Quelles connaissances vous reste-t-il des années précédentes sur les ondes électromagnétiques ?

1. L'antenne d'un téléphone portable émet des ondes électromagnétiques (O.E.M.) dans l'air. À quelle vitesse se propagent ces ondes ?

   Correction. — *Un milieu de propagation est caractérisé par son indice de réfraction n. Les O.E.M. qui se propagent en son sein se déplacent à la vitesse de phase v_ϕ telle que :*

   $$v_\phi = \frac{c_0}{n}$$

   où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide, de valeur $3 \cdot 10^8 \ m \cdot s^{-1}$. Ici, le milieu considéré est l'air dont l'indice de réfraction vaut l'unité. Donc, les O.E.M. émises par le téléphone portable se propagent à la vitesse $3 \cdot 10^8 \ m \cdot s^{-1}$.

2. Supposons que les O.E.M. se propagent dans un milieu dont l'indice de réfraction n est supérieur à celui de l'air. Ces ondes se propagent-elles plus vite ou moins vite que dans l'air ?

   Correction. — *Au vu de l'expression précédente, ces ondes ne peuvent que se propager à une* vitesse plus faible *que celle dans l'air.*

3. Quels sont les vecteurs qui caractérisent une O.E.M. ? Par une analyse aux unités, montrer la possibilité de définir deux nouvelles grandeurs.

   Correction. — *Une O.E.M. est principalement caractérisée par trois grandeurs vectorielles :*

— *le champ électrique instantané* $\vec{e}\,(\vec{r},t)$ *exprimé en* $V \cdot m^{-1}$ *;*

— *le champ magnétique instantané* $\vec{h}\,(\vec{r},t)$ *exprimé en* $A \cdot m^{-1}$ *;*

— *le vecteur de propagation* $\vec{k}$ *dont sa norme est le nombre d'onde* k *exprimé en* m^{-1}*, et est lié à la longueur d'onde E.M.* λ *par la relation :*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Le rapport de l'unité du champ électrique à celle du champ magnétique donne :

$$\frac{V \cdot \cancel{m^{-1}}}{A \cdot \cancel{m^{-1}}} = \frac{V}{A} \implies \Omega \quad (ohm)$$

On vient donc de montrer qu'une O.E.M. possède une impédance Z*, notée également dans la littérature* η*, définie comme le rapport du module du champ électrique à celui du champ magnétique :*

$$Z = \frac{||\vec{e}||}{||\vec{h}||}$$

qui dans l'air vaut :

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \mid \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H \cdot m^{-1}, \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}\ F \cdot m^1 \\ &= \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \times 36\pi \cdot 10^9} \\ &= \sqrt{4 \times 36 \times \pi^2 \times 10^2} \\ &\implies Z_0 = 120\,\pi\ \Omega \approx 377\ \Omega \end{aligned}$$

À présent, on effectue le produit des unités de ces deux champs vectoriels :

$$V \cdot m^{-1} \times A \cdot m^{-1} \implies W \cdot m^{-2}$$

autrement dit une « densité de puissance par unité de surface », ou encore une « densité d'énergie par unité de temps et par unité de surface » car l'énergie (Joule, J) est le produit entre la puissance (W) et le temps (s). Comme les grandeurs qui caractérisent l'O.E.M. sont vectorielles, l'opération mathématiques qui doit être effectuée entre ces *deux champs est un produit vectoriel, dont le résultat est le vecteur de Poynting noté dans ce cours $\vec{\pi}$:*

$$\vec{\pi} := \vec{e} \wedge \vec{h}$$

qui devient si le milieu de propagation est l'air :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{e} \wedge \vec{b}\right)$$

4. Que signifie l'acronyme T.E.M. ? Quelle est la conséquence sur les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{h}$ et $\vec{k}$?

   Correction. *— L'acronyme T.E.M. signifie « Transverse ÉlectroMagnétique ». Une O.E.M. est dite T.E.M. si le champ électrique et le champ magnétique n'ont pas de composante dans la direction de propagation (généralement radiale) ; autrement dit en champ lointain ($kr \gg 1$) on a : $e_r = h_r = 0$. Dans ce cas, on dit que l'onde est localement plane et les deux champs de vecteurs sont alors transverses à la direction de propagation. Ainsi, ces trois vecteurs forment un trièdre direct pris dans l'ordre $\left(\vec{e}, \vec{h}, \vec{k}\right)$ ou toute autre permutation circulaire, par exemple (p. ex.) $\left(\vec{h}, \vec{k}, \vec{e}\right)$ ou encore $\left(\vec{k}, \vec{e}, \vec{h}\right)$.*

