h est inscrit dans un cône de hauteur H et de rayon R. Exprimer H en fonction de r, h et R.

Correction

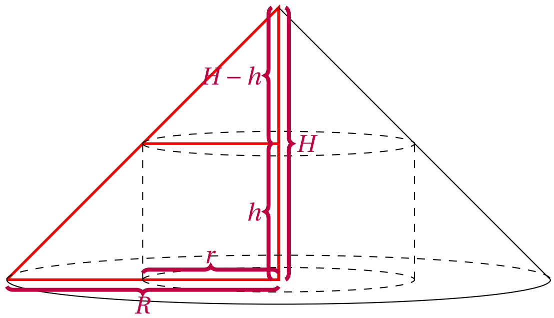
1. L'aire du carton est $1.2\,\mathrm{m}\times 0.3\,\mathrm{m}=0.36\,\mathrm{m}^2$. On payedonc $0.36\,\mathrm{m}^2\times 5€\,\mathrm{m}^{-2}=1.80€$.
2. La longueur de la scène correspond au diamètre du disque, donc $r=8\,\mathrm{m}$. L'aire du demi-disque sera égale à la moitié de l'aire du disque : $\pi r^2/2=32\pi$ *i.e.* environ $100.48\,\mathrm{m}^2$.
3.



La longueur de la piste est de $2\times 100\,\mathrm{m}+\pi\times 2\times 15\,\mathrm{m}\simeq 294.2\,\mathrm{m}$

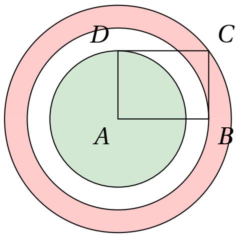
4. En éliminant les deux cotés droits, il reste une circonférence de $400-2\times 84.39=231.22$ mètres. Le rayon est donc $231.22/(2\pi)\approx 36.8$ mètres.
5. Périmètre : $8+6+\sqrt{8^2+6^2}=8+6+10=24$. Aire : $8\times 6=48$
6. Notons d la diagonale recherchée. L'aire d'un carré égale le carré de son côté. Si l'aire du carré égale a, son côté égale $\sqrt{a}$. La diagonale du carré forme, avec deux de ses côtés, un triangle rectangle dont elle est l'hypoténuse. on peut ainsi calculer sa longueur. Selon le théorème de Pythagore, on obtient $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{a})^2=d^2$ donc $d=\sqrt{2a}$.
7. Le volume d'une pyramide est calculé selon la formule $V=Ah/3$ où A est l'aire de sa base et h sa hauteur. On a alors $768=9A/3$ d'où $A=256\,\mathrm{cm}^2$. Comme la base de cette pyramide est un carré, son coté égale la racine carrée de son aire : $\sqrt{256\,\mathrm{cm}^2}=16\,\mathrm{cm}$.

8. Les dimensions présentées vous donnent les mesures du cylindre : 60 cm de diamètre et 1 m de hauteur. Convertissons les dimensions en décimètres afin de faciliter le calcul en litres : 6 dm et 10 dm. Le volume du cylindre est $V = \pi R^2 h$ où R est le rayon du fond et h est la hauteur. Ici, le volume égale $V = \pi R^2 h = 90\pi\,\text{L} \approx 282.6\,\text{L}$. Le débit du tuyau est alors $\frac{V}{t} = \frac{90\pi\text{L}}{1.5\text{h}} \approx 188.4\,\text{L}\,\text{h}^{-1} = 3.14\,\text{L}\,\text{min}^{-1}$.
9. Le volume d'eau contenu dans la piscine est d'environ $\pi\left(\frac{2.44}{2}\right)^2 \times 0.50 \simeq 2.33$ mètres cubes. Pour baisser le pH de ce volume d'eau de 0.4 points il faut alors y diluer $2.33 \times 10 \times 4 = 93.2$ grammes de produit.
10. Soit r le rayon de la plaque plus petite et $R = 2r$ le rayon de l'autre plaque. La surface de la plaque plus petite vaut $s = \pi r^2$, celle de la plaque plus grande $S = \pi R^2 = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 = 4s$: il faut répartir $1/5$ de pâte sur la plaque la plus petite et les restants $4/5$ sur la plaque la plus grande.
11. Soit j le rayon d'un citron jaune et $v = j/2$ le rayon d'un citron vert. Le volume d'un citron vert vaut $V = \frac{4}{3}\pi v^3$, celui d'un citron jaune $J = \frac{4}{3}\pi j^3 = \frac{4}{3}\pi(2v)^3 = 8\left(\frac{4}{3}\pi v^3\right) = 8V$: 5 citrons jaunes correspondent à $8 \times 5 = 40$ citrons verts.
12. $75\,\text{cl} = 750\,\text{cm}^3$. On a $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 750\,\text{cm}^3$ d'où $R \approx 7.1$ cm.
13. D'après le théorème de THALÈS : $\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$ donc $H = \frac{hR}{R-r}$.



