CHAPITRE 1

Background

1.1 Éléments d'analyse matricielle

1.1.1 Généralité

On appelle **MATRICE** $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ème colonne ($1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$).
Une matrice $\mathbb{A}$ est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{A} = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

— Si $m = n$ on dit qu'on a une **MATRICE CARRÉE**. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
— Une matrice $m \times 1$ est appelée **VECTEUR-COLONNE** et une matrice $1 \times n$ est appelée **VECTEUR-LIGNE**.
— La **MATRICE NULLE**, notée $\mathbb{O}_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls : $a_{ij} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et tout $j = 1, \dots, n$.
— On appelle **MATRICE DIAGONALE** toute matrice carrée $\mathbb{D} = (d_{ij})_{1\le i,j\le n}$ telle que $i \ne j \implies d_{ij} = 0$. Si on note $d_i \equiv d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$\mathbb{D}_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On la note $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.
— La **MATRICE IDENTITÉ** d'ordre n, notée $\mathbb{I}_n$, est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})$.
— On dit qu'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est
  — **TRIANGULAIRE SUPÉRIEURE** si $i > j \implies a_{ij} = 0$,
  — **TRIANGULAIRE INFÉRIEURE** si $i < j \implies a_{ij} = 0$.
— On appelle matrice **TRANSPOSÉE** de $\mathbb{A}$, notée $\mathbb{A}^T$, la matrice $\mathbb{A} = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le m}}$. C'est donc une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale. Bien évidemment $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$.
— On appelle matrice **ADJOINTE** (ou CONJUGUÉE TRANSPOSÉE) de $\mathbb{A}$, notée $\mathbb{A}^H$, la matrice $\mathbb{A} = (\overline{a}_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le m}}$. C'est donc une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale et en prenant le nombre complexe conjugué. Bien évidemment $(\mathbb{A}^H)^H = \mathbb{A}$.

- Une matrice $\mathbb{A}$ est dite **SYMÉTRIQUE** si $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$, *i.e.* si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.
- Une matrice $\mathbb{A}$ est dite **HERMITIENNE** ou **AUTOADJOINTE** si $\mathbb{A}^H = \mathbb{A}$, *i.e.* si $\overline{a}_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.
- Si $\mathbb{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, on définit la **TRACE** de $\mathbb{A}$ comme la somme des éléments de la diagonale principale : $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) \equiv \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Par conséquent $\operatorname{tr}(\mathbb{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbb{A})$.

On remarque qu'une matrice DIAGONALE est triangulaire supérieure et inférieure (*i.e.* $i \neq j \implies a_{ij} = 0$).

EXEMPLE

- La matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est carrée et d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
- La matrice $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.
- La matrice $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 15 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.
- La matrice $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.
- La matrice $\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 4.
- La matrice $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (= vecteur ligne) d'ordre 4.
- La matrice $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne (= vecteur colonne) d'ordre 3.
- La matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique.
- Si $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ alors $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.
- La trace de la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + (-2) = 1$.

1.1.2 Calcul matriciel élémentaire

Addition de matrices

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ et $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ sont deux matrices $m \times n$, on définit l'**ADDITION** des matrices par

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

La MATRICE OPPOSÉE D'UNE MATRICE $\mathbb{A}$ est notée $-\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ alors $-\mathbb{A} = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

EXEMPLE

Soient les matrices 2×3 suivantes :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La somme de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est la matrice 2×3 suivante :

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3+6 & 4+1 & 2+9 \\ 1+2 & 3+0 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

ATTENTION

La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie.

Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont des matrices de même ordre, alors nous avons

1. $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$ (commutativité),
2. $\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}$ (associativité),
3. $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$
4. $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^H = \mathbb{A}^H + \mathbb{B}^H$
5. $\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B})$.

EXEMPLE
Soient les matrices 2 × 2 suivantes :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbb{A}+\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1+6 & -1-5 \\ 3+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}+\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6+1 & -5-1 \\ 2+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}+\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 6+0 & -5+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})+\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{A}+(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ est une matrice $m \times n$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit le **PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE** comme la matrice

$$\alpha \cdot \mathbb{A} = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

Si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices de même ordre et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, alors $\alpha \cdot (\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \alpha \cdot \mathbb{A} + \alpha \cdot \mathbb{B}$ (distributivité).

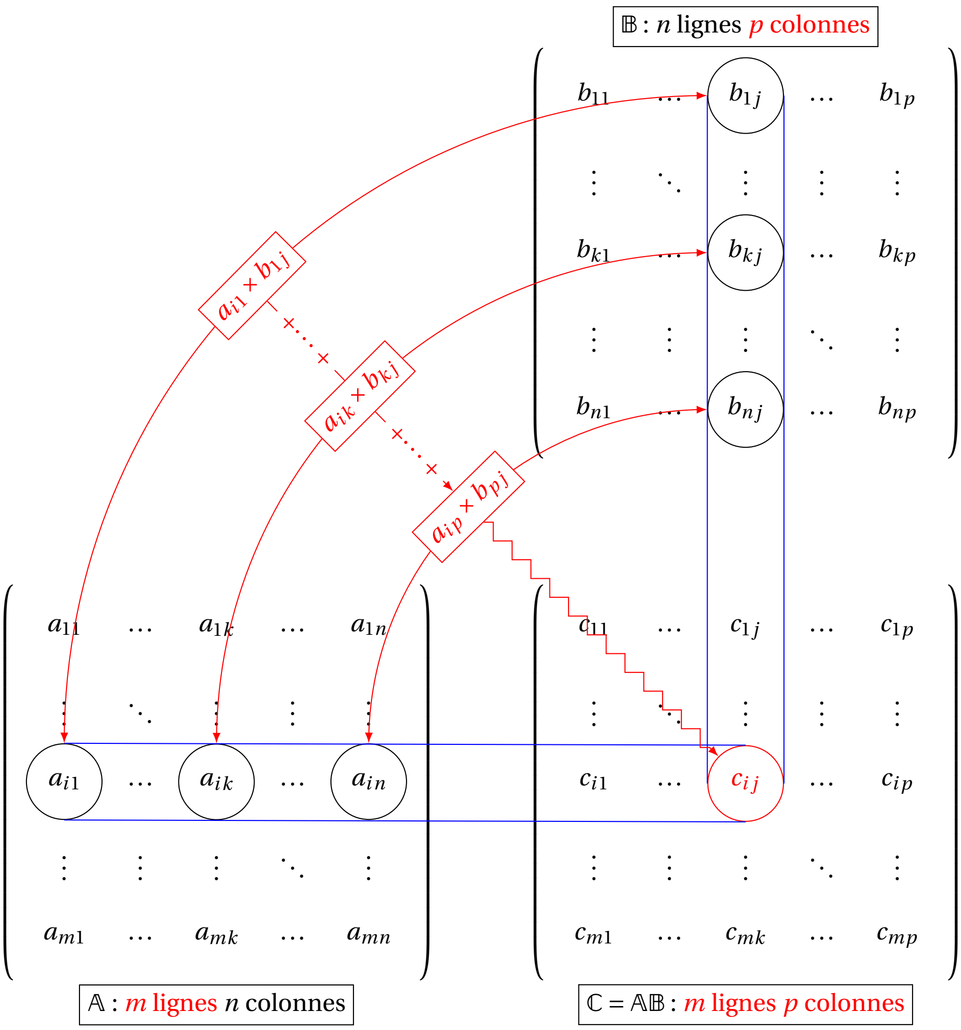
De plus, $(\alpha\mathbb{A})^T = \alpha\mathbb{A}^T$ et $(\alpha\mathbb{A})^H = \overline{\alpha}\mathbb{A}^H$.

EXEMPLE
Si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ alors $\alpha \cdot \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$.