5. Dans le repère à coordonnées sphériques représenté en figure 1, donner la relation de l'élément d'aire $\mathrm{d}\Sigma$ situé à la surface de la sphère. En déduire le rapport $\mathrm{d}\Sigma/r^2$ et que représente-t-il ? Évaluer donc l'intégrale :

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\Sigma/r^2$$

   Correction. *— L'élément de surface $\mathrm{d}\Sigma$ est donné par la relation :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} &= r\mathrm{d}\theta\,\hat{e}_\theta \wedge r\sin\theta\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_\phi \\ &= r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_r \\ &\implies \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \mathrm{d}\Sigma\,\hat{e}_r \mid \mathrm{d}\Sigma = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

   La quantité $\mathrm{d}\Sigma/r^2 = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ représente l'élément d'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ sous lequel est vu la sphère. L'intégrale de ce dernier donne, *sur toute la sphère :*

$$\begin{aligned}
\Omega &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \cdot \cos\theta \Big|_{\pi}^{0} \\
&= 2\pi \cdot \big[1-(-1)\big] \\
&\implies \boxed{\Omega = 4\pi \ sr}
\end{aligned}$$

où sr est le « stéradian », unité de l'angle solide.

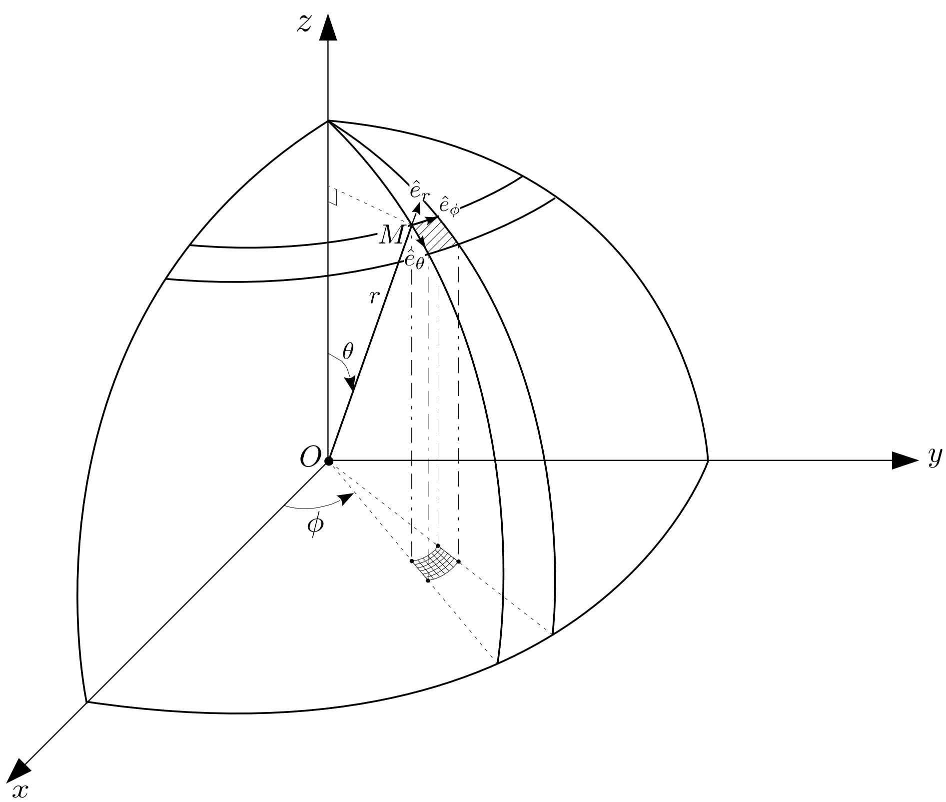

FIGURE 1 – Repère à coordonnées sphériques.

6. En vous appuyant sur la figure 1, déterminer les produits vectoriels suivants :

   (a) $\hat{e}_\phi \wedge \hat{e}_\theta$;

   Correction. *— Comme les vecteurs unitaires $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ et $\hat{e}_\phi$ du repère à coordonnées sphériques forment un trièdre direct, il vient :*

   $$\boxed{\hat{e}_\phi \wedge \hat{e}_\theta = -\hat{e}_r}$$

   (b) $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\phi$;

   Correction. *— On a :*

   $$\boxed{\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\phi = -\hat{e}_\theta}$$

   (c) $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_i$ avec $\hat{e}_i \mid i = 1, 2, 3$ les vecteurs unitaires portés respectivement par les segments $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$.