Exercice A.23

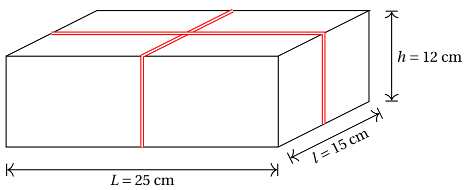
Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



Correction
On a $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$ donc l'aire de la couronne vaut $\pi((\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2) - \overline{AB}^2) = \pi\overline{AD}^2$. L'aire du disque vaut $\pi\overline{AD}^2$. On en conclut donc que les deux aires sont égales.

Exercice A.24

On veut faire un paquet cadeau (voir dessin). On donne $L = 25$ cm, $l = 15$ cm, $h = 12$ cm. Calculer la longueur de la ficelle nécessaire sans les nœuds.



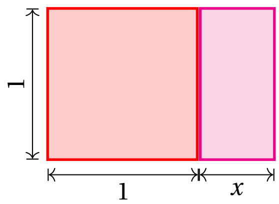
Correction
$2L + 2l + 4h = 128$ cm

Exercice A.25 (L'architecte — MathC2+)

Un architecte a dessiné les plans d'un bâtiment rectangulaire destiné aux mathématiciens toulonnais. Ils ont demandé à l'architecte à ce que le bâtiment respecte la condition suivante : si on lui retire le plus grand carré à l'une de ses extrémités (soit un carré de côté la largeur du bâtiment), le rectangle restant a exactement les mêmes proportions que le bâtiment entier. La condition fixée par les mathématiciens est-elle réalisable ?

Correction

$$\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x} \iff x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$



Exercice A.26

Une voiture parcourt un circuit circulaire et, tous les deux tours, la roue extérieure parcourt 25 mètres de plus que la roue intérieure. Quelle distance sépare les deux roues ?

Correction

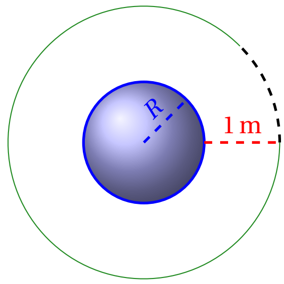
La roue intérieure parcourt 2 tours donc $2\times 2\pi r$ (r étant la distance de la roue intérieure du centre du circuit). La roue extérieure parcourt aussi 2 tours donc $2\times 2\pi R$ (r étant la distance de la roue extérieure du centre du circuit). On a $2\times 2\pi R = 25+2\times 2\pi r$ ainsi $2\times 2\pi(R-r)=25$ et au final $R-r=\frac{25}{4\pi}\approx 2$ mètres.

Exercice A.27 (Le tour du monde — MathC2+)

Le rayon de la Terre est de 6400 km environ. On ceinture la planète avec une corde au niveau de l'équateur. Quelle longueur de corde faudrait-il ajouter à cette ceinture si on l'écartait d'un mètre de la surface de la Terre sur toute la circonférence ?
Même question pour une balle de tennis.

Correction

La longueur de la ficelle au début vaut $P=2\pi R$ (R étant le rayon de la Terre). La longueur de la ficelle allongée est $P+x=2\pi(R+1)$ ($R+1$ étant le rayon du cercle formé par cette ficelle allongée de x mètres). Soustrayons les deux équations membre à membre : $x=2\pi$. Il faudra ajouter 2π m de ficelle, c'est à dire 6.283 m environ. Et ceci serait vrai en remplaçant la Terre par le Soleil ou par un ballon. Étonnant, non ?

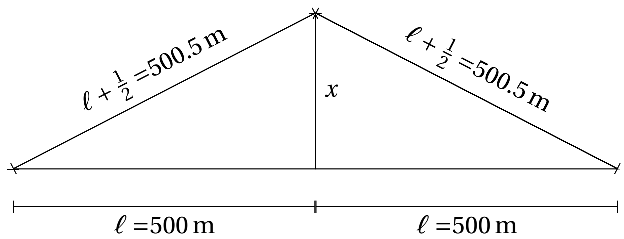


Exercice A.28 (Le rail — MathC2+)

Un rail de chemin de fer d'un kilomètre de long est posé au mois de décembre. En été la température s'élève et le rail se dilate d'un mètre mais comme il est solidement arrimé à chacune de ses extrémités, il se soulève en son centre. Quelle hauteur va atteindre le point central (est-ce de l'ordre du centimètre, de la dizaine de centimètres, du mètre, de la dizaine de mètres) ?