Produit de matrices

Si $\mathbb{A} = (a_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le n}}$ est une matrice $m \times n$ et $\mathbb{B} = (b_{kj})_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le j\le p}}$ une matrice $n \times p$, on définit $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ le **PRODUIT DES MATRICES** $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ (dans l'ordre) comme la matrice de dimension $m \times p$ telle que l'élément c_{ij} est le produit scalaire de la ligne i de $\mathbb{A}$ et de la colonne j de $\mathbb{B}$. par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b1j + a_{i2} b2j + \cdots + a_{in} bnj$$



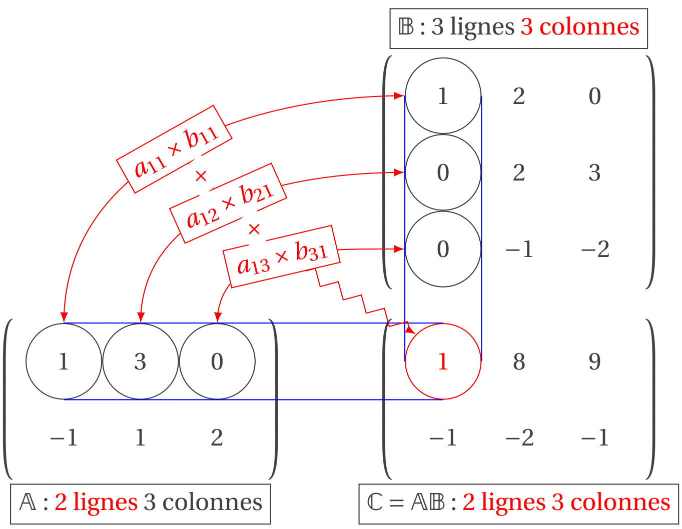
Exemple

Soient les deux matrices

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3, la matrice $\mathbb{B}$ est d'ordre 3×3, donc la matrice produit $\mathbb{AB}$ est une matrice d'ordre 2×3 :

$$\mathbb{AB}=\begin{pmatrix}1\times 1+3\times 0+0\times 0 & 1\times 2+3\times 2+0\times(-1) & 1\times 0+3\times 3+0\times(-2)\\ -1\times 1+1\times 0+2\times 0 & -1\times 2+1\times 2+2\times(-1) & -1\times 0+1\times 3+2\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8 & 9\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$



Exemple

Une société commerciale possède deux magasins dont l'aménagement du parc informatique est le suivant :

— Magasin 1 : 12 PC, 5 tablettes et 10 smartphones,

— Magasin 2 : 17 PC, 6 tablettes et 14 smartphones.

On peut associer à cet équipement la matrice $\mathbb{M} = \left(\begin{smallmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 17 & 6 & 14 \end{smallmatrix}\right)$.

La société souhaite améliorer son équipement de la manière suivante :

— Magasin 1 : +3 PC, +2 tablettes et +2 smartphones,

— Magasin 2 : +5 PC, +3 tablettes et +4 smartphones.

Ce nouvel équipement peut être associé à la matrice $\mathbb{N} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Le répartition du nouvel aménagement du parc informatique des deux magasins sera donc

$$\mathbb{M}+\mathbb{N} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 17 & 6 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 12 \\ 22 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Pour acheter le nouvel équipement, la société commerciale a le choix entre deux fournisseurs :

— Fournisseur 1 : 600 e le PC, 180 e la tablette et 60 e le smartphone,

— Fournisseur 2 : 550 e le PC, 200 e la tablette et 50 e le smartphone.

On peut associer ces prix à la matrice $\mathbb{P} = \left(\begin{smallmatrix} 600 & 550 \\ 180 & 200 \\ 60 & 50 \end{smallmatrix}\right)$.

On obtient les prix du nouvel aménagement selon les magasins et selon les fournisseurs en calculant

$$\mathbb{N}\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 & 550 \\ 180 & 200 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 600+2\times 180+2\times 60 & 3\times 550+2\times 200+2\times 50 \\ 5\times 600+3\times 180+4\times 60 & 5\times 550+3\times 200+4\times 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2280 & 2150 \\ 3780 & 3550 \end{pmatrix}$$

Par exemple, le prix de l'investissement pour le magasin 1 est de 2280 e avec le fournisseur 1 et de 2150 e avec le fournisseur 2.

Attention

$\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$ en général (non commutativité).

Prenons le cas général avec $\mathbb{A}$ d'ordre $m\times p$ et $\mathbb{B}$ d'ordre $p\times n$. Le produit $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est défini, c'est une matrice d'ordre $m\times n$. Qu'en est-il du produit $\mathbb{B}\mathbb{A}$? Il faut distinguer trois cas :

— si $m \neq n$ le produit $\mathbb{B}\mathbb{A}$ n'est pas défini ;

— si $m = n$ mais $p \neq n$, le produit $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est défini et c'est une matrice d'ordre $m\times n$ tandis que le produit $\mathbb{B}\mathbb{A}$ est défini mais c'est une matrice d'ordre $p\times p$ donc $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$;

— si $m = n = p$, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre m. Les produits $\mathbb{A}\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}\mathbb{A}$ sont aussi carrés et d'ordre m mais là encore, en général, $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$;

Exemple

Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si les dimensions sont compatibles, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C}) = (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}$ (associativité)
2. $\mathbb{A}(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B}+\mathbb{A}\mathbb{C}$ (distributivité)
3. $\mathbb{A}\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n\mathbb{A} = \mathbb{A}$
4. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$
5. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^H = \mathbb{B}^H\mathbb{A}^H$
6. $\mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$

Puissance d'une matrice

Si $\mathbb{A}$ est une matrice carrée, on note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^q$ (pour $q \geq 2$) la matrice définie par

$$\mathbb{B} \equiv \underbrace{\mathbb{A}\times\mathbb{A}\times\cdots\times\mathbb{A}}_{\text{q fois}}.$$

Il s'agit du produit matriciel de $\mathbb{A}$ par elle même q fois par conséquent, en générale, $b_{ij} \neq (a_{ij})^q$.

Si la matrice est diagonale, *i.e.* si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, alors $b_{ij} = (a_{ij})^q$.

Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **INVERSIBLE** (ou régulière) s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n.$$

Si une telle matrice existe, alors elle est unique, on la note $\mathbb{A}^{-1}$ et on l'appelle matrice **INVERSE** de $\mathbb{A}$.

— Si une matrice est non inversible (*i.e.* il n'existe pas $\mathbb{A}^{-1}$), on dit qu'elle est SINGULIÈRE.
— Une matrice carrée $\mathbb{A}$ est dite ORTHOGONALE si elle est inversible et $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$, *i.e.* si $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}^{-1}$.
— Une matrice carrée $\mathbb{A}$ est dite UNITAIRE si elle est inversible et $\overline{\mathbb{A}}^H\mathbb{A} = \mathbb{A}\overline{\mathbb{A}}^H = \mathbb{I}_n$, *i.e.* si $\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^{-1}$.

Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices inversibles, alors

— $\mathbb{A}^{-1}$ l'est aussi et $\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A}$,
— $\mathbb{A}^T$ l'est aussi et $\left(\mathbb{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^T$,
— $\mathbb{A}\mathbb{B}$ l'est aussi et $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.

EXEMPLE
Considérons les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 \qquad \mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

On dit que $\mathbb{B}$ est la matrice inverse de $\mathbb{A}$ et réciproquement.

Remarque
Matrice inverse et systèmes linéaires Il est fréquent, dans toutes les disciplines scientifiques, de devoir résoudre des systèmes linéaires.
Tout système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire sous la forme matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$; $\mathbb{A}$ est une matrice carrée de dimension n et $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs colonnes de dimension n, où $\mathbf{x}$ est l'inconnue et $\mathbf{b}$ un vecteur donné.
Si $\mathbb{A}$ est inversible alors ce système possède une unique solution $\mathbf{x}$ donnée par $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ car

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad\iff\quad \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b} \quad\iff\quad \mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

EXEMPLE
Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$$

Si on pose $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} 15 \\ 12 \end{smallmatrix}\right)$, alors le produit matriciel $\mathbb{A}\mathbf{x}$ donne le vecteur colonne

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

ainsi le système peut s'écrire sous forme matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
On cherche donc à calculer $\mathbb{A}^{-1}$, *i.e.* on cherche a, b, c, d tels que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3b & 3a + 4b \\ 2c + 3d & 3c + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3c & 2b + 3d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si et seulement si $a=-4$, $b=c=3$ et $d=-2$ ainsi

$$\mathbf{x}=\mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\21\end{pmatrix}$$

Cet exemple montre le lien entre résolution d'un système linéaire et calcul d'une matrice inverse. Cependant, pour calculer la solution du système initiale de 2 équations à 2 inconnues, on doit calculer les 4 coefficients de $\mathbb{A}^{-1}$ et pour cela on doit résoudre un système linéaire de 8 équations et 4 inconnues… ce n'est pas la bonne stratégie !