   Correction. *— On rappelle qu'il est possible d'écrire les vecteurs unitaires du repère sphérique en fonction des vecteurs unitaires du repère cartésien sous la forme matricielle suivante :*

   $$\boxed{\begin{pmatrix}\hat{e}_r\\ \hat{e}_\theta\\ \hat{e}_\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\\ \hat{e}_3\end{pmatrix} = [A]\cdot\begin{pmatrix}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\\ \hat{e}_3\end{pmatrix}}$$

   où l'on montre que $[A]^{-1} = {}^t[A]$.

   > Remarque. — *Le lecteur peut constater que pour passer de la première ligne à la deuxième ligne il suffit d'appliquer le changement suivant $\theta \to \theta + \pi/2$. Et, le passage de la deuxième ligne à la troisième ligne s'opère en posant $\theta = 0$ et $\phi \to \phi + \pi/2$.*

   Cette propriété sur la matrice $[A]$ permet donc d'écrire :

   $$\boxed{\begin{pmatrix}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\\ \hat{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{e}_r\\ \hat{e}_\theta\\ \hat{e}_\phi\end{pmatrix}}$$

En utilisant ces relations, les produits vectoriels demandés sont :

$$\hat{e}_r \wedge \hat{e}_1 = \hat{e}_r \wedge (\sin\theta \cos\phi \, \hat{e}_r + \cos\theta \cos\phi \, \hat{e}_\theta - \sin\phi \, \hat{e}_\phi)$$
$$\Longrightarrow \boxed{\hat{e}_r \wedge \hat{e}_1 = \sin\phi \, \hat{e}_\theta + \cos\theta \cos\phi \, \hat{e}_\phi}$$

$$\hat{e}_r \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_r \wedge (\sin\theta \sin\phi \, \hat{e}_r + \cos\theta \sin\phi \, \hat{e}_\theta - \cos\phi \, \hat{e}_\phi)$$
$$\Longrightarrow \boxed{\hat{e}_r \wedge \hat{e}_2 = -\cos\phi \, \hat{e}_\theta + \cos\theta \sin\phi \, \hat{e}_\phi}$$

$$\hat{e}_r \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_r \wedge (\cos\theta \, \hat{e}_r - \sin\theta \, \hat{e}_\theta)$$
$$\Longrightarrow \boxed{\hat{e}_r \wedge \hat{e}_3 = -\sin\theta \, \hat{e}_\phi}$$

7. Écrire le phaseur (ou amplitude complexe) associé au champ électrique instantané suivant :

$$\vec{e}\,(z,t) = e_0 \cos(\omega t - kz)\, \hat{e}_1$$

Précisez le sens de propagation et l'orientation de ce champ électrique. Qu'en est-il de la polarisation de ce dernier ?

Correction. — *Le phaseur est :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{E}} = e_0 \, e^{-\mathrm{i}kz} \, \hat{e}_1}$$

Pour retrouver l'expression du champ électrique instantané, il suffit de multiplier le phaseur par $e^{\mathrm{i}\omega t}$ *et de prendre la partie réelle :*

$$\boxed{\vec{e}\,(z,t) = Re\Big(\overrightarrow{\mathscr{E}}\, e^{\mathrm{i}\omega t}\Big)}$$

REMARQUE. — ***Dans toute la suite de ce cours, on prendra la convention en régime harmonique*** $e^{\mathrm{i}\omega t}$.

L'expression de la phase instantanée de $\vec{e}$ *étant* $\omega t - kz = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$*, ce champ électrique se propage suivant le vecteur unitaire* $\hat{e}_3$ *porté par l'axe* $[Oz)$*. Par ailleurs, le vecteur unitaire* $\hat{e}_1$ *indique l'orientation du champ électrique. Enfin, le champ électrique* $\vec{e}$ *étant orienté suivant le vecteur unitaire* $\hat{e}_1$*, la polarisation est donc rectiligne.*

8. Rappeler les quatre équations de Maxwell en régime harmonique (donc avec les phaseurs) dans le vide, sous leurs formes différentielles. En déduire une relation simple entre champ vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{B}}$ et potentiel vecteur $\overrightarrow{\mathscr{A}}$; puis une autre relation entre champ vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, potentiel vecteur $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ et potentiel scalaire $\mathscr{V}$. Exploiter l'ensemble de ces résultats pour déterminer l'équation de propagation du potentiel vecteur $\overrightarrow{\mathscr{A}}$.

