L1 SV — 1 juillet 2021 — CT session 2 : Durée : 2h

- **Une feuille A4 recto-verso manuscrite et calculatrices autorisées, tout autre document interdit.**
- Toutes les questions ont une et une seule bonne réponse. **Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.**
- **Barème** : 10 bonnes réponses et aucune mauvaise réponse suffisent pour valider.
- Utiliser un stylo noir ou bleu et bien noircir les cases (ne pas utiliser de crayon !). En cas d'erreur, effacer votre réponse (avec du blanc correcteur/Tipp-Ex/Blanco) et **ne pas redessiner la case**.

Cochez les quatre dernières chiffres de votre numéro d'étudiant (par exemple, si votre numéro est 2200**2681**, on cochera 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième etc.) :

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Si une réponse se répète plusieurs fois (ou s'il n'y a pas de bonne réponse), écrire ici le numéro de la question :

....
....
....
....

Q. [instruction] **Instructions.**

1. Ne pas écrire votre nom sur ces feuilles ! Pour pouvoir identifier votre copie, cocher les quatre dernières chiffres de votre numéro étudiant dans la grille ci-dessus.
2. Pour pouvoir reconnaître votre copie en cas de problème avec le numéro d'étudiant, retranscrire le numéro 1 (qui correspond à ce sujet) sur la copie double dans l'**emplacement "UFR"**. Vous utiliserez la copie double comme feuille de brouillon mais **vous la rendrez avec le QCM !**

En cas de non respect de ces consignes : -1pt. ■-0.5 pt ■-1 pt

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Problème** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Soit $b \in \mathbb{R}^*$ un paramètre non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{b-3x}$$

Q. [epidemielimplus] Que vaut $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

■ $-\frac{1}{3}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{b}$ ☐ $-\frac{1}{b}$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ Autre

Q. [epidemielimmoins] Que vaut $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

■ $-\frac{1}{3}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{b}$ ☐ $-\frac{1}{b}$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ Autre

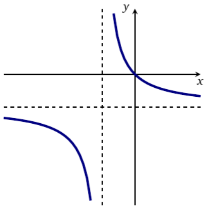
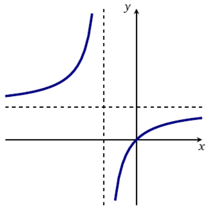
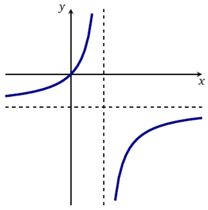
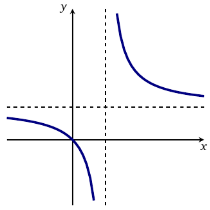
Q. [epidemieder] Que vaut $f'(0)$?

■ $\frac{1}{b}$ ☐ $-\frac{1}{b}$ ☐ $-\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $-\frac{6}{b^2}$ ☐ $\frac{6}{b^2}$ ☐ 0 ☐ Autre

Q. [epidemieder2] Que vaut $f''(0)$?

■ $\frac{6}{b^2}$ ☐ $-\frac{6}{b^2}$ ☐ $-\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $-\frac{1}{b}$ ☐ $\frac{1}{b}$ ☐ 0 ☐ Autre

Q. `[graphe]` Si b est négatif, le graphe de la courbe représentative de f est?

■  □  □  □ 

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Fin problème** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Problème** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{ax-4}$$

Q. `[epidemielimplusBIS]` Que vaut $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

■ $\frac{1}{a}$ □ 0 □ $-\frac{1}{4}$ □ $\frac{1}{4}$ □ $+\infty$ □ $-\infty$ □ $-\frac{1}{a}$ □ Autre

Q. `[epidemielimmoinsBIS]` Que vaut $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

■ $\frac{1}{a}$ □ 0 □ $-\frac{1}{4}$ □ $\frac{1}{4}$ □ $+\infty$ □ $-\infty$ □ $-\frac{1}{a}$ □ Autre

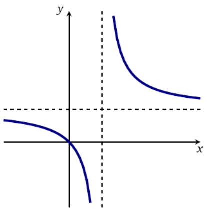
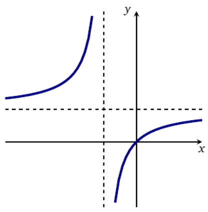
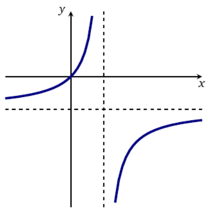
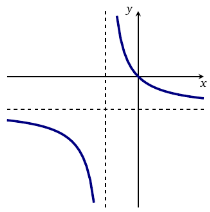
Q. `[epidemiederBIS]` Que vaut $f'(0)$?