1.1.3 Définition et calcul pratique d'un déterminant

Le déterminant est un nombre que l'on associe à n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Il correspond au volume du parallélépipède engendré par ces n vecteurs. On peut aussi définir le déterminant d'une matrice $\mathbb{A}$ comme le déterminant des vecteurs qui composent ses colonnes. Le déterminant permet de savoir si une matrice est inversible ou pas, et de façon plus générale, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

Définition 1.1 (Déterminant d'une matrice d'ordre n (règle de Laplace))
Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n.
Étant donné un couple (i,j) d'entiers, $1\le i,j\le n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de $\mathbb{A}$.
Le déterminant de $\mathbb{A}$, noté $\det(\mathbb{A})$ ou $|\mathbb{A}|$, est défini par récurrence sur l'ordre de la matrice $\mathbb{A}$:

— si $n=1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A})\equiv a_{11},$$

— si $n>1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A})\equiv\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\mathbb{A}_{ij})\qquad\text{quelque soit la ligne } i \text{ fixée, } 1\le i\le n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(\mathbb{A})\equiv\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\mathbb{A}_{ij})\qquad\text{quelque soit la colonne } j \text{ fixée, } 1\le j\le n.$$

Astuce
Pour se souvenir des signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes + et − avec la formule $(-1)^{i+j}$ est analogue à la distribution des cases noirs et blanches sur un damier :

$$\begin{vmatrix}+ & - & + & - & \dots\\ - & + & - & + & \dots\\ + & - & + & - & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}$$

Exemple (Déterminant d'une matrice d'ordre 2 — méthode de Laplace)
Soit la matrice

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11})=a_{22},\qquad \det(\mathbb{A}_{12})=a_{21},\qquad \det(\mathbb{A}_{21})=a_{12},\qquad \det(\mathbb{A}_{22})=a_{11}.$$

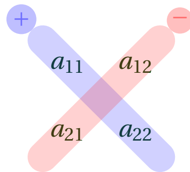
On peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :

— $a_{11}\det(\mathbb{A}_{11})-a_{12}\det(\mathbb{A}_{12})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i=1$)
— $-a_{21}\det(\mathbb{A}_{21})+a_{22}\det(\mathbb{A}_{22})=-a_{21}a_{12}+a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne $i=2$)
— $a_{11}\det(\mathbb{A}_{11})-a_{21}\det(\mathbb{A}_{21})=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne $j=1$)
— $-a_{12}\det(\mathbb{A}_{12})+a_{22}\det(\mathbb{A}_{22})=-a_{12}a_{21}+a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j=2$)

Ces formules donnent bien le même résultat.

Astuce (Déterminant d'une matrice d'ordre 2 — méthode pratique)
Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n=2$. Sans appliquer la méthode de Laplace, nous pouvons nous rappeler du déterminant par le schéma suivant :

$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



Exemple

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 5\times 3 - 7\times 4 = 15 - 28 = -13.$$

Exemple (Déterminant d'une matrice d'ordre 3 — méthode de Laplace)
Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \qquad \det(\mathbb{A}_{12}) = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{13}) = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \qquad \det(\mathbb{A}_{21}) = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32},$$

$$\det(\mathbb{A}_{22}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \qquad \det(\mathbb{A}_{23}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \qquad \det(\mathbb{A}_{32}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21},$$

$$\det(\mathbb{A}_{33}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ *par l'une des formules suivantes* :
- $a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbb{A}_{13})$ (développement suivant la ligne $i=1$)
- $-a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) - a_{23}\det(\mathbb{A}_{23})$ (développement suivant la ligne $i=2$)
- $a_{31}\det(\mathbb{A}_{31}) - a_{32}\det(\mathbb{A}_{32}) + a_{33}\det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la ligne $i=3$)
- $-a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) + a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) - a_{31}\det(\mathbb{A}_{31})$ (développement suivant la colonne $j=1$)
- $a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) - a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) + a_{32}\det(\mathbb{A}_{32})$ (développement suivant la colonne $j=2$)
- $-a_{13}\det(\mathbb{A}_{13}) + a_{23}\det(\mathbb{A}_{23}) - a_{33}\det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la colonne $j=3$)

Quelques calculs montrent que ces formules donnent bien le même résultat.

Exemple
Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10, \qquad \det(\mathbb{A}_{12}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det(\mathbb{A}_{13}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det(\mathbb{A}_{21}) = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} = -3, \qquad \det(\mathbb{A}_{22}) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix} = 5, \qquad \det(\mathbb{A}_{23}) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = 3,$$

$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = -2, \qquad \det(\mathbb{A}_{32}) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0, \qquad \det(\mathbb{A}_{33}) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 2,$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :

— $1\det(\mathbb{A}_{11}) + 0\det(\mathbb{A}_{12}) + 1\det(\mathbb{A}_{13}) = 10 + 0 + 0 = 10$

— $0\det(\mathbb{A}_{21}) + 2\det(\mathbb{A}_{22}) + 0\det(\mathbb{A}_{23}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$ ←- - formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer

— $0\det(\mathbb{A}_{31}) + 3\det(\mathbb{A}_{32}) + 5\det(\mathbb{A}_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$

— $1\det(\mathbb{A}_{11}) + 0\det(\mathbb{A}_{21}) + 0\det(\mathbb{A}_{31}) = 10 + 0 + 0 = 10$ ←- - formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer

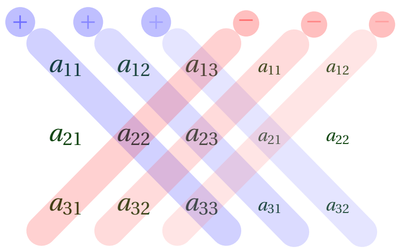
— $0\det(\mathbb{A}_{12}) + 2\det(\mathbb{A}_{22}) + 3\det(\mathbb{A}_{32}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$

— $1\det(\mathbb{A}_{13}) + 0\det(\mathbb{A}_{23}) + 5\det(\mathbb{A}_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$

Astuce (Déterminant d'une matrice d'ordre 3 — méthode pratique (règle de Sarrus))

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n = 3$. Sans appliquer la méthode de Laplace, nous pouvons nous rappeler du déterminant par le schéma suivant :

$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

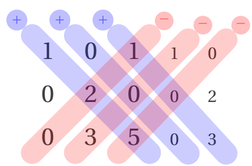


Exemple

Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

alors avec la règle de Sarrus



$$\det(\mathbb{A}) = (1 \times 2 \times 5 + 0 \times 0 \times 0 + 1 \times 0 \times 3) - (1 \times 2 \times 0 + 1 \times 0 \times 3 + 0 \times 0 \times 5) = 10.$$

Si on utilise la définition (règle de Laplace), en développant selon la première colonne on obtient

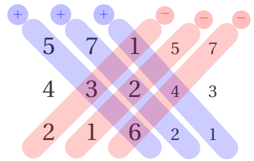
$$\det(\mathbb{A}) = 1 \times \det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix} = 2 \times 5 - 0 \times 3 = 10.$$

Exemple

Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}5 & 7 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

alors



$$\det(\mathbb{A}) = (5\times3\times6+7\times2\times2+1\times4\times1)-(1\times3\times2+5\times2\times1+7\times4\times6) = -62.$$

ATTENTION
La règle de SARRUS ne s'applique qu'à des matrices d'ordre 3.

EXEMPLE
Soit la matrice d'ordre 4 suivante :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}_{11}) - \det(\mathbb{A}_{14}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 4\\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \big(12+0+2-2-0-0\big) = -(-8)-12 = -4.$$

Si on essaye de «généraliser» la règle de SARRUS on n'obtient pas le bon résultat :

$$\big(1\times0\times0\times0+0\times1\times4\times1+0\times0\times1\times2+1\times2\times2\times3\big)-\big(1\times1\times2\times1+1\times0\times0\times2+0\times2\times4\times3+0\times0\times1\times0\big) = 10.$$

On a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$,
2. $\det(\mathbb{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbb{A})}$,
3. $\det(\mathbb{A}^T) = \det(\mathbb{A})$,
4. $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A})\cdot\det(\mathbb{B})$
5. le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux,
6. le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1.

Astuce
Il convient d'utiliser la définition de déterminant après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéro sachant que

— si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(\mathbb{A}) = 0$;
— si on multiplie une colonne (resp. une ligne) par un scalaire $\alpha \neq 0$, alors le déterminant est multiplié par α ;
— si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé (*i.e.*, le déterminant change de signe) ;
— on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes), *i.e.*

$$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j, \qquad L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j,$$

avec $j \neq i$ et $\alpha \neq 0$.