Correction

Il semble que x est très petit, mais ce n'est pas le cas.
Une technique d'approximation est la suivante. Dans le pire des cas, le rail se soulève pour former un triangle isocèle comme dans la figure :



$$\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2=\ell^2+x^2 \implies x^2=\ell+\frac{1}{4}.$$

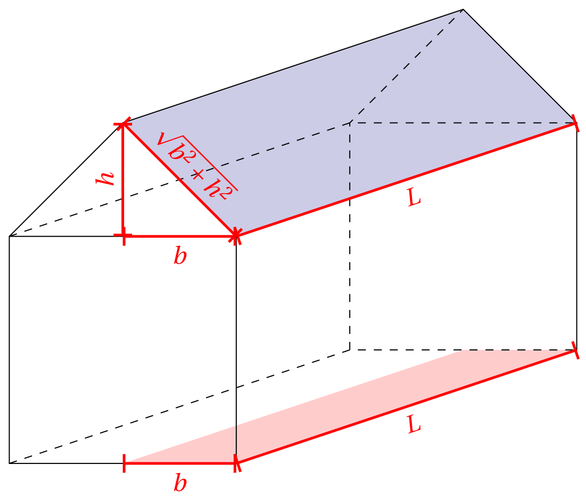
Si $\ell=500$ m alors $x=\sqrt{500.25}\simeq 22.36$ m.

Exercice A.29 (La tuile — MathC2+)

Dans le midi de la France les toitures doivent respecter une pente de 30%. Sur le plan d'une maison avec un toit à deux pans, la toiture occupe au sol un rectangle de 6×8 m^2. Quelle surface de tuiles faut-il acheter ?
Même question en montagne où la pente doit atteindre 60%.
On souhaite à présent couvrir un toit d'église en forme de cône avec de petites pièces en ardoise. Que se passerait-il si la pente devenait de plus en plus importante ?

Correction
Soit $h > 0$, $b > 0$, $L > 0$:

$$\text{Aire Projection} = 2Lb$$
$$\text{Aire Toit} = 2L\sqrt{b^2 + h^2}$$



La pente est définie comme une distance verticale (un dénivelé) divisée par la distance horizontale correspondante :[1]

$$\text{Pente (en \%)} = \frac{\text{Distance parcourue verticalement}}{\text{Distance parcourue horizontalement}}$$

Dans notre exemple on a une pente de 30%, ainsi $\dfrac{h}{b} = \dfrac{30}{100}$ et donc $h = \dfrac{30}{100}b$. La surface du toit vaut donc, en mètres carrés,

$$\begin{aligned}\text{Aire Toit} &= 2L\sqrt{b^2+h^2} = 2L\sqrt{b^2(1+(30\%)^2)}\\ &= 2Lb\sqrt{1+(30\%)^2} = \text{Aire Projection} \times \sqrt{1+(30\%)^2}\\ &= 48 \times \sqrt{1+\frac{9}{100}} = 4.8 \times \sqrt{109} \simeq 50\,\text{m}^2.\end{aligned}$$

Lorsque la pente est de 60%, on a

$$\text{Aire Toit} = \text{Aire Projection} \times \sqrt{1+(60\%)^2} = 48 \times \sqrt{1+\frac{9}{25}} = 9.6 \times \sqrt{34} \simeq 56\,\text{m}^2.$$

1. Dans le cas d'une pente à 100%, chaque mètre parcouru horizontalement correspond à une montée d'un mètre verticalement. S'il s'agit par exemple d'une route, l'angle entre la route et l'horizontale est alors de 45°, et non davantage comme on le croit parfois.

A.4. QCM d'auto-évaluation

CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- **Toutes les questions ont une et une seule bonne réponse.**
- **Lorsqu'une grille est proposée, la réponse est un entier qui doit être codé, exactement un chiffre par ligne. Par exemple, si la question est "5 − 30 =?" et on vous propose 3 lignes, il faudra cocher le signe −, puis 0 sur la ligne du chiffre des centaines, 2 sur la ligne du chiffre des dizaines et 5 sur la ligne du chiffre des unités :**

	■0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9	← chiffre des centaines (si absent, cocher 0)
□+	□0	□1	■2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9	← chiffre des dizaines (si absent, cocher 0)
■−	□0	□1	□2	□3	□4	■5	□6	□7	□8	□9	← chiffre des unités

Q. [`geometrie`] Un carré et un cercle ont le même périmètre. Lequel a l'aire la plus grande ?

■ Le cercle □ Le carré □ Ils ont la même aire

Solution : Soit r le rayon du cercle et ℓ le coté du carré. L'égalité des périmètres donne $4\ell = 2\pi r$ donc $\ell = \frac{\pi r}{2}$. Aire du carré $= \ell^2 = \frac{\pi^2}{4} r^2 = \frac{\pi}{4} \times$ Aire du cercle $< 1 \times$ Aire du cercle

Q. [`calculer11lin`] Le produit de deux nombres naturels est 640 et le quotient 10. Combien vaut la somme des deux ?

■+	□0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	■8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	■8	□9

Solution : Si $xy = 640$ et $x = 10y$ alors $10y^2 = 640$ donc $y = 8$ et $x = 80$

Q. [`calculer10lin`] La somme de deux nombres naturels est 104 et la différence 32. Combien vaut le plus grand des deux ?