Correction. — *Les quatre équations de Maxwell en régime harmonique dans le vide sont :*

M.F.	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\mathscr{E}} = -\mathrm{i}\omega\overrightarrow{\mathscr{B}}$
M.A.	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\mathscr{B}} = \mu_0\overrightarrow{\mathscr{J}} + \mathrm{i}\omega\underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{=c_0^{-2}}\overrightarrow{\mathscr{E}}$
M.G.	$div\,\overrightarrow{\mathscr{E}} = \underline{\rho}/\varepsilon_0$
M.T.	$div\,\overrightarrow{\mathscr{B}} = 0$

Remarque. — *Pour des raisons d'écriture, le phaseur de la densité de charge volumique est noté $\underline{\rho}$.*

Un champ vectoriel solénoïdal vérifie la relation $div\,\vec{u} = 0$ et dérive d'un potentiel vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{rot}\,\vec{v}$. Ainsi, la relation de M.T. (Maxwell Thomson) *permet de dire que le champ d'induction magnétique dérive d'un potentiel vecteur noté $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ tel que :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{B}} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\mathscr{A}}} \tag{1}$$

Substituant ce résultat dans M.F. (Maxwell Faraday) *et regroupant tous les termes à gauche de l'égalité et dans le même rotationnel, il vient :*

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{\mathscr{E}} + \mathrm{i}\omega\overrightarrow{\mathscr{A}}\right) = \vec{0}$$

impliquant que le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathscr{E}} + \mathrm{i}\omega\overrightarrow{\mathscr{A}}$ est alors irrotationnel. Or, un champ de vecteur est irrotationnel s'il dérive d'un potentiel *vecteur, soit dans le cas de l'électromagnétisme :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{E}} = -\overrightarrow{grad}\,\mathscr{V} - \mathrm{i}\omega\overrightarrow{\mathscr{A}}} \tag{2}$$

Ces potentiels n'étant pas définis de façon unique, ils doivent vérifier la « condition de jauge de Lorenz » :

$$\boxed{div\,\overrightarrow{\mathscr{A}} + \mathrm{i}\omega\frac{1}{c_0^2}\mathscr{V} = 0} \tag{3}$$

À présent, en injectant (1) et (2) dans l'expression de M.A. *et en exploitant (3), on a :*

$$\underbrace{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\mathscr{A}}\right)}_{=\cancel{\overrightarrow{grad}}\left(\underbrace{div\,\overrightarrow{\mathscr{A}}}_{=\cancel{-\mathrm{i}\omega c_0^{-2}\mathscr{V}}}\right)-\Delta\overrightarrow{\mathscr{A}}} = \mu_0\overrightarrow{\mathscr{J}} - \mathrm{i}\omega\frac{1}{c_0^2}\left(\cancel{\overrightarrow{grad}\,\mathscr{V}} + \mathrm{i}\omega\overrightarrow{\mathscr{A}}\right)$$

Ainsi, l'équation de propagation du potentiel vecteur $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ *est :*

$$\boxed{\left(\Delta + k^2\right)\overrightarrow{\mathscr{A}} = -\mu_0\overrightarrow{\mathscr{J}} \mid k = \frac{\omega}{c_0}}$$

dont l'expression du potentiel vecteur $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ *est :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\overrightarrow{\mathscr{J}}(r')\,\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\mathrm{d}v'}$$

avec R *la différence des distances entre le point d'observation* (r) *et la position des sources* (r').

9. On considère le dipôle électrostatique représenté en figure 2 en faisant l'hypothèse $r \gg d$. Déterminer au point M :

   (a) le potentiel électrique $V(M)$;

> `Conseil. — Exploiter le développement limité usuel en 0 de la fonction suivante :`
>
> $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \cdots$$

Correction. — *Le potentiel créé au point M s'obtient par la somme des potentiels créés par chacune des charges :*

$$\begin{aligned} V(M) &= V_{q_1}(M) + V_{q_2}(M) \\ &= \alpha\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right) \mid \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \\ &= \alpha\, q\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Pour déterminer les distances r_1 et r_2, nous exploitons le théorème d'Al-Kashi[1]*. Pour la première distance, il vient :*

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - \cancel{2}\frac{d}{\cancel{2}} r\cos\theta \\ &= r^2\left(1-\frac{d\cos\theta}{r}+\left(\frac{d}{2r}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Quant à la seconde distance, on a :

$$\begin{aligned} r_2^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - \cancel{2}\frac{d}{\cancel{2}} r\cos(\pi-\theta) \\ &= r^2\left(1+\frac{d\cos\theta}{r}+\left(\frac{d}{2r}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Le passage à la racine carrée et l'utilisation du résultat $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - x/2 + \cdots$ donnent, en ne conservant que les termes d'ordre 1 en d/r pour (5) et (6) :