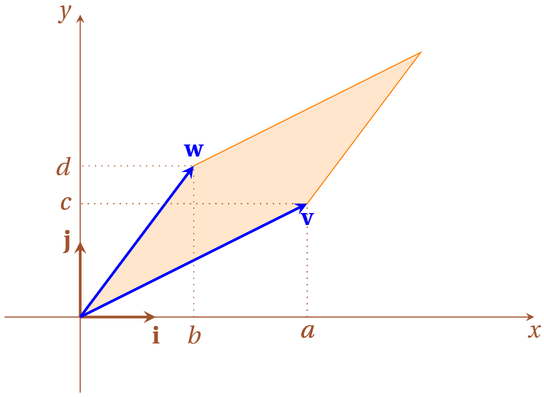
EXEMPLE
Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On fait apparaître encore plus de zéros dans la matrice jusqu'à obtenir une matrice triangulaire :

$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&3&5\end{pmatrix} \overset{L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{2}L_2}{=} \det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix} = 1\times2\times5 = 10.$$

En dimension 2 les déterminants correspondent à des aires et en dimension 3 à des volumes.
Considérons deux vecteurs $\mathbf{v} = \binom{a}{c}$ et $\mathbf{w} = \binom{b}{d}$ du plan $\mathbb{R}^2$. Ces deux vecteurs déterminent un parallélogramme :



L'aire du parallélogramme est donnée par la valeur absolue du déterminant de la matrice dont les colonnes sont $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$:

$$\text{Aire} = \left|\det\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\right|$$

Théorème 1.2
$\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.

Propriété 1.3
- $\det(\mathbb{A}^T) = \det(\mathbb{A})$,
- $\det(\mathbb{A}^H) = \overline{\det(\mathbb{A})}$,
- $\det(\mathbb{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbb{A})}$,
- $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{B})$.

Définition 1.4 (Rang)
Le RANG d'une matrice quelconque $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$, noté $\mathrm{rg}(\mathbb{A})$, est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Il représente le nombre maximum de vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$ linéairement indépendants (ou, ce qui est équivalent, le nombre maximum de vecteurs lignes linéairement indépendants).

Remarque
Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$. Alors
$$0 \le \mathrm{rg}(\mathbb{A}) \le \min(m,n)$$
et $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 0$ si et seulement si tous les éléments de $\mathbb{A}$ sont nuls.

EXEMPLE
Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}1&3&2\\1&3&1\end{pmatrix}.$$
Le rang de $\mathbb{A}$ est 2 car
- $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3 donc $s \le \min\{2,3\}$ soit encore $s = 0$, 1 ou 2 ;

— il existe au moins un élément de $\mathbb{A}$ différent de zéro, donc $s \neq 0$ soit encore $s = 1$ ou 2 ; pour qu'il soit 2 il faut trouver une sous-matrice de dimension 2 inversible :
  — comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure car je peux encore trouver une autre sous-matrice de dimension 2 inversible ;
  — comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.

EXEMPLE

Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de $\mathbb{A}$ est 2 car

— $\mathbb{A}$ est d'ordre 3×3 donc $s \leq 3$, *i.e.* $s = 0, 1, 2$ ou 3 ;
— il existe au moins un élément de $\mathbb{A}$ différent de zéro, donc $s \neq 0$;
— le déterminant de $\mathbb{A}$ est 0 (car $L_1 = -L_3$) donc $s \neq 3$;
— le déterminant de la sous-matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ est non nul, donc $s = 2$.

Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 1.5 (Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrices)

Les opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes d'une matrices $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}$ sont

— la multiplication d'une ligne L_i par un scalaire non nul α :

$$L_i \leftarrow \alpha L_i;$$

— l'addition d'un multiple d'une ligne αL_j à une autre ligne L_i :

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j;$$

— l'échange de deux lignes :

$$L_i \leftrightarrow L_j.$$

Ces transformations sont équivalentes à la multiplication à gauche (pré-multiplication) de la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}$ par la matrice inversible obtenue en appliquant à la matrice identité $\mathbb{I}_m$ la transformation correspondante. Par exemple, la transformation qui échange les premières deux lignes de la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{4,3}$ suivante

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ p & q & r \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

équivaut à multiplier $\mathbb{M}$ à gauche par la matrice obtenue en échangeant les premières deux lignes de la matrice identité $\mathbb{I}_4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

Définition 1.6 (Opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrices)

Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}$ sont

— la multiplication d'une colonne C_i par un scalaire α non nul :

$$C_i \leftarrow \alpha C_i;$$

— l'addition d'un multiple d'une colonne αC_j à une autre colonne C_i :

$$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j;$$

— l'échange de deux colonnes :

$$C_i \leftrightarrow C_j.$$

Ces transformations sont équivalentes à la multiplication à droite (post-multiplication) de la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}$ *par la matrice inversible obtenue en appliquant à la matrice identité* $\mathbb{I}_n$ *la transformation correspondante. Par exemple la transformation qui échange les deux premières colonnes de la matrice* $\mathbb{M}$ *précédente s'obtient comme suit :*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \\ q & p & r \end{pmatrix}$$

Définition 1.7 (Matrices ÉQUIVALENTES)
Deux matrices sont dites ÉQUIVALENTES si on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires.

Théorème 1.8
Deux matrices équivalentes ont le même rang.

1.1.4 Produits scalaires et vectoriels et normes

On a très souvent besoin, pour quantifier des erreurs ou mesurer des distances, de calculer la "grandeur" d'un vecteur ou d'une matrice. Nous introduisons pour cela la notion de norme vectorielle et celle de norme matricielle.

Définition 1.9 (p-norme ou norme de HÖLDER)
On définit la p-norme (ou norme de HÖLDER) par

$$\|\mathbf{x}\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad \text{pour } 1 \le p < +\infty$$

où les x_i sont les composantes du vecteur $\mathbf{x}$.

Quand on prend $p = 2$ on retrouve la définition classique de la norme euclidienne.

Définition 1.10 (Norme infinie ou norme du maximum)
On définit la norme infinie (ou norme du maximum) par

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

où les x_i sont les composantes du vecteur $\mathbf{x}$.

1.2 Espaces vectoriels

Dans cette section, nous rappelons les notions élémentaires d'algèbre linéaire que nous utiliserons dans le reste du polycopié.

Définition 1.11 (Espace vectoriel)
Un ESPACE VECTORIELsur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) est un ensemble E contenant au moins un élément, noté $\mathbf{0}_E$, ou simplement $\mathbf{0}$, muni d'une loi interne notée $+$, appelée *addition*, et d'une loi externe notée $\cdot$, appelée *multiplication par un scalaire*, qui possède les propriétés suivantes : pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

① $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (associativité)

② $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (commutativité)

③ $\mathbf{u} + \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (existence d'un élément neutre pour l'addition)

④ $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}_E$ en notant $-\mathbf{u} = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot \mathbf{u}$ (existence d'un élément opposé)

⑤ $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$ (compatibilité avec la somme des scalaires)

⑥ $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$ (compatibilité avec la somme des vecteurs)

⑦ $\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{u})=(\alpha\beta)\cdot\mathbf{u}$ (compatibilité avec le produit des scalaires)

⑧ $1_{\mathbb{K}}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ (compatibilité avec l'unité)

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés SCALAIRES, ceux de E sont appelés VECTEURS. L'élément unité de $\mathbb{K}$ est noté $1_{\mathbb{K}}$, l'élément neutre de l'addition $\mathbf{0}_E$ est appelé VECTEUR NUL, le symétrique d'un vecteur $\mathbf{u}$ pour l'addition est appelé VECTEUR OPPOSÉ DE $\mathbf{u}$ et est noté $-\mathbf{u}$.

EXEMPLE

1. L'ensemble $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$, $n\geq 1$, est un espace vectoriel pour les opérations somme $(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$ et multiplication $\alpha\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]=\left\{p(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x^{i-1}\,\middle|\,\alpha_i\in\mathbb{R}\text{ ou }\mathbb{C}\right\}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $n\geq 0$, à coefficients réels ou complexes, est un espace vectoriel pour les opérations somme $p_n(x)+q_n(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x^{i-1}+\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i x^{i-1}=\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i+\beta_i)x^{i-1}$ et multiplication $\lambda p_n=\sum_{i=1}^{n+1}(\lambda\alpha_i)x^{i-1}$.

Définition 1.12 (Sous-espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un SOUS-ESPACE VECTORIEL de E si et seulement si F est un espace vectoriel et $F\subset E$.

EXEMPLE

— L'ensemble $\{\mathbf{0}_E\}$ constitué de l'unique élément nul est un sous-espace vectoriel de E, à ne pas confondre avec l'ensemble vide $\emptyset$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de E (il ne contient pas le vecteur nul).

— L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.13 (Combinaison linéaire)

Soient $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E et $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$. Le vecteur

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\cdot\mathbf{u}_i$$

est appelé COMBINAISON LINÉAIRE des vecteurs $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_p$.