■+	□0	□1	□2	□3	□4	□5	■6	□7	□8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	■8	□9

Solution : Si $\begin{cases} x+y=104 \\ x-y=32 \end{cases}$ alors $\begin{cases} 2x=136 \\ 2y=72 \end{cases}$ donc $x = 68$.

Q. [`linear1`] Si $\frac{a}{b} = ab = a+b$ alors $a-b=?$

□ $-\frac{3}{2}$ □ -1 □ $-\frac{1}{2}$ □ 0 □ $\frac{1}{2}$ □ 1 ■ $\frac{3}{2}$ □ Autre réponse :

Solution :

- L'existence de la fraction impose $b \neq 0$.
- $\frac{a}{b} = ab \implies a = ab^2 \implies a(b^2-1) = 0$. On doit alors considérer séparément le cas $a = 0$ et le cas $b^2 = 1$.
  - Si $a = 0$ alors $ab = a+b$ ssi $b = 0$, ce qui est impossible, donc $a \neq 0$.
  - Si $b = 1$ alors $\frac{a}{b} = a+b$ s'écrit $a = a+1$ qui n'a pas de solution.
  - Si $b = -1$ alors $\frac{a}{b} = a+b$ s'écrit $-a = a-1$ d'où $a = \frac{1}{2}$ et $a-b = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$.

Q. [`linear4`] Deux points distincts (a, b) et (b, c) appartiennent à la droite d'équation $y = -x+5$. Calculer $a-c$ en fonction de b.

□ -2 ■ 0 □ $2b$ □ 2 □ b^2 □ b □ $-2b$ □ Autre réponse :

CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

Solution : $\begin{cases} b = -a+5 \\ c = -b+5 \end{cases}$ donc $a = -b+5 = c-5+5 = c$

Q. [somme1] Que vaut $\sum_{i=1}^{4}(i+2)$?

■+	□0	■1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	■8	□9

Solution : $\sum_{i=1}^{4}(i+2) = \sum_{i=1}^{4}(i) + 4\times 2 = 1+2+3+4+8 = 18$

Q. [frac2] Si $2 > \frac{1}{a}$, alors

■ $a<0$ ou $a>\frac{1}{2}$ □ $a<0$ □ $a>\frac{1}{2}$ □ $0<a<\frac{1}{2}$ □ $4a>2$ □ Autre réponse :

Solution : On doit résoudre $\frac{1}{a}<2$.

- $a\neq 0$ pour l'existence de la fraction.
- Si $a<0$ l'inégalité, qui s'écrit $2a<1$, est satisfaite.
- Si $a>0$ l'inégalité s'écrit $2a>1$ d'où $a>\frac{1}{2}$.

Q. [factoriel2] On note $n!$ le produit $1\times 2\times 3\times\cdots\times n$. Que vaut $\frac{6!\times 7!}{10!}=$?

□ $\frac{1}{3}$ □ $\frac{1}{2}$ ■ 1 □ 2 □ $\frac{49}{10}$ □ Autre réponse :

Solution : $\frac{6!\times 7!}{10!} = \frac{6!\times 7!}{10\times 9\times 8\times (7!)} = \frac{6!}{10\times 9\times 8} = \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{10\times 9\times 8} = \frac{6\times 4\times 3}{9\times 8} = \frac{6\times 4}{3\times 8} = \frac{2\times 4}{8} = 1$

Q. [page162E] $10^{m+n}=$?

■ $10^m\times 10^n$ □ 10^m+10^n □ $(10^n)^m$ □ $(10^m)^n$ □ 0 si $m+n=0$

Q. [potenze0] $A = 2^{(8^2)}$ et $B = (2^8)^2$

■ $A>B$ □ $A=B$ □ $A<B$

Solution : Soit $a=8$ et $b=2$. $A = 2^{a^b} = 2^{64}$ et $B = (2^a)^b = 2^{ab} = 2^{16}$

Q. [potenze1] Si $9^a=25$, que vaut 3^a ?

□ 1 □ 2 □ 3 □ 4 ■ 5 □ Ça dépend de a

Solution : $25 = 9^a = (3^2)^a = (3^a)^2$ donc $5^2 = (3^a)^2$ d'où $5 = 3^a$

Q. [puissances4bis] Si $14^x=3$ alors $14^{2x+1}=$?

■ 126 □ 23 □ 27 □ 84 □ Ça dépend de x

Solution : $14^{2x+1} = 14^{2x}\times 14 = (14^x)^2\times 14 = 3^2\times 14 = 9\times 14 = (10-1)\times 14 = 140-14 = 126$