■ $-\frac{1}{4}$ □ $\frac{1}{4}$ □ $\frac{1}{a}$ □ $-\frac{1}{a}$ □ $\frac{a}{8}$ □ $-\frac{a}{8}$ □ 0 □ Autre

Q. `[epidemieder2BIS]` Que vaut $f''(0)$?

■ $-\frac{a}{8}$ □ $\frac{a}{8}$ □ $\frac{1}{a}$ □ $-\frac{1}{a}$ □ $\frac{1}{4}$ □ $-\frac{1}{4}$ □ 0 □ Autre

Q. `[grapheBIS]` Si a est positif, le graphe de la courbe représentative de f est?

■  □  □  □ 

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Fin problème** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Problème** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Soit $d \in \mathbb{R}^*$ un paramètre non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln(d + 5x)$$

Q. [epidemielimplusTER] Que vaut $\lim_{x \to -\frac{d}{5}} f(x)$?

■ $-\infty$ ☐ 0 ☐ ∞ ☐ $-\frac{d}{5}$ ☐ $-\frac{5}{d}$ ☐ $-\frac{d-1}{5}$ ☐ $-\frac{5}{d-1}$ ☐ Autre

Q. [epidemielimmoinsTER] Que vaut $\lim_{x \to \infty} f(x)$?

■ ∞ ☐ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $-\frac{d}{5}$ ☐ $-\frac{5}{d}$ ☐ $-\frac{d-1}{5}$ ☐ $-\frac{5}{d-1}$ ☐ Autre

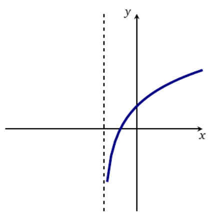
Q. [epidemiederTER] Que vaut $f'(-\frac{d-1}{5})$?

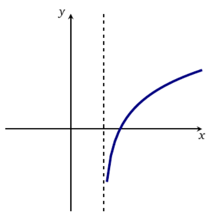
■ 5 ☐ -5 ☐ 1 ☐ $-\frac{d}{5}$ ☐ $-\frac{d-1}{5}$ ☐ -25 ☐ 0 ☐ Autre

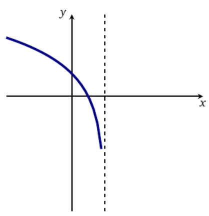
Q. [epidemieder2TER] Que vaut $f''(-\frac{d-1}{5})$?

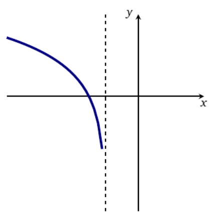
■ -25 ☐ -5 ☐ 1 ☐ $-\frac{d}{5}$ ☐ $-\frac{d-1}{5}$ ☐ 5 ☐ 0 ☐ Autre

Q. [grapheTER] Si d est positif, le graphe de la courbe représentative de f est?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Fin problème** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Q. [sol] $\sqrt{8}$ est solution de l'équation

■ $x^2 - 8 = 0$ ☐ $x^2 + 8 = 0$ ☐ $x^2 - 2\sqrt{2} = 0$ ☐ $2\sqrt{2}x + 8 = 0$ ☐ Aucune de ces équations

Q. [fraz1] Soit q une constante réelle non nulle. **Combien** de solutions réelles a l'équation $x = \frac{1}{x} + \frac{1}{q}$?

☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ Cela dépend de q ☐ Autre

Explication : $x \neq 0$ et

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{q} = x \iff x - \frac{1}{q} - \frac{1}{x} = 0 \iff x^2 - \frac{1}{q}x - 1 = 0.$$

Comme $\Delta = \frac{1}{q^2} + 4 > 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}^*$, il y a toujours deux solutions.

Q. [fraz2] Soit p une constante réelle non nulle. **Combien** de solutions réelles a l'équation $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{p}$?

☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ Cela dépend de p ☐ Autre

Explication : $x \neq 0$ et

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{p} = x \iff x + \frac{1}{p} - \frac{1}{x} = 0 \iff x^2 + \frac{1}{p}x - 1 = 0$$

Comme $\Delta = \frac{1}{p^2} + 4 > 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^*$, il y a toujours deux solutions.

Q. [fraz3] Soit q une constante réelle non nulle. **Combien** de solutions réelles a l'équation $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{q}$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ Cela dépend de q ☐ Autre

Explication : $x \neq 0$ et

$$x + \frac{1}{x} - \frac{1}{q} = 0 \iff x^2 - \frac{1}{q}x + 1 = 0.$$

$\Delta = \frac{1}{q^2} - 4$ dont le signe dépend de q.

Q. [fraz4] Soit p une constante réelle non nulle. **Combien** de solutions réelles a l'équation $x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{p}$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ Cela dépend de p ☐ Autre

Explication : $x \neq 0$ et

$$x + \frac{1}{x} + \frac{1}{p} = 0 \iff x^2 + \frac{1}{p}x + 1 = 0.$$

$\Delta = \frac{1}{p^2} - 4$ dont le signe dépend de p.

Q. [fraz5] Soit $q \geq 1$ une constante. **Combien** de solutions réelles a l'équation $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{q}$?