EXEMPLE

Considérons les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\qquad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.
Pour prouver qu'un vecteur $\mathbf{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_p$ il faut montrer qu'il existe p constantes $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ telles que

$$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_p\mathbf{u}_p.$$

On cherche alors a et b réels tels que

$$\mathbf{u}_3=a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2,$$

ce qui donne

$$\begin{cases}-1=-a,\\ 0=-2a+2b,\\ -4=-3a-b,\end{cases}\qquad\iff\qquad a=b=1.$$

Par conséquent $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ car $\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$.

EXEMPLE

Considérons les trois polynômes

$$q_1(x)=1+x,\qquad q_2(x)=x+x^2,\qquad q_3(x)=1-x^2.$$

Montrons que q_3 est combinaison linéaire des polynômes q_1 et q_2.

Pour prouver qu'un polynôme v est une combinaison linéaire des polynômes $q_1, q_2, \dots, q_p$ il faut montrer qu'il existe p constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ telles que

$$v(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \dots + \alpha_p q_p(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On cherche alors a et b réels tels que

$$q_3(x) = a q_1(x) + b q_2(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ce qui donne

$$1 - x^2 = a(1+x) + b(x + x^2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

soit encore

$$(a-1) + (a+b)x + (1+b)x^2 = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On cherche a et b réels tels que

$$\begin{cases} a - 1 = 0, \\ a + b = 0, \\ 1 + b = 0, \end{cases} \qquad \iff \qquad a = -b = 1.$$

Par conséquent q_3 est combinaison linéaire des polynômes q_1 et q_2 car $q_3(x) = q_1(x) - q_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.14 (Espace engendré)
Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces p vecteurs fixés est un sous-espace vectoriel de E appelé SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ par $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ et noté $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$:

$$\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\} = \left\{ \mathbf{u} \in E \;\middle|\; \exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i \right\}.$$

Notons que le vecteur $\mathbf{0}_E$ et les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ appartiennent à $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ car pour tout $j = 1, 2, \dots, p$

$$\mathbf{0}_E = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot \mathbf{u}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{u}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} 0 \cdot \mathbf{u}_i + 1 \cdot u_j.$$

EXEMPLE
- $\operatorname{Vect}\{\mathbf{0}_E\} = \{\mathbf{0}_E\}$
- $\operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

Définition 1.15 (Famille libre, famille génératrice, base)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est...

... GÉNÉRATRICE DE E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de F :

$$\text{pour tout } \mathbf{u} \in E \text{ il existe } \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i;$$

... LIBRE si et seulement si les p vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ sont linéairement indépendants, c'est-dire si

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_i = 0 \ \forall i.$$

Dans le cas contraire la famille est dite liée.

Pour montrer qu'une famille de plus de deux vecteurs est libre, on sera amené à résoudre le système linéaire correspondant, qui est un système homogène : la famille est libre si et seulement si le système admet uniquement la solution nulle.

... BASE DE E si elle est libre et génératrice de E. Dans ce cas, les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont appelées COORDONNÉES ou COMPOSANTES du vecteur $\mathbf{u}$ dans la base $\mathscr{F}$, on écrit $\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathscr{F}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et on dit que E est de DIMENSION p.
Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre, noté $\dim(E)$, est appelé la DIMENSION de E.

Attention à ne pas confondre DIMENSION *et* CARDINAL *: dans un espace vectoriel de dimension n, toutes les bases ont le même cardinal* (i.e. *même nombre d'éléments), mais il ne faut pas parler de cardinal d'un espace vectoriel, ni de dimension d'une base.*

EXEMPLE

— La famille $\{\mathbf{u}=(1,0), \mathbf{v}=(0,1), \mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ n'est pas libre : par exemple le vecteur $(2,-1)$ peut s'écrire comme $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$, comme $2\mathbf{w}-3\mathbf{v}$ etc.

— La famille $\{\mathbf{u}=(1,0,-1), \mathbf{v}=(2,3,5), \mathbf{w}=(-1,0,1)\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ n'est pas libre car $\mathbf{w}=-\mathbf{u}$.

— La famille $\{\mathbf{u}=(1,1,-1), \mathbf{v}=(2,-1,2), \mathbf{w}=(3,0,1)\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ n'est pas libre car $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

Théorème 1.16

Dans un espace vectoriel E de dimension n, une FAMILLE GÉNÉRATRICE a au moins n éléments.
Si elle a plus de n éléments, alors elle n'est pas libre mais on peut en extraire une sous-famille libre de cardinal n qui est alors une base de E.
Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E.

Théorème 1.17 (de la base incomplète)

Dans un espace vectoriel E de dimension n, une FAMILLE LIBRE a au plus n éléments.
Si elle a moins de n éléments, alors elle n'est pas une base de E mais on peut la compléter de façon à obtenir une base.
Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E.

Théorème 1.18 (de la dimension)

Soit $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

❶ $\mathscr{F}$ est une base de E

❷ $\mathscr{F}$ est libre et contient n éléments

❸ $\mathscr{F}$ est génératrice de E et contient n éléments

❹ $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de E

ATTENTION

On utilise ce théorème principalement pour montrer qu'une famille $\mathscr{F}$ est une base de E. On utilisera surtout les implications suivantes (avec E de dimension n) :

— si $\mathscr{F}$ est libre et de cardinal n alors $\mathscr{F}$ est une base de E

— si $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de E alors $\mathscr{F}$ est une base de E

EXEMPLE (BASE CANONIQUE DE $\mathbb{R}^n$)

Avec $n\in\mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. La famille $\mathscr{B}=\{(1,0,\dots,0);(0,1,\dots,0);\dots;(0,0,\dots,1)\}$ est une base, appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}^n$, car pour tout vecteur $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)=u_1\cdot(1,0,\dots,0)+u_2\cdot(0,1,\dots,0)+\dots+u_n\cdot(0,0,\dots,1)$ de façon unique.

EXEMPLE (BASE CANONIQUE DE $\mathbb{R}_n[x]$)

Avec $n\in\mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré $\le n$ est de dimension $n+1$. La base $\mathscr{C}=\left\{1,x,x^2,\dots,x^n\right\}$ est appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}_n[x]$ car, pour tout polynôme $p\in\mathbb{R}_n[x]$, $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ de façon unique.

ATTENTION

Ne pas confondre le vecteur $\mathbf{u}\in E$ (qui peut être un polynôme, une fonction, une matrice...) avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de E (qu'on peut noter $\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathscr{B})$).

EXEMPLE

Le polynôme $p(x)=a+bx+cx^2$ a pour coordonnées (a,b,c) dans la base canonique $\mathscr{C}=\left\{1,x,x^2\right\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ mais n'est pas égale au vecteur (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$. Tous ce qu'on peut dire est que le polynôme $p(x)=a+bx+cx^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ et le vecteur (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ ont les mêmes coordonnées dans les bases canoniques respectives.

Astuce

Si $\mathscr{F} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E et si un des vecteurs de $\mathscr{F}$ (par exemple $\mathbf{e}_1$) est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$, alors $\mathscr{F} \setminus \{\mathbf{e}_1\}$ est encore une famille génératrice de E. Ce résultat permet en particulier de construire une base d'un espace vectoriel connaissant une famille génératrice de cet espace.

Astuce

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ d'un espace vectoriel E on cherche d'éventuelles relations entre les vecteurs $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$:

— si la famille est libre, on en déduit que $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p$

— sinon, on cherche à exprimer un vecteur $\mathbf{e}_i$ comme combinaison linéaire des autres vecteurs et on «élimine» ce vecteur de la famille ; on procède ainsi jusqu'à obtenir une famille libre contenue dans $\mathscr{F}$.

Avant de commencer une recherche précise, on peut encadrer $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$. Ainsi

— $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \le \min\{p, \dim(E)\}$ si E est de dimension finie ;

— si $\mathscr{F}$ contient au moins deux vecteurs non colinéaires alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \ge 2$;

— si $\mathscr{F}$ contient une famille libre de q vecteurs, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \ge q$.

Définition 1.19 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ une famille d'éléments de E. On appelle RANG DE $\mathscr{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$:

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}).$$

ATTENTION

Le rang d'une matrice $\mathbb{A}$ est le rang des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Donc

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]),$$

où $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.

1.3 Systèmes linéaires et calcul pratique de la matrice inverse

Soit $n, p \ge 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

— Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$.

— Les INCONNUES $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{K}$.

— Une SOLUTION de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.

— Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.

— Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.

— Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.

— Un système est CARRÉ si $n = p$.

Si on note

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le système (S) est équivalent à l'écriture matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Si on ajoute le vecteur-colonne des seconds membres $\mathbf{b}$ à la matrice des coefficients $\mathbb{A}$, on obtient ce qu'on appelle la matrice augmentée que l'on note $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$.