Q. [puissances5] Pour quelle valeur de x a-t-on $10^x\times 100^{2x} = 1\,000^5$?

■+										
□−	□0	□1	□2	■3	□4	□5	□6	□7	□8	□9

CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

Solution : $1\,000^5 = (10^3)^5 = 10^{15}$ et $10^x \times 100^{2x} = 10^x \times (10^2)^{2x} = 10^{5x}$ donc $15 = 5x$

Q. [racines4] $2^{-3} = ?$

☐ -16 ☐ -8 ☐ $-\frac{1}{8}$ ☐ $-\frac{1}{16}$ ☐ $\frac{1}{16}$ ■ $\frac{1}{8}$ ☐ 8 ☐ 16

Solution : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Q. [page162A] Si $0{,}987\,654\,321 - 0{,}987\,654\,320 = 10^a$ alors $a = ?$

☐+	■0	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	☐8	☐9
■−	☐0	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	☐8	■9

Solution : $0{,}987\,654\,321 - 0{,}987\,654\,320 = 0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$

Q. [frac10] Soit $A = \frac{2^8}{5^8}$ et $B = \frac{2^7}{5^7}$. Alors :

■ $A < B$ ☐ $A > B$ ☐ $A = B$

Solution : $\frac{A}{B} = \frac{2^8}{5^8}\frac{5^7}{2^7} = \frac{2}{5} < 1$ donc $A < B$

Q. [racines7] Trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt[2]{x} \times \sqrt[4]{x} \times \sqrt[6]{x} \times \sqrt[n]{x} = x$ pour tout $x > 0$.

■ 12 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 3 ☐ 8 ☐ Autre réponse :

Solution : $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{n}} = x$ pour tout $x > 0$ ssi $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{n} = 1$ ssi $\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{6+3+2}{12} = \frac{1}{12}$ ssi $n = 12$

Q. [racines5] $\sqrt{2}\sqrt{6}\sqrt{27} = ?$

■ 18 ☐ $3\sqrt{12}$ ☐ $3\sqrt{6}$ ☐ $\sqrt{35}$ ☐ Autre réponse :

Solution : $\sqrt{2}\sqrt{6}\sqrt{27} = \sqrt{2\times 6\times 27} = \sqrt{2\times 2\times 3\times 3^3} = \sqrt{2^2\times 3^4} = 2\times 3^2$

Q. [basic2] Trouver la valeur la plus proche de $\sqrt{96}+\sqrt{124}$.

☐ 19 ☐ 20 ■ 21 ☐ 22 ☐ 23

Solution :

$$\begin{aligned} 9 = \sqrt{81} \ll \sqrt{96} < \sqrt{100} = 10\\ 11 = \sqrt{121} < \sqrt{124} \ll \sqrt{144} = 12 \end{aligned} \qquad \text{donc} \qquad 20 \ll \sqrt{96}+\sqrt{124} \ll 22$$

Q. [calculer2bis] $\dfrac{11^4 - 9^4}{11^2 + 9^2} = ?$

■+	☐0	☐1	☐2	☐3	■4	☐5	☐6	☐7	☐8	☐9
☐−	■0	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	☐8	☐9

Solution : $\frac{11^4 - 9^4}{11^2 + 9^2} = \frac{(11^2-9^2)(11^2+9^2)}{11^2+9^2} = 11^2 - 9^2 = (11-9)(11+9) = 2\times 20 = 40$

Q. [racines29] $\left(\sqrt{12}+1\right)\left(\sqrt{12}-1\right) = ?$

☐ 1 ☐ $13 - 2\sqrt{12}$ ■ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ $13 + 2\sqrt{12}$ ☐ Autre réponse :

CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

Solution : $\left(\sqrt{12}+1\right)\left(\sqrt{12}-1\right)=\left(\sqrt{12}\right)^2-1^2=12-1=11$

Q. [calculerracines] $\left(\sqrt{60}+3\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{60}-3\sqrt{7}\right)^2=?$

	■0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
■+	■0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	■9

Solution : $\left(\sqrt{60}+3\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{60}-3\sqrt{7}\right)^2=\left(\left(\sqrt{60}+3\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{60}-3\sqrt{7}\right)\right)^2=\left(\left(\sqrt{60}\right)^2-\left(3\sqrt{7}\right)^2\right)^2=(60-9\times7)^2=(60-63)^2=(-3)^2=9$

Q. [pourcentage20] Soit $B=110\%\times90\%$. Alors :

■ $B<1$ □ $B=1$ □ $B>1$

Solution : $B=\frac{110}{100}\frac{90}{100}=\frac{99}{100}=99\%$

Q. [produit] Une quantité augmente de 30% puis diminue de 20%. Par combien a-t-elle été multipliée ?

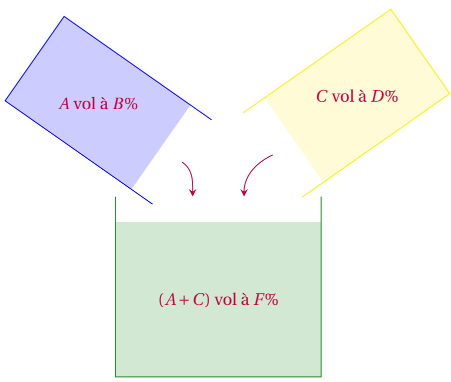
	□0	■1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
	.									
■+	■0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	■4	□5	□6	□7	□8	□9

Solution : $\left(1+\frac{30}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{13}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{104}{100}=(100+4)\%$ donc elle augmente de 4%.