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ Cela dépend de q ☐ Autre

Explication : $x \neq 0$ et

$$x+\frac{1}{x}-\frac{1}{q}=0 \iff x^2-\frac{1}{q}x+1=0.$$

$\Delta=\frac{1}{q^2}-4<0$ pour tout $q \geq 1$ donc il n'existe aucune solution réelle.

Q. [fraz6] Soit $p \geq 1$ une constante. **Combien** de solutions réelles a l'équation $x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{p}$?

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ Cela dépend de p ☐ Autre

Explication : $x \neq 0$ et

$$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{p}=0 \iff x^2+\frac{1}{p}x+1=0.$$

$\Delta=\frac{1}{p^2}-4<0$ pour tout $p \geq 1$ donc il n'existe aucune solution réelle.

Q. [calculer1] Si $x+\frac{1}{x}=4$ alors $x^3+\frac{1}{x^3}=$?

■ 52 ☐ 64 ☐ 16 ☐ 48 ☐ 18 ☐ 54 ☐ Autre

Explication : Si $a=x+\frac{1}{x}$ alors $a^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3a$

Q. [calculer2] Si $x-\frac{1}{x}=3$ alors $x^3-\frac{1}{x^3}=$?

■ 36 ☐ 33 ☐ 38 ☐ 9 ☐ 11 ☐ 46 ☐ Autre

Explication : Si $a=x-\frac{1}{x}$ alors $a^3=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=x^3-3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}-3a$

Q. [calculer3] Si $\frac{1}{x}-x=4$ alors $\frac{1}{x^3}-x^3=$?

■ 76 ☐ 64 ☐ 72 ☐ 78 ☐ 16 ☐ 18 ☐ 86 ☐ Autre

Explication : Si $a=\frac{1}{x}-x$ alors $a^3=\left(\frac{1}{x}-x\right)^3=\frac{1}{x^3}-3\frac{1}{x^2}x+3\frac{1}{x}x^2-x^3=\frac{1}{x^3}-x^3-3\left(\frac{1}{x}-x\right)=\frac{1}{x^3}-x^3-3a$

Q. [calculer4] Si $x+\frac{1}{x}=2$ alors $x^2+\frac{1}{x^2}=?$

■ 2 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ Autre

Explication : Si $a=x+\frac{1}{x}$ alors $a^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

Q. [calculer5] Si $x-\frac{1}{x}=3$ alors $x^2+\frac{1}{x^2}=?$

■ 11 ☐ 3 ☐ 36 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ Autre

Explication : Si $a=x-\frac{1}{x}$ alors $a^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-2$

Q. [calculer6] Si $\frac{1}{x}-x=3$ alors $\frac{1}{x^2}+x^2=?$

■ 11 ☐ 3 ☐ 36 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ Autre

Explication : Si $a=\frac{1}{x}-x$ alors $a^2=\left(\frac{1}{x}-x\right)^2=\frac{1}{x^2}-2x\frac{1}{x}+x^2=\frac{1}{x^2}+x^2-2$

Q. [calculer7] Si $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$ alors $x+\frac{1}{x}=?$

■ 7 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 9 ☐ 17 ☐ 18 ☐ Autre

Explication : Si $a=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ alors $a^2=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}+2$

Q. [calculer8] Si $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=4$ alors $x+\frac{1}{x}=?$

■ 18 ☐ 32 ☐ 4 ☐ 28 ☐ 14 ☐ 16 ☐ Autre

Explication : Si $a=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ alors $a^2=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x-2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}-2$

Q. [pot1] $\frac{(17a)^b}{a^c}=$

■ $17^b a^{b-c}$ ☐ $(17a)^{bc}$ ☐ $17^b a^{-bc}$ ☐ $(17a)^{b/c}$ ☐ $(17a)^b-a^c$ ☐ Autre

Explication : $\frac{(17a)^b}{a^c}=17^b a^b a^{-c}$

Q. [pot2] $\dfrac{a^c}{(17a)^b} =$

■ $17^{-b}a^{c-b}$ ☐ $(17a)^{-bc}$ ☐ $17^{-b}a^{-bc}$ ☐ $(17a)^{c/b}$ ☐ $(17a)^b - a^c$ ☐ Autre

Explication : $\dfrac{a^c}{(17a)^b} = a^c 17^{-b} a^{-b}$

Q. [pot3] $\dfrac{(18a)^c}{a^b} =$

■ $18^c a^{c-b}$ ☐ $(18a)^{-bc}$ ☐ $18^b a^{-bc}$ ☐ $(18a)^{c/b}$ ☐ $(18a)^c - a^b$ ☐ Autre