Système échelonné (ou triangulaire supérieur)

Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant. Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\begin{cases} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{cases}$$

La résolution d'un système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ échelonné est simple car, la matrice lui associée étant triangulaire supérieure, on utilise la relation de récurrence (dite *par remontée*)

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}, \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right), \quad \text{pour } i = n-1, n-2\dots,1 \end{cases}$$

EXEMPLE
Résolution du système triangulaire supérieur : $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ x_2+x_3=5, \\ x_3=3. \end{cases}$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{3}{1}, \\ x_2 = x_i = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3) = \frac{1}{1}(5-x_3) = 2 \\ x_1 = x_i = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) = \frac{1}{1}(6-x_2-x_3) = 1. \end{cases}$$

Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_p = b,$$

— si $b \neq 0$ le système est impossible,
— si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit SYSTÈME RÉDUIT.

Par conséquent, un système échelonné permet d'établir si le système est possible ou impossible comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE
Établir si les trois systèmes linéaires suivantes sont impossibles ou possibles et, dans ce cas, calculer la/les solution(s).

$$(1)\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ z=3. \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ 0=0. \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ 0=3. \end{cases}$$

(1) Ce système est possible et admet une et une seule solution : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$\begin{aligned} &z = 3, \\ &y = 5 - z = 5 - 3 = 2, \\ &x = 6 - y - z = 6 - 2 - 3 = 1. \end{aligned}$$

(2) Ce système est possible et admet une infinité de solutions : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$\begin{aligned} &z = \kappa \in \mathbb{R}, \\ &y = 5 - \kappa, \\ &x = 6 - y - z = 1. \end{aligned}$$

(3) Le système n'a pas de solution car aucune valeur de z permet de résoudre $0z = 3$.

Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils ont les mêmes solutions. Les opérations suivantes donnent des systèmes équivalents :

— remplacer une ligne par elle même $\pm$ un multiple d'une autre ligne

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$$

comme par exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6,\\ \phantom{x+{}}y+z=5,\\ \phantom{x+{}}y+2z=8, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x+y+z=6,\\ \phantom{x+{}}y+z=5,\\ \phantom{x+y+{}}z=3. \end{cases}$$

— échanger deux lignes,

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

comme par exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6,\\ \phantom{x+y+{}}z=3,\\ \phantom{x+{}}y+z=5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x+y+z=6,\\ \phantom{x+{}}y+z=5,\\ \phantom{x+y+{}}z=3. \end{cases}$$

Ces transformations sont équivalentes à la multiplication à gauche (pré-multiplication) de la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}$ par la matrice inversible obtenue en appliquant à la matrice identité $\mathbb{I}_m$ la transformation correspondante. Par exemple, la transformation qui échange les premières deux lignes de la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{4,3}$ suivante

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\\ p & q & r \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} d & e & f\\ a & b & c\\ g & h & i\\ p & q & r \end{pmatrix}$$

équivaut à multiplier $\mathbb{M}$ à gauche par la matrice obtenue en échangeant les premières deux lignes de la matrice identité $\mathbb{I}_4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f\\ a & b & c\\ g & h & i\\ p & q & r \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss

La méthode de GAUSS transforme un système linéaire quelconque en un système *échelonné* équivalent.
Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S) et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$ la matrice augmentée.
La méthode de GAUSS comporte $n-1$ étapes : à chaque étape j on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i > j$ par des opérations élémentaires sur les lignes.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes de la matrice augmentée (*i.e.* deux équations du système linéaire), on peut supposer $a_{jj} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j,$$

ainsi on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i > j$ (*i.e.* on élimine l'inconnue x_j dans chaque lignes L_i du système linéaire).

En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné.

EXEMPLE
Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1,\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2,\\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,\\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

1. Résolution par la méthode du pivot de GAUSS :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3\ +x_4=2\\ 3x_1+4x_2\ +x_3+2x_4=3\\ 4x_1\ +x_2+2x_3+3x_4=4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2\ +3x_3\ +4x_4=1\\ -x_2\ -2x_3\ -7x_4=0\\ -2x_2\ -8x_3-10x_4=0\\ -7x_2-10x_3-13x_4=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape 2}]{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3\ +4x_4=1\\ -x_2-2x_3\ -7x_4=0\\ -4x_3\ +4x_4=0\\ 4x_3+36x_4=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape 3}]{L_4\leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 40x_4=0 \end{cases}$$

donc, en résolvant le système triangulaire supérieur obtenu, on obtient

$$x_4=0,\quad x_3=0,\quad x_2=0,\quad x_1=1.$$

2. Résolution par la méthode du pivot de Gauss en écriture matricielle :

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ 2&3&4&1&2\\ 3&4&1&2&3\\ 4&1&2&3&4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ \boxed{0}&-1&-2&-7&0\\ \boxed{0}&-2&-8&-10&0\\ \boxed{0}&-7&-10&-13&0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Étape 2}]{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ 0&-1&-2&-7&0\\ 0&\boxed{0}&-4&4&0\\ 0&\boxed{0}&4&36&0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Étape 3}]{L_4\leftarrow L_4+L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ 0&-1&-2&-7&0\\ 0&0&-4&4&0\\ 0&0&\boxed{0}&40&0 \end{array}\right)$$

donc

$$x_4=0,\quad x_3=0,\quad x_2=0,\quad x_1=1.$$

Exemple (Système avec des paramètres)

Pour quelles valeurs de a et c le système linéaire suivant admet aucune, une seule ou une infinité de solutions?

$$\begin{cases} x\ +5y+z=0,\\ x\ +6y-z=2,\\ 2x+ay+z=c. \end{cases}$$

Nous avons 3 équations donc il faut effectuer 2 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x\ +5y+z=0\\ x\ +6y-z=2\\ 2x+ay+z=c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}} \begin{cases} x+5y\quad +z\ =0\\ y\quad -2z=2\\ (a-10)y-z\ =c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3\leftarrow L_3-(a-10)L_2} \begin{cases} x+5y+z\quad =0\\ y\quad -2z\quad =2\\ (2a-21)z=c-2(a-10) \end{cases}$$

Étudions la dernière équation :

$$(2a-21)z=\big(c-2a+20\big)$$

- Si $a\neq\frac{21}{2}$ alors $z=\frac{c-2a+20}{2a-21}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une et une seule solution ;
- si $a=\frac{21}{2}$ alors
  - si $c-2a+20=0$ (*i.e.* $c=1$), alors $z=\kappa\in\mathbb{R}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une infinité de solutions ;
  - si $c-2a+20\neq0$ (*i.e.* $c\neq1$), alors il n'y a aucune solution.

Variante de Gauss-Jordan

Soit $\mathbb{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S) et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$ la matrice augmentée.

La méthode de Gauss-Jordan comporte n étapes : à chaque étape j on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i\neq j$ par des opérations élémentaires sur les lignes.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes de la matrice augmentée, on peut supposer $a_{jj}\neq0$. On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i\neq j$ selon la règle

$$L_i\leftarrow L_i-\frac{a_{ij}}{a_{jj}}L_j$$

ainsi on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i \neq j$ (*i.e.* on élimine l'inconnue x_j dans chaque lignes L_i du système linéaire).

En réitérant le procédé pour i de 1 à n, on aboutit à un système diagonal.

EXEMPLE

Résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

par la méthode de GAUSS-JORDAN.

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&1\\2&3&4&1&2\\3&4&1&2&3\\4&1&2&3&4\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1\\L_4\leftarrow L_4-4L_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&1\\\boxed{0}&-1&-2&-7&0\\\boxed{0}&-2&-8&-10&0\\\boxed{0}&-7&-10&-13&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Étape 2}]{\substack{L_1\leftarrow L_1+2L_2\\L_3\leftarrow L_3-2L_2\\L_4\leftarrow L_4-7L_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&\boxed{0}&-1&-10&1\\0&-1&-2&-7&0\\0&\boxed{0}&-4&4&0\\0&\boxed{0}&4&36&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Étape 3}]{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3/4\\L_2\leftarrow L_2-L_3/2\\L_4\leftarrow L_4+L_3}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\boxed{0}&4&1\\0&-1&\boxed{0}&-7&0\\0&0&-4&4&0\\0&0&\boxed{0}&40&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Étape 4}]{\substack{L_1\leftarrow L_1+11L_4/40\\L_2\leftarrow L_2+9L_4/40\\L_3\leftarrow L_3+4L_4/40}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\boxed{0}&1\\0&-1&0&\boxed{0}&0\\0&0&-4&\boxed{0}&0\\0&0&0&40&0\end{array}\right)$$

donc

$$x_1=1,\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad x_4=0.$$

Rang d'un système linéaire

Le nombre d'équations non triviales du système réduit en escalier obtenu par la méthode de GAUSS est le RANG r DE LA MATRICE $\mathbb{A}$, OU DU SYSTÈME (S).