Q. [dilu1] On dispose de 3 volumes d'une solution à 60% et de 2 volumes d'une solution à 20%. Quelle est la concentration du mélange de ces deux solutions ?

■ 44% □ 33% □ 37.5% □ 9.1% □ 40% □ 20% □ Autre réponse :

Solution : La solution à 60% contient $\frac{60}{100}\times3=\frac{9}{5}=1.8$ volumes de soluté. La solution à 20% contient $\frac{20}{100}\times2=\frac{2}{5}=0.4$ volumes de soluté. La solution finale contient $\frac{9}{5}+\frac{2}{5}=\frac{11}{5}=1.8+0.4=2.2$ volumes de soluté pour $3+2=5$ volumes de solution. Cela représente une concentration de $\frac{\frac{11}{5}}{5}=\frac{11}{25}=44\%$.



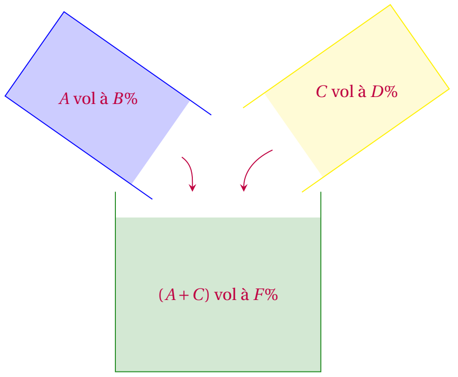
$$A\frac{B}{100}+C\frac{D}{100}=(A+C)\frac{F}{100}$$

Q. [dilu2] On dispose de 2 volumes d'une solution à 70%. Combien de volumes d'eau doit-on ajouter à cette solution pour obtenir une nouvelle solution à 50% ?

■ 0.8 □ 1.3 □ 0.57 □ 65% □ 20% □ Autre réponse :

CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

Solution : La solution à 70% contient $\frac{70}{100}\times 2=\frac{7}{5}$ volumes de soluté. La “solution” injectée est à 0% et donc contient $\frac{0}{100}\times x=0$ volumes de soluté. La solution finale contient $\frac{7}{5}+0=\frac{7}{5}$ volumes de soluté pour $2+x$ volumes de solution. Cela représente une concentration de $\frac{\frac{7}{5}}{2+x}$. Pour que cela soit égal à une concentration de 50% on doit calculer x tel que $\frac{\frac{7}{5}}{2+x}=\frac{50}{100}$ soit $x=\frac{4}{5}$ volumes d'eau.



$$A\frac{B}{100}+C\frac{D}{100}=(A+C)\frac{F}{100}$$

Q. [dilu3] Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

■ 0.6 à 40% avec 0.4 à 90% ☐ 0.4 à 40% avec 0.6 à 90% ☐ 0.25 à 40% avec 0.75 à 90%

Solution :

$$x\frac{40}{100}+y\frac{90}{100}=(x+y)\frac{60}{100}$$

On trouve $y=\frac{2}{3}x$. Si $x=3$ alors $y=2$, autrement dit $x=\frac{6}{10}$ et $y=\frac{4}{10}$.

Q. [equations1] Calculer $x\in\mathbb{R}$ solution de $\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}=0$.

☐ $x=-1$ ☐ $x=0$ ☐ $x=1$ ☐ $x=3$ ■ L'équation n'a pas de solution

Solution : Pour $x\neq\pm1$ (pour que l'équation soit définie), on a

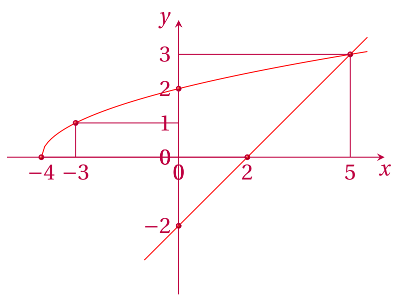
$$\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)+\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x+1}\neq 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

Q. [equations2] Calculer $x\in\mathbb{R}$ solution de $\sqrt{x+4}=x-2$.

☐ $x=0$ et $x=5$ ☐ $x=0$ ■ $x=5$ ☐ Aucune solution

Solution :