Explication : $\dfrac{(18a)^c}{a^b} = 18^c a^c a^{-b}$

Q. [ln1] Si $a = e^{19}$ et $b = e^3$, que vaut $R = \ln\left(\dfrac{b^3}{a^3}\right)$?

■ -48 ☐ 0 ☐ 66 ☐ -16 ☐ 48 ☐ -12 ☐ Autre

Explication : $R = \ln\left(\dfrac{b^3}{a^3}\right) = 3\big(\ln(b) - \ln(a)\big) = 3\left(\ln(e^3) - \ln(e^{19})\right) = 3\,(3-19) = -48$

Q. [ln2] Si $a = e^{19}$ et $b = e^2$, que vaut $R = \ln\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)$?

■ 34 ☐ 0 ☐ 36 ☐ 42 ☐ 11 ☐ 17 ☐ Autre

Explication : $R = \ln\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right) = 2\big(\ln(a) - \ln(b)\big) = 2\left(\ln(e^{19}) - \ln(e^2)\right) = 2\,(19-2) = 34$

Q. [expon1] Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_*^+$. Que vaut x si

$$\exp\left(a\ln(2) + \ln(x^2)\right) = 2^{a+10}?$$

■ 32 ☐ a ☐ $a+10$ ☐ $5a$ ☐ 2 ☐ 34 ☐ 10 ☐ 27 ☐ Autre

Explication : On réécrit les deux termes:

$$2^{a+10} = 2^{10} \times 2^a$$

$$\exp\left(a\ln(2) + \ln(x^2)\right) = \exp\left(\ln(2^a) + \ln(x^2)\right) = \exp\left(\ln(2^a \times x^2)\right) = 2^a \times x^2$$

donc $2^{10} = x^2$

Q. [etudePoly0] **Combien** de racines réelles distinctes admet le polynôme $3x^8 + 48x^6$?

☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : Notons $p(x) = 3x^8 + 48x^6 = 3x^6\left(x^2 + 16\right)$ ainsi $p(x) = 0$ ssi $x = 0$.

Q. [etudePoly1] **Combien** de racines réelles distinctes admet le polynôme $3x^8 - 27x^6$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : Notons $p(x) = 3x^8 - 27x^6 = 3x^6(x^2 - 9) = 3x^6(x-3)(x+3)$ ainsi $p(x) = 0$ pour $x \in \{0, \pm 3\}$.

Q. [etudePoly2] **Combien** de racines réelles distinctes admet le polynôme $3x^7 + 18x^6 + 27x^5$?

☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : Notons $p(x) = 3x^7 + 18x^6 + 27x^5 = 3x^5(x^2 + 6x + 9) = 3x^5(x+3)^2$ ainsi $p(x) = 0$ pour $x \in \{0, -3\}$.

Q. [etudePoly3] **Combien** de racines réelles distinctes admet le polynôme $3x^8 - 18x^7 + 27x^6$?

☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : Notons $p(x) = 3x^8 - 18x^7 + 27x^6 = 3x^6(x^2 - 6x + 9) = 3x^6(x-3)^2$ ainsi $p(x) = 0$ pour $x \in \{0, 3\}$.

Q. [composition1] Soient $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = ax^2 + b$ et $h(x) = \dfrac{c}{x^2+1}$. Que vaut $f(h(0))$?

■ $\sqrt{c^2+1}$ ☐ $\dfrac{c}{b^2+1}$ ☐ $\sqrt{b^2+1}$ ☐ ac^2+b ☐ $\dfrac{c}{2}$ ☐ $a+b$ ☐ Autre

Explication : $f(h(0)) = \sqrt{c^2+1}$, $h(g(0)) = \frac{c}{b^2+1}$, $f(g(0)) = \sqrt{b^2+1}$, $g(h(0)) = ac^2 + b$, $h(f(0)) = \frac{c}{2}$, $g(f(0)) = a + b$.

Q. [composition2] Soient $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = ax^2 + b$ et $h(x) = \dfrac{1}{c+x^2}$. Que vaut $g(h(0))$?

■ $\dfrac{a}{c^2} + b$ ☐ $\sqrt{b^2+1}$ ☐ $a+b$ ☐ $\dfrac{1}{c+1}$ ☐ $\dfrac{1}{b^2+c}$ ☐ $\sqrt{1+\dfrac{1}{c^2}}$ ☐ Autre

Explication : $g(h(0)) = \frac{a}{c^2} + b$, $f(g(0)) = \sqrt{b^2+1}$, $g(f(0)) = a + b$, $h(f(0)) = \frac{1}{c+1}$, $h(g(0)) = \frac{1}{b^2+c}$, $f(h(0)) = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}$.

Q. [composition3] Soient $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies par $f(x) = \sqrt{ax^2+1}$, $g(x) = b + x^2$ et $h(x) = \dfrac{1}{ax^2+b}$. Que vaut $h(f(0))$?