Théorème 1.20

Un système carré $\mathbb{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ de n équations à n inconnues est compatible si et seulement si $\text{rg}(\mathbb{A})=\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$.

1. Si $\text{rg}(\mathbb{A})=n$ (*i.e.* si $\det(\mathbb{A})\neq 0$) alors $\text{rg}(\mathbb{A})=\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ et la solution est unique.
2. Si $\text{rg}(\mathbb{A})=\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])<n$ il y a une infinité de solutions.
3. Si $\text{rg}(\mathbb{A})\neq\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.

EXEMPLE

On veut résoudre les systèmes linéaires suivants de 2 équations et 2 inconnues :

$$① \begin{cases}x+y=1\\x-y=1\end{cases}\qquad ② \begin{cases}x+y=1\\2x+2y=2\end{cases}\qquad ③ \begin{cases}x+y=1\\2x+2y=1\end{cases}$$

Les matrices augmentées associées à chaque système sont

$$① [\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&-1&1\end{array}\right]\qquad ② [\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&2&2\end{array}\right]\qquad ③ [\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&2&1\end{array}\right]$$

et on a

① $\text{rg}(\mathbb{A})=\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])=2$ donc il existe une et une seule solution. En effet,

$$\begin{cases}x+y=1\\x-y=1\end{cases}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-L_1}\begin{cases}x+y=1\\-2y=0\end{cases}$$

ainsi la solution est $y=0$ et $x=1$;

② $\text{rg}(\mathbb{A})=\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])=1$ donc il existe une infinité de solutions. En effet,

$$\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=2\end{cases}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\begin{cases}x+y=1\\0=0\end{cases}$$

ainsi la solution est $y=\kappa$ et $x=1-\kappa$ pour tout $\kappa\in\mathbb{R}$;

③ $\text{rg}(\mathbb{A})=1$ et $\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])=2$ donc il n'y a pas de solution. En effet

$$\begin{cases} x+y=1\\ 2x+2y=1\end{cases} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x+y=1\\ 0=-1\end{cases}$$

et la dernière équation est impossible.

Système de Cramer et méthode de Cramer

Un SYSTÈME est dit DE CRAMER s'il a une solution, et une seule.

Propriété 1.21

Considérons un système carré d'ordre n à coefficients réels. Le système est de CRAMER si une des conditions équivalentes suivantes est remplie :

1. $\mathbb{A}$ est inversible;
2. $\text{rg}(\mathbb{A})=n$;
3. le système homogène $\mathbb{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ admet seulement la solution nulle.

Méthode de CRAMER : la solution d'un système de CRAMER d'écriture matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ est donnée par

$$x_j=\frac{\det(\mathbb{A}_j)}{\det(\mathbb{A})},\qquad 1\le j\le n$$

où $\mathbb{A}_j$ est la matrice obtenue à partir de $\mathbb{A}$ en remplaçant la j-ème colonne par la colonne des seconds membres $\mathbf{b}$.
Cette formule est cependant d'une utilité pratique limitée à cause du calcul des déterminants qui est très coûteux.

EXEMPLE (SYSTÈME D'ORDRE 2)
On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

par la méthode de CRAMER. On a

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\mathbb{A}_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_1)=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$\mathbb{A}_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_2)=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

donc

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

EXEMPLE
On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

par la méthode de CRAMER. On a

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A})=2,$$

$$\mathbb{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_1)=-6,$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_2) = 10,$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_3) = 10,$$

donc

$$x = \frac{-6}{2} = -3, \qquad y = \frac{10}{2} = 5, \qquad z = \frac{10}{2} = 5.$$

Définition 1.22 (Cofacteur & comatrice)
Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \le i, j \le n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de $\mathbb{A}$. On appelle COFACTEUR de l'élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\det(\mathbb{A}_{ij})$. On appelle COMATRICE de $\mathbb{A}$ la matrice constituée des cofacteurs de $\mathbb{A}$.

EXEMPLE
Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors la matrice des cofacteurs de $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1.3.1 Calcul de la matrice inverse

$\mathbb{A}$ étant inversible, pour obtenir $\mathbb{A}^{-1}$ il suffit de résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ qui admet pour solution $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$. On peut alors calculer $\mathbb{A}^{-1}$ en résolvant n systèmes linéaires de termes sources $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $(0,0,0,\dots,1)$. Les méthodes suivantes résolvent ces n systèmes linéaires simultanément.

Première méthode.

1. On calcul la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$;
2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$;
3. on divise par $\det(\mathbb{A})$.

Cette méthode est quasi-impraticable dès que $n > 3$.

Deuxième méthode.

La matrice $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si on obtient par opérations élémentaires sur les lignes de $\mathbb{A}$ une matrice triangulaire sans zéros sur la diagonale ; non inversible si et seulement si on obtient une matrice triangulaire avec un zéro sur la diagonale. Si $\mathbb{A}$ est inversible, on effectue les mêmes opérations sur la matrice $[\mathbb{A}|\mathbb{I}_n]$ jusqu'à obtenir $[\mathbb{I}_n|\mathbb{A}^{-1}]$:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_n] \xrightarrow{\text{Opérations élémentaires}} [\mathbb{I}_n|\mathbb{A}^{-1}].$$

EXEMPLE
Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $\det(\mathbb{A}) = 4 \neq 0$ la matrice est inversible.

Première méthode : on a déjà calculé le déterminant de cette matrice ainsi que la matrice des cofacteurs, il suffit alors de calculer la transposée et on obtient

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode : on parvient au même résultat par transformations élémentaires :

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

EXEMPLE
Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $\det(\mathbb{A}) = 2 \neq 0$ la matrice est inversible.

Première méthode : on a déjà calculé le déterminant de cette matrice ainsi que la matrice des cofacteurs, il suffit alors de calculer la transposée et on obtient

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode : on parvient au même résultat par transformations élémentaires :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Exemple

Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det(\mathbb{A}) = ad - bc \neq 0$.

Première méthode : on a déjà calculé le déterminant de cette matrice ainsi que la matrice des cofacteurs, il suffit alors de calculer la transposée et on obtient

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode : on parvient au même résultat par transformations élémentaires :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a} L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a} b & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[]{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{d - \frac{c}{a} b} \\ L_2 = L_1 - \frac{ab}{ad-bc} L_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 + \frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & d - \frac{c}{a} b & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[]{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{a} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{d - \frac{c}{a} b} L_2 = \frac{a}{ad-cb} L_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer l'inverse de la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Première méthode.

1. On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

3. on divise par $\det(\mathbb{A})$:

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode.

$$
\begin{aligned}
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{0} & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{0} & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) = [\mathbb{I}_3|\mathbb{A}^{-1}].
\end{aligned}
$$

1.3.2 Système sur-déterminé

Si le système (S) a n équations et m inconnues avec $n > m$, on dit que le système est sur-déterminé. On considère alors (S') un sous-système carré d'ordre m qu'on peut résoudre par exemple par la méthode du pivot de Gauss. Parmi les solutions de ce système carré, on cherchera celles qui vérifient les équations de (S) qui n'apparaissent pas dans (S').

Exemple

Soit les systèmes linéaires de $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues

$$
(S_1) \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \qquad\qquad (S_2) \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 0 \end{cases}
$$

Prenons comme sous-système carré d'ordre $m = 2$ celui constitué des deux premières équations et résolvons-le :

$$
(S') \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases}
$$

Ce système admet une seule solution : $x = y = 1$.
On vérifie si cette solution satisfait l'équation de (S_1) qui n'apparaît pas dans (S') :

$$
x + 3y = 1 + 3 = 4
$$

donc $x = y = 1$ est l'unique solution de (S_1).
On vérifie si cette solution satisfait l'équation de (S_2) qui n'apparaît pas dans (S') :

$$
x + 3y = 1 + 3 = 4 \neq 0
$$

donc (S_2) n'admet pas de solution.

1.3.3 Système sous-déterminé

Un système est sous-déterminé si, après échelonnage, le nombre d'équations significatives est inférieur au nombre d'inconnues.