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{d\cos\theta}{2r}\right) \quad \textit{et} \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{d\cos\theta}{2r}\right) \tag{7}$$

Substituant (7) dans (4), on obtient :

$$V(M) = \alpha q \frac{1}{r}\left(\cancel{1}+\frac{d\cos\theta}{2r}\cancel{-1}+\frac{d\cos\theta}{2r}\right)$$

soit après avoir remplacé la constante α :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qd\cos\theta}{r^2}}$$

1. Ce théorème généralise le théorème de Pythagore au cas des triangles non rectangles, définis dans un espace euclidien.

REMARQUE. — *L'expression du potentiel V peut également s'écrire avec le moment dipolaire $\vec{p}$ qui, rappelons le, est orienté dans le sens de la charge négative vers la charge positive tel que $\vec{p} = qd\,\hat{e}_3$. Comme $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$, le produit scalaire entre $\vec{p}$ et $\vec{r}$ est, en utilisant la matrice de passage :*

$$\begin{aligned} \vec{p}\cdot\vec{r} &= qdr\,\hat{e}_3\cdot\hat{e}_r \\ &= qdr\,(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta)\cdot\hat{e}_r \\ &\implies \vec{p}\cdot\vec{r} = qdr\cos\theta \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}$$

Enfin, le lecteur peut constater que le potentiel est indépendant de l'angle ϕ. Ce résultat n'est pas sans surprise car la structure est à symétrie de révolution.

(b) le champ électrostatique $\vec{e}(M)$.

CONSEIL. — Utiliser l'expression du gradient d'un champ scalaire en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = f_{,r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}f_{,\theta}\,\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,f_{,\phi}\,\hat{e}_\phi$$

Correction. *— On sait que le champ électrique dérive du potentiel scalaire, soit $\vec{e} = -\overrightarrow{grad}V$. De ce fait, on se focalise uniquement sur le calcul du $\overrightarrow{grad}f \mid f(r,\theta) = \cos\theta/r^2$ en exploitant le point conseil :*

$$\overrightarrow{grad}f = -2\cos\theta\,r^{-3}\,\hat{e}_r - \frac{1}{r^3}\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

Conclusion, l'expression du champ électrique du dipôle électrostatique est :

$$\boxed{\vec{e}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, qd\, \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}}$$

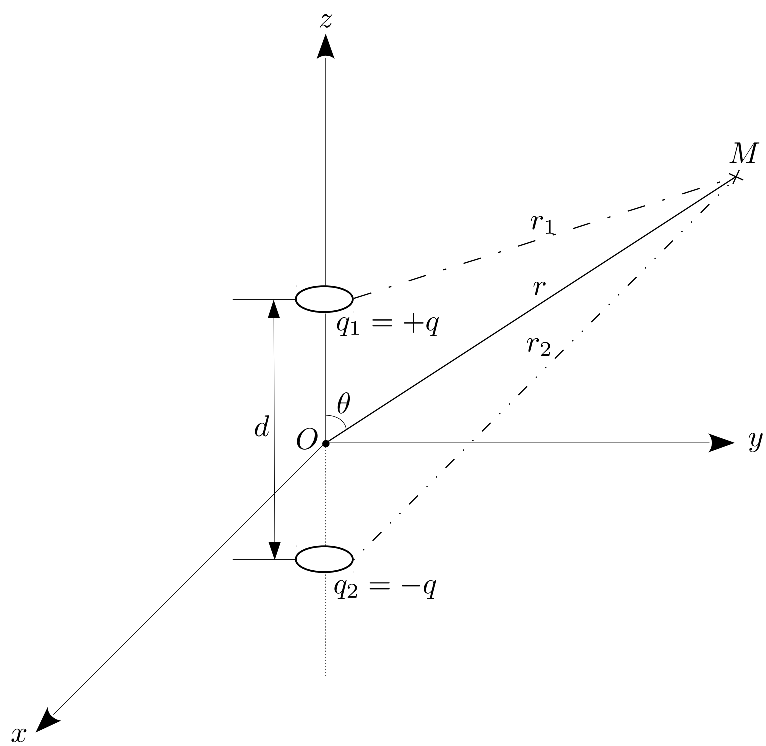

Figure 2 – Dipôle électrostatique.