■ $\dfrac{1}{a+b}$ ☐ $\dfrac{1}{ab^2+b}$ ☐ $\sqrt{ab^2+1}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}+1}$ ☐ $b + \dfrac{1}{b^2}$ ☐ $b+1$ ☐ Autre

Explication : $h(f(0)) = \frac{1}{a+b}$, $h(g(0)) = \frac{1}{ab^2+b}$, $f(g(0)) = \sqrt{ab^2+1}$, $f(h(0)) = \sqrt{\frac{a}{b^2}+1}$, $g(h(0)) = b + \frac{1}{b^2}$, $g(f(0)) = b + 1$.

Q. [transformationsDOMDEF.1] Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{9\}$ son domaine de définition.
Soit $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x)=4f(-x-6)+3$. Que vaut x_g si $\mathscr{D}_g=\mathbb{R}\setminus\left\{x_g\right\}$ est son domaine de définition?

■ -15 ☐ 6 ☐ 39 ☐ -57 ☐ -18 ☐ 15 ☐ -11 ☐ Autre

Explication : $\mathscr{D}_g=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-x-6\in\mathscr{D}_f\right\}=\{x\in\mathbb{R}\mid -x-6\neq 9\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq -15\}$

Q. [transformationsAsympt] Si $x=-10$ est l'équation d'une asymptote verticale au graphe d'une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ alors $x=\alpha$ est un asymptote verticale pour le graphe de la fonction $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=5-3f(9x+5)$. Que vaut α?

■ $-\frac{5}{3}$ ☐ 35 ☐ 260 ☐ $\frac{5}{3}$ ☐ -85 ☐ $\frac{7}{3}$ ☐ $\frac{5}{9}$ ☐ Autre

Explication : $9x+5=-10$ ssi $x=-\frac{5}{3}$

Q. [limtemp1] La température d'un corps est décrite par la fonction $T(t)=55+81e^{-0.91t}$. Quel est le seuil en dessous duquel la température ne peut pas descendre?

■ 55 ☐ 81 ☐ 56 ☐ 26 ☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ Autre

Explication : $T(t)>55$ et $T(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}55$

Q. [limtemp2] La température d'un corps est décrite par la fonction $T(t)=33-70e^{-0.77t}$. Quel est le seuil au dessus duquel la température ne peut pas monter?

■ 33 ☐ 70 ☐ 34 ☐ 37 ☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ Autre

Explication : $T(t)<33$ et $T(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}33$

Q. [limpar1] Que vaut γ si $\displaystyle\lim_{x\to 11}\frac{x^2-(11+\gamma)x+11\gamma}{x^2-14x+33}=5$?

■ -29 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 8 ☐ $+\infty$ ☐ 11 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Explication : Il s'agit de la limite du rapport de deux polynômes de degré 2 qu'on peut factoriser:

$$\frac{x^2-(11+\gamma)x+11\gamma}{x^2-14x+33}=\frac{(x-11)(x-\gamma)}{(x-11)(x-3)}=\frac{x-\gamma}{x-3}\xrightarrow[x\to 11]{}\frac{11-\gamma}{11-3}=5\iff\gamma=-29$$

Si on n'a pas factorisé, on peut utiliser la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 11}\frac{x^2-(11+\gamma)x+11\gamma}{x^2-14x+33}=\lim_{x\to 11}\frac{2x-(11+\gamma)}{2x-14}=\frac{11-\gamma}{8}=5\iff\gamma=-29.$$

Q. [limsqrt2] Soient α, β deux réels. Que vaut $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\alpha+19x}-\sqrt{\beta+19x}$?

■ 0 ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 5 ☐ -5 ☐ $\alpha-\beta$ ☐ $\beta-\alpha$ ☐ N'existe pas

Explication :

$$\sqrt{19x+\alpha}-\sqrt{19x+\beta}=\frac{(19x+\alpha)-(19x+\beta)}{\sqrt{19x+\alpha}+\sqrt{19x+\beta}}=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{19x+\alpha}+\sqrt{19x+\beta}}=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{x}\left(\sqrt{19+\frac{\alpha}{x}}+\sqrt{19+\frac{\beta}{x}}\right)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Q. [limlog] Soient α, β deux réels. Que vaut $\lim_{x\to+\infty} \ln(\alpha+15x)-\ln(\beta+20x)$?

■ $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ $\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ ☐ $\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ☐ $\alpha-\beta$ ☐ N'existe pas

Explication :

$$\ln(15x+\alpha)-\ln(20x+\beta)=\ln\left(\frac{15x+\alpha}{20x+\beta}\right)=\ln\left(\frac{15}{20}\times\frac{1+\frac{\alpha}{15x}}{1+\frac{\beta}{20x}}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Q. [limgendarmes1] Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Que vaut $\lim_{x\to0} x\cos(\theta+\log(x))$?

■ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ -1 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Explication : $-x\le x\cos(\theta+\log(x))\le x$

Q. [asor] Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, alors

■ $y=b$ est un asymptote horizontale pour $\mathscr{C}$
☐ $y=bx$ est un asymptote oblique pour $\mathscr{C}$
☐ $x=b$ est un asymptote verticale pour $\mathscr{C}$
☐ $\mathscr{C}$ n'a pas d'asymptote

Q. [asver] Si $\lim_{x\to b} f(x)=+\infty$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, alors

☐ $y=b$ est un asymptote horizontale pour $\mathscr{C}$
☐ $y=bx$ est un asymptote oblique pour $\mathscr{C}$
■ $x=b$ est un asymptote verticale pour $\mathscr{C}$
☐ $\mathscr{C}$ n'a pas d'asymptote

Q. [ascalcHOR] Si la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{15x+20}{\gamma x-45}$ a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y=3$, alors $\gamma=$

■ 5 ☐ -45 ☐ $-1/3$ ☐ $1/5$ ☐ $20/3$ ☐ 3 ☐ Autre

Explication : Si la droite d'équation $y=3$ est une asymptote en $+\infty$ pour f alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{15}{\gamma}$ alors $\gamma=\dfrac{15}{3}$.

Q. [ascalcVER] Si la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{7x+22}{\gamma x+18}$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x=3$, alors $\gamma=$

■ -6 ☐ $-1/6$ ☐ 18 ☐ $7/18$ ☐ 3 ☐ 7 ☐ Autre

Explication : f a une asymptote verticale pour $x=3$ si $18+3\gamma=0$ donc si $\gamma=-\dfrac{18}{3}$.

Q. [calcder1] Soit a une constante réelle non nulle. Quelle est la dérivée de $\log(\sin^{-a}(x))$?

■ $-\dfrac{a}{\tan(x)}$ ☐ $\dfrac{a}{\tan(x)}$ ☐ $a\tan(x)$ ☐ $-a\tan(x)$ ☐ Autre

Explication : La dérivée de $\log(\sin^{-a}(x))$ est $-\dfrac{a\cos(x)}{\sin(x)}=-\dfrac{a}{\tan(x)}$.

Q. [calcder2] Soit k une constante réelle non nulle. Quelle est la dérivée de $\sin(\sin(kx))$?

■ $k\cos(kx)\cos(\sin(kx))$ ☐ $k\sin(kx)\sin(\cos(kx))$ ☐ $-k\sin(\sin(kx))\cos(kx)$ ☐ $-k\sin(kx)\cos(\cos(kx))$ ☐ Autre

Explication : La dérivée de $\sin(\sin(kx))$ est $k\cos(kx)\cos(\sin(kx))=k\cos(kx)\cos(\sin(kx))$.

Q. [maxmin1] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en x_0. Si $f'(x_0)=0$ et $f''(x_0)=4$ alors x_0

■ est un min ☐ est un max ☐ n'est ni un min ni un max ☐ On ne peut pas conclure

Q. [maxmincalc1] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$. Si f a un maximum local en $x=1$ et $f(1)=2$, alors $a=$

■ 4 ☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ b ☐ $b-2$ ☐ $b+1$ ☐ Autre

Explication : On cherche a et b tels que $f(1)=2$, $f'(1)=0$, $f''(1)<0$. On a $f(1)=(a+b)/2$ et $f'(1)=-b/2$ ainsi $b=0$ et $a=4$. Comme $f''(1)=(b-a)/2$ on a bien $f''(1)=-2<0$.

Q. [maxmincalc2] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$. Si f a un minimum local en $x=-1$ et $f(-1)=-15$, alors $a=$

■ -30 ☐ -15 ☐ 15 ☐ 30 ☐ b ☐ $b-15$ ☐ $b+1$ ☐ Autre

Explication : On cherche a et b tels que $f(-1)=-15$, $f'(-1)=0$, $f''(-1)>0$. On a $f(-1)=(b-a)/2$ et $f'(-1)=b/2$ ainsi $b=0$ et $a=-30$. Comme $f''(-1)=(a+b)/2$ on a bien $f''(-1)=15>0$.

Q. [SI1] Soient $s\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_*$ et $I\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_*$ deux fonctions telles que $s'(t) = -2s(t)I(t)$ et $I'(t) = 2s(t)I(t)$. De plus, $s(0) = 14$ et $I(0) = 32$. Si on définit $p(t) = s(t) + I(t)$, alors

■ $p(4) = 46$ ☐ $p(4) > 46$ ☐ $p(4) < 46$ ☐ On ne peut pas conclure

Explication : $p'(t) = -2s(t)I(t) + 2s(t)I(t) = 0s(t)I(t) = 0$ (car s et I sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+_*$) donc $p(t) = p(0)$ pour tout $t > 0$.

Q. [linear1] Soit r la droite tangente au graphe de $f(x) = 2x^2 + 18x - 3$ au point $x_0 = -5$. La droite perpendiculaire à r qui passe par $(x_1, y_1) = (4, -2)$ a pour équation

■ $y = \frac{x}{2} - 4$ ☐ $y = 6 - 2x$ ☐ $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ☐ $y = -2x - 53$ ☐ Aucune de ces équations

Explication : Fonction: $f(x) = ax^2 + bx + c = 2x^2 + 18x - 3$,
Dérivée: $f'(x) = 2ax + b = 4x + 18$,
Pente de la droite tangente à f en x_0: $f'(x_0) = 2ax_0 + b = -2$,
Pente de la droite perpendiculaire à r: $-\dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{2}$,
Droite perpendiculaire à r passant par (x_1, y_1): $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_1) + y_1 = \dfrac{x}{2} - 4$

Q. [linear2] Soit r la droite tangente au graphe de $f(x) = \log(5x + 15)$ au point $x_0 = 2$. La droite perpendiculaire à r qui passe par $(x_1, y_1) = (3, 5)$ a pour équation

■ $y = 20 - 5x$ ☐ $y = \frac{x}{5} + \frac{22}{5}$ ☐ $y = 15 - 5x$ ☐ $y = \frac{x}{5} - \frac{2}{5} + \log(25)$ ☐ Aucune de ces équations

Explication : Fonction: $f(x) = \ln(ax + b) = \log(5x + 15)$,
Dérivée: $f'(x) = \frac{a}{ax+b} = \frac{5}{5x+15}$,
Pente de la droite tangente à f en x_0: $f'(x_0) = \frac{a}{ax_0+b} = \frac{1}{5}$,
Pente de la droite perpendiculaire à r: $-\dfrac{1}{f'(x_0)} = -5$,
Droite perpendiculaire à r passant par (x_1, y_1): $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_1) + y_1 = 20 - 5x$

Q. [linear3] Soit r la droite tangente au graphe de $f(x) = 2x^3 - 25x - 2$ au point $x_0 = 2$. La droite perpendiculaire à r qui passe par $(x_1, y_1) = (-2, -2)$ a pour équation

■ $y = x$ ☐ $y = -x - 4$ ☐ $y = x - 4$ ☐ $y = -x - 34$ ☐ Aucune de ces équations

Explication : Fonction: $f(x) = ax^3 + bx + c = 2x^3 - 25x - 2$,
Dérivée: $f'(x) = 3ax^2 + b = 6x^2 - 25$,
Pente de la droite tangente à f en x_0: $f'(x_0) = 3ax_0^2 + b = -1$,
Pente de la droite perpendiculaire à r: $-\dfrac{1}{f'(x_0)} = 1$,
Droite perpendiculaire à r passant par (x_1, y_1): $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_1) + y_1 = x$

Q. [linear4] Si les droites tangentes à la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c + 2x^3$ aux points $(1;2)$ et $(2;4)$ sont parallèles, alors $b =$

■ 15 ☐ −9 ☐ −6 ☐ 0 ☐ Autre

Explication : Fonction: $f(x) = ax^2 + bx + c + 2x^3$, donc $2 = f(1) = a + b + c + 2$ et $4 = f(2) = 4a + 2b + c + 16$
Dérivée: $f'(x) = 2ax + b + 6x^2$
Pente de la droite tangente à f en x_0 et en x_1: $2a + b + 6 = 4a + b + 24$

Q. [linear5] La courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par le point $(1;3)$ et la droite tangente à son graphe au point $(2;4)$ a pente égale à -3, alors $b =$

■ 13 ☐ −4 ☐ −6 ☐ 16 ☐ Autre

Explication : Fonction: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donc $3 = f(1) = a + b + c$
Dérivée: $f'(x) = 2ax + b$, donc $4 = f(2) = 4a + 2b + c$
Pente de la droite tangente à f en x_1: $-3 = 4a + b$

Q. [integParam1] Si $\int_3^7 (12x + \alpha)\,\mathrm{d}x = 12$ alors $\alpha =$?

■ −57 ☐ 0 ☐ −64 ☐ −62 ☐ −28 ☐ 4 ☐ Autre

Explication : $12 = \int_3^7 12x + \alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{12}{2}x^2 + \alpha x\right]_3^7 = 6(7^2 - 3^2) + \alpha(7-3) = (7-3) \times (6(7+3) + \alpha) = 4\alpha + 240$

Q. [integParam2] Si $\int_7^8 (\alpha x + 105)\,\mathrm{d}x = 75$ alors $\alpha =$?

■ −4 ☐ 0 ☐ 1 ☐ −30 ☐ 4 ☐ −12 ☐ Autre

Explication : $75 = \int_7^8 \alpha x + 105\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\alpha}{2}x^2 + cx\right]_7^8 = \frac{\alpha}{2}(8^2 - 7^2) + 105(8-7) = \frac{15\alpha}{2} + 105$

Q. [integParam3] Si $\int_4^5 (6x^2 + \alpha)\,\mathrm{d}x = 6$ alors $\alpha =$?

■ −116 ☐ 0 ☐ 1 ☐ −123 ☐ −58 ☐ −121 ☐ Autre

Explication : $6 = \int_4^5 6x^2 + \alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{3}x^3 + \alpha x\right]_4^5 = 2(5^3 - 4^3) + \alpha(5-4) = \alpha + 366$