Équilibrage de réactions chimiques Du point de vue mathématique, équilibrer une réaction chimique signifie trouver des coefficients (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$), appelés coefficients stœchiométriques, qui satisfont certaines contraintes.
Toutes ces contraintes dépendent linéairement des coefficients stœchiométriques, ce qui amène tout naturellement à l'écriture d'un système linéaire.
Typiquement on aura n inconnues mais seulement $n - 1$ équations linéairement indépendantes : en effet, les coefficients stœchiométriques ne définissent pas des quantités absolues mais seulement les rapports entre les différents éléments. Par conséquent, si les coefficients trouvés équilibrent la réaction, alors tous les multiples entiers de ces coefficients équilibrent aussi la réaction.

EXEMPLE
Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le $\mathrm{Na_2}$ de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le 2OH à gauche venant de la soude et la $y\mathrm{H_2}$ venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner $w\mathrm{H_2O}$. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le $\mathrm{SO_4}$ se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.
En système cela devient

$$\begin{cases} x = 2z & [\mathrm{Na}] \\ x + 2y = 2w & [\mathrm{H}] \\ x + 4y = 4z + w & [\mathrm{O}] \\ y = z & [\mathrm{S}] \end{cases}$$

On trouve $z = y = \kappa$, $x = 2\kappa$ et $w = \kappa$ et l'équation est alors équilibrée. On peut alors poser $\kappa = 1$.

EXEMPLE
Considérons la réaction

$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

Notons x_1, x_2 et x_3 les coefficients stœchiométriques

$$x_1 H_2 + x_2 O_2 \to x_3 H_2O.$$

Les contraintes sont :

— la conservation du nombre d'atomes d'hydrogène : $2x_1 = 2x_3$,

— la conservation du nombre d'atomes d'oxygène : $2x_2 = x_3$.

On note qu'on a 3 inconnues mais seulement 2 équations linéairement indépendantes.
Pour résoudre le problème sans paramètres, fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_3 = 1$. On doit alors résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

On trouve alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Si nous voulons des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit de multiplier tous les coefficients par 2 et on a ainsi

$$2H_2 + 1O_2 \to 2H_2O.$$

1.3.4 Conclusion sur les systèmes rectangulaires

Théorème 1.23
Un système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m équations à n inconnues est compatible si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$.

1. Si le système a n équations et n inconnues, la matrice $\mathbb{A}$ est carrée d'ordre n et 3 situations peuvent se présenter :
   1.1. Si $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = n$ (*i.e.* si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$) alors $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ et la solution est unique.
   1.2. Si $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) < n$ il y a une infinité de solutions.
   1.3. Si $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) \neq \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.
2. Si le système a m équations et n inconnues avec $m > n$ alors 3 situations peuvent se présenter :

2.1. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = n$ la solution est unique.

2.2. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) < n$ il y a une infinité de solutions.

2.3. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.

3. Si le système a m équations et n inconnues avec $m < n$ alors 2 situations peuvent se présenter :

3.1. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \le m < n$ il y a une infinité de solutions.

3.2. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.

Remarque

Soit $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n,p}$ la matrice des coefficients du système (S). Alors

$$0 \le \text{rg}(\mathbb{A}) \le \min\{n, p\}$$
$$\text{rg}(\mathbb{A}) \le \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \le \min\{n, p+1\}.$$

EXEMPLE

1. n équations et n inconnues :

1.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \\ -4 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 3$ (car $\det(\mathbb{A}) \neq 0$) donc $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ et la solution est unique.

1.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -26 \\ -22 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.

1.3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -26 \\ -20 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 2 \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ donc il n'y a pas de solution.

2. m équations et n inconnues avec $m > n$:

2.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc la solution est unique.

2.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.

2.3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 2 \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ donc il n'y a pas de solution.

3. m équations et n inconnues avec $m < n$:

3.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.

3.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 1 \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc il n'y a pas de solution.

Astuce

Soit r le rang du système (S) et p le nombre d'inconnues.

— Si $r = p$, (S) a une unique solution,

— si $r < p$, (S) a une infinité de solutions. Les r inconnues qui figurent au début des r équations issues de la méthode du pivot de GAUSS sont les inconnues principales. Elles peuvent se calculer de façon unique en fonction des autres $p - r$ inconnues.

Le choix des inconnues principales d'un système est arbitraire, mais leur nombre est toujours le même.

EXEMPLE

On cherches toutes les solutions du système linéaire homogène

$$(S)\quad\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

Le système étant homogène, il est inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de GAUSS :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&3&2&4\\2&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&3\\0&-2&-5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&3\\0&0&-6&0\end{pmatrix}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}\kappa,-\frac{3}{2}\kappa,0,\kappa)$ avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Astuce

Pour résoudre un système (S) de m équations à n inconnues où $m>n$ on considère un sous-système carré (S') de n équations à n inconnues et on résout ce système :

- si (S') n'admet pas de solution, alors (S) non plus;
- si (S') admet une unique solution $(c_1,c_2,\dots,c_n)$, alors on vérifie si cette solution vérifie les autres $m-n$ équations du système (S) :
  - si oui, alors (S) admet l'unique solution $(c_1,c_2,\dots,c_n)$,
  - si non, alors (S) n'admet pas de solution;
- si (S') admet une infinité de solutions, on cherche parmi ces solutions celles qui vérifient également les autres équations de (S).

EXEMPLE

Considérons le système de 4 équations à 3 inconnues

$$(S)\quad\begin{cases} x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x-y+2z=0,\\ 3x+2y-4z=1,\end{cases}$$

Pour résoudre (S), on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S')\quad\begin{cases} x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x-y+2z=0,\end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de GAUSS

$$\begin{cases} x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x-y+2z=0,\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\begin{cases} x+y+z=3,\\ y+2z=3,\\ 3z=3,\end{cases}$$

Ce sous-système admet l'unique solution $(1,1,1)$. On étudie alors si elle est aussi solution de l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1,1,1)$ on a $3x+2y-4z=1$ donc le triplet $(1,1,1)$ est solution de (S) et c'est l'unique.

1.4 Valeurs propres et vecteurs propres

Une matrice peut être représentée par ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Cette représentation est appelée *décomposition en valeurs propres*. Pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, la notion clé est la résolution de l'équation

$$\mathbb{A}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$$

où $\mathbf{v}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbb{A}$ et λ est la valeur propre correspondante. λ et $\mathbf{v}$ sont appelés un couple valeur propre-vecteur propre.
Dans cette partie, nous allons explorer la relation entre une matrice et sa décomposition en vecteurs propres.

1.4.1 Produit matrice-vecteur et lien avec la décomposition en valeurs propres

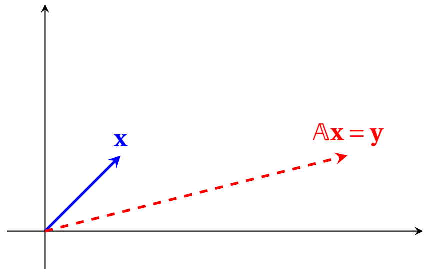
Lorsque on multiplie une matrice et un vecteur, le résultat est un autre vecteur. De cette façon, la matrice $\mathbb{A}$ peut être considérée comme une transformation qui transforme un vecteur $\mathbf{x}$ en un vecteur $\mathbf{y}$.
Par exemple, si $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on peut visualiser cette multiplication comme suit.

Dans le dessin ci-contre,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Lorsque on multiplie une matrice et son vecteur propre, c'est comme si le vecteur propre venait d'être multiplié par un nombre mais la direction n'est pas modifiée : il est juste mis à l'échelle et le facteur de mise à l'échelle est la valeur propre.

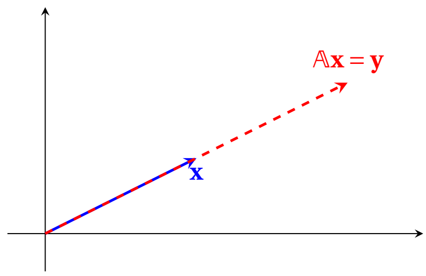
Dans le dessin ci-contre on a la même matrice mais

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x},$$

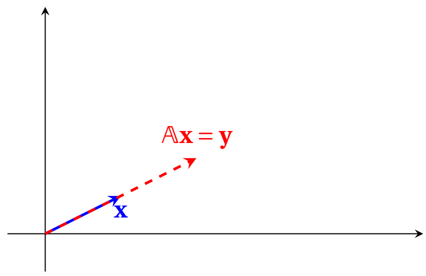
on dit que $\lambda = 2$ est une valeur propre pour $\mathbb{A}$ et $\mathbf{x} = (2, 1)$ une vecteur propre associée à cette valeur propre.



Bien sûr,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est encore une vecteur propre associée à la valeur propre $\lambda = 2$ comme on voit sur la figure ci-contre.



1.4.2 Définitions et propriétés