- Résolution “par élimination” : $\sqrt{0+4}=2$ et $0-2=-2$, $\sqrt{5+4}=3$ et $5-2=3$.
- Résolution graphique : on trace le graphe des deux fonctions



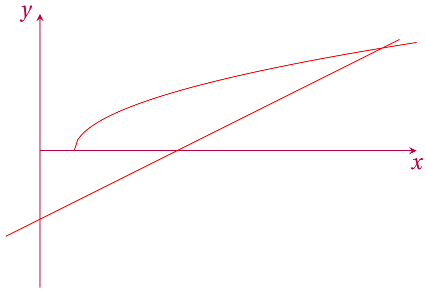
CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

- Résolution analytique : pour $x \geq -4$ on cherche x tel que $x-2 \geq 0$ et $x+4=(x-2)^2$ c'est-à-dire $0=x(x-5)$.

Q. [linear5] Combien de solution réelles a l'équation $x-4=2\sqrt{x-1}$?

☐0	■1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	☐8	☐9

Solution : Résolution graphique : on trace le graphe des deux fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x-2$ et $x \mapsto \sqrt{x-1}$ et on compte le nombre d'intersections (il n'est pas nécessaire de calculer la position de l'intersection) :



Q. [abs1] $\dfrac{|x|}{x}=?$

☐ Un nombre toujours positif

☐ Un nombre toujours négatif

☐ 0

■ Aucune des réponses n'est correcte

Solution : $|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0,\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$ donc $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{si } x>0,\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$

Q. [frac1bis] Soit $x \neq -2$ et $x \neq -9$. Calculer $\dfrac{A}{B}$ avec $A=\dfrac{x^2+11x+18}{x+2}$ et $B=\dfrac{x+9}{12}$.

■ 12 ☐ $\dfrac{1}{12}$ ☐ $x+2$ ☐ $x+9$ ☐ Autre réponse :

Solution : $A=\dfrac{(x+2)(x+9)}{x+2}=x+9$ donc $\dfrac{A}{B}=\dfrac{1}{12}$

Q. [equations20] Calculer $x \in \mathbb{R}$ solution de $\dfrac{x^3-21x^2+20x}{x-1}=-100$.

■+	☐0	■1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	☐8	☐9
☐−	■0	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	☐8	☐9

Solution : $\dfrac{x^3-21x^2+20x}{x-1}+100=\dfrac{x(x-1)(x-20)}{x-1}+100=x(x-20)+100=(x-10)^2$

Q. [polyn2] Calculer la somme des toutes les solutions de l'équation $x^2-36=3(x-6)^2$.

■+	☐0	■1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	☐8	☐9
☐−	☐0	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5	☐6	☐7	■8	☐9

Solution : Il n'est pas nécessaire de calculer les solutions. En effet, si x_1 et x_2 sont solution de $ax^2+bx+c=0$ alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)$ donc $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Nous avons $3(x-6)^2-(x^2-36)=3(x^2-12x+36)-(x^2-36)=2x^2-36x+4\times 36=2\left(x^2-18x+2\times 36\right)$ donc la somme vaut 18.

Q. [parabole21] Si $x=A+\sqrt{B}$ et $x=A-\sqrt{B}$ sont les deux solutions de $x^2+6x-1=0$, calculer $A+B=?$

CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

■+	■0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	■7	□8	□9

Solution : Soit on calcule explicitement : $x^2+6x-1=(x+3)^2-10$ mais aussi $x^2+6x-1=(x-(A+\sqrt{B}))(x-(A-\sqrt{B}))=((x-A)-\sqrt{B})((x-A)+\sqrt{B})=(x-A)^2-B$ donc $A=-3$ et $B=10$.

Soit on remarque que $-6=$ somme des racines $=2A$ donc $A=-3$ et que $-1=$ produit des racines $=A^2-B$ donc $B=-1-9=10$

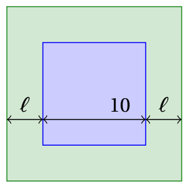
Q. [parabole2] Considérons un rectangle dont l'aire dépend de x selon la relation $2x^2+11x-21$. Si la longueur d'un coté vaut $x+7$, que vaut l'autre coté ?

■ $2x-3$ □ $2x+3$ □ $2x-7$ □ $2x+4$ □ Autre réponse :

Solution : -7 est racine de $2x^2+11x-21$. On cherche l'autre racine qu'on note a. Au lieu d'utiliser la formule utilisant le discriminant, on remarque que $2x^2+11x-21=2(x+7)(x-a)=2\left(x^2+(7-a)x-7a\right)$ donc $-14a=-21$ soit $a=\frac{3}{2}$

Q. [piscine]

La famille Dupont a un jardin carré de $400\,\mathrm{m}^2$ et veut faire construire en son centre une piscine carrée de 10 m sur 10 m en l'entourant par un patio de même largeur tout autour de la piscine. Que vaut la largeur ℓ du patio en mètres ?