Q. [integParam4] Si $\int_4^5 (183 + \alpha x^2)\,\mathrm{d}x = 122$ alors $\alpha =$?

■ −3 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 3 ☐ −61 ☐ −10 ☐ Autre

Explication : $122 = \int_4^5 183 + \alpha x^2\,\mathrm{d}x = \left[183x + \frac{\alpha}{3}x^3\right]_4^5 = \alpha(5^3 - 4^3) + 183(5-4) = \frac{61\alpha}{3} + 183$

Q. [integParam5] Si $\int_2^3 (30x^2 + \alpha x)\,\mathrm{d}x = 20$ alors α =?

■ -68 ☐ 0 ☐ 1 ☐ -64 ☐ 68 ☐ 10 ☐ Autre

Explication : $20 = \int_2^3 30x^2 + \alpha x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{30}{3}x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2\right]_2^3 = \frac{30}{3}(3^3 - 2^3) + \frac{3^2-2^2}{2}\alpha = \frac{5\alpha}{2} + 190$

Q. [integParam6] Si $\int_1^4 (42x + \alpha x^2)\,\mathrm{d}x = 126$ alors α =?

■ -9 ☐ 0 ☐ 3 ☐ 9 ☐ -84 ☐ -18 ☐ Autre

Explication : $126 = \int_1^4 42x + \alpha x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{42}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3}x^3\right]_1^4 = \frac{42}{2}(4^2 - 1^2) + \frac{4^3-1^3}{3}\alpha = 21\alpha + 315$

Q. [integParam7] Si $\int_1^7 \frac{1}{x+\alpha}\,\mathrm{d}x = \ln(3)$ alors α =?

■ 2 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ Autre

Explication : $\ln(3) = \int_1^7 \frac{1}{x+\alpha}\,\mathrm{d}x = [\ln(x+\alpha)]_1^7 = \ln\left(\frac{7+\alpha}{1+\alpha}\right)$ ainsi $3 = \frac{7+\alpha}{1+\alpha}$

Q. [integrales6.1] Calculer $\int_0^9 \left(2\sin^2(x) - x\right)\mathrm{d}x - \int_9^0 \left(2\cos^2(x) + x\right)\mathrm{d}x$.

☐ 0 ■ 18 ☐ 2 ☐ 36 ☐ -18 ☐ 16 ☐ Autre

Explication : $\int_0^a \left(b\sin^2(x) - x\right)\mathrm{d}x - \int_a^0 \left(b\cos^2(x) + x\right)\mathrm{d}x = \int_0^a \left(b\sin^2(x) - x\right) + \left(b\cos^2(x) + x\right)\mathrm{d}x = \int_0^a b\,\mathrm{d}x = b\,[x]_0^a = ab$

Q. [integrales6.2] Calculer $\int_0^7 \left(7\cos^2(x) - x\right)\mathrm{d}x - \int_7^0 \left(7\sin^2(x) + x\right)\mathrm{d}x$.

☐ 0 ■ 49 ☐ 98 ☐ 7 ☐ 42 ☐ -49 ☐ Autre

Explication : $\int_0^a \left(b\cos^2(x) - x\right)\mathrm{d}x - \int_a^0 \left(b\sin^2(x) + x\right)\mathrm{d}x = \int_0^a \left(b\cos^2(x) - x\right) + \left(b\sin^2(x) + x\right)\mathrm{d}x = \int_0^a b\,\mathrm{d}x = b\,[x]_0^a = ab$

Q. [airemorceaux1] Soit $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < 1, \\ -10x + 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ Alors $\int_{-4}^4 f(x)\mathrm{d}x$ =?

■ -96 ☐ -91 ☐ -98 ☐ -103 ☐ -87 ☐ -99 ☐ Autre

Explication : $\int_{-4}^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^1 4x\mathrm{d}x + \int_1^4 (-10x+3)\mathrm{d}x = \frac{4}{2}[x^2]_{-4}^1 + \frac{-10}{2}[x^2]_1^4 + 3[x]_1^4 = \frac{4}{2}(1^2 - (-4^2)) + \frac{-10}{2}(4^2 - 1^2) + 3(4-1) = -96$

Q. [LU1] Soit b un paramètre réel. Sans modifier l'ordre des équations, la méthode de GAUSS transforme le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + by + 8z = 0 \\ 10x + 6by + 49z = 0 \\ 4x + 4by + 36z = 0 \end{cases}$$

en un système triangulaire. Lequel?

- ■ $\begin{cases} 2x + by + 8z = 0 \\ by + 9z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} 2x = 0 \\ 10x + 6by = 0 \\ 4x + 4by + 36z = 0 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} 2x + by + 8z = 0 \\ 5x + by + 9z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} 2x + by + 8z = 0 \\ 6by + 49z = 0 \\ 36z = 0 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} x = 0 \\ 5x + y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$
- □ Autre