■0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
□0	□1	□2	□3	□4	■5	□6	□7	□8	□9

Solution : $400=(10+2\ell)^2=100+4\ell^2+40\ell$ avec $\ell>0$. Donc $\ell^2+10\ell-75=0$ d'où $\ell=-5\pm\sqrt{5^2+75}=-5\pm\sqrt{100}=5$ ou -15

Q. [polyn1] $x^3-3x^2+4x-12=?$

■ $(x-3)(x^2+4)$ □ $(x+1)(x-3)(x-4)$ □ $(x-1)(x+3)(x+4)$ □ $(x+4)(x^2-3)$

Solution : On peut utiliser différentes stratégies. On peut par exemple développer chaque polynôme proposé. On peut sinon essayer de factoriser le polynôme assigné. Ou il suffit de vérifier si les racines de chaque factorisation sont effectivement racines du polynôme assigné :

- $1^3-3\times1^2+4\times1-12\neq0$ donc $x=1$ n'est pas racine du polynôme assigné (on doit donc éliminer la réponse $(x-1)(x+3)(x+4)$),
- $3^3-3\times3^2+4\times3-12=0$ donc $x=3$ est racine du polynôme (inutile car toutes les réponse contiennent cette racine)
- $(-1)^3-3\times(-1)^2+4\times(-1)-12\neq0$ donc $x=-1$ n'est pas racine du polynôme assigné (on doit donc éliminer la réponse $(x+1)(x-3)(x-4)$),
- $(-4)^3-3\times(-4)^2+4\times(-4)-12\neq0$ donc $x=-4$ n'est pas racine du polynôme assigné (on doit donc éliminer la réponse $(x+4)(x^2-3)$).

Q. [ln] L'ensemble de définition de la fonction $x\mapsto\ln(-x)$ est :

■ $]-\infty,0[$ □ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ □ $]-\infty,0]$ □ $]0,+\infty[$ □ $[0,+\infty[$

Q. [racine] L'ensemble de définition de la fonction $x\mapsto\sqrt{-x}$ est :

■ $]-\infty,0]$ □ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ □ $]-\infty,0[$ □ $]0,+\infty[$ □ $[0,+\infty[$

Q. [inverse] L'ensemble de définition de la fonction $x\mapsto-\dfrac{1}{x}$ est :

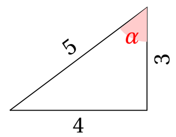
CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

□ $]-\infty,0]$ ■ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ □ $]-\infty,0[$ □ $]0,+\infty[$ □ $[0,+\infty[$

Q. [trigo5] $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=?$

■ $\frac{1}{2}$ □ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ □ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ □ 1 □ Autre réponse :

Q. [trigocos] Quelle est la valeur de $\cos(\alpha)$?



■ $\frac{3}{5}$ □ $\frac{4}{5}$ □ $\frac{3}{4}$ □ $\frac{4}{3}$ □ $\frac{5}{4}$ □ $\frac{5}{3}$ □ Autre réponse :

Solution : $\cos(\alpha)=\frac{3}{5}$, $\sin(\alpha)=\frac{4}{5}$, $\tan(\alpha)=\frac{3}{4}$

Q. [derivee1] Calculer $f'(x)$ si $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

■ $-\frac{2}{x^3}$ □ $\frac{2}{x^3}$ □ $\frac{2}{x}$ □ $\frac{3}{x}$ □ $\frac{3}{x^3}$ □ $-\frac{1}{2x^3}$ □ Autre réponse :

Solution : $f(x)=x^{-2}$ donc $f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Q. [compln] Calculer $f'(x)$ si $f(x)=\ln(2x)$.

■ $\frac{1}{x}$ □ $\frac{1}{2x}$ □ $\frac{2}{x}$ □ $2\ln(2x)$ □ $\ln(2)+\frac{1}{x}$ □ $\frac{\ln(2)}{x}$ □ $\frac{1}{2}\ln(2x)$

Solution : $f(x)=g(h(x))$ avec $g(t)=\ln(t)$ et $h(x)=2x$. On a $f'(x)=g'(h(x))\times h'(x)=\frac{1}{h(x)}\times 2=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$.

Q. [suiteA] Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=4$. Que vaut v_{10} ?

	■0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
■+	□0	□1	■2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	■4	□5	□6	□7	□8	□9

Solution : $v_{n+1}=v_0+(n+1)r=4+2(n+1)$

Q. [suiteG] Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0=\frac{1}{8}$. Que vaut v_{10} ?

	□0	■1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
■+	□0	□1	■2	□3	□4	□5	□6	□7	□8	□9
□−	□0	□1	□2	□3	□4	□5	□6	□7	■8	□9

Solution : $v_{n+1}=v_0q^{n+1}=2^{-3}\times 2^{(n+1)}=2^{n-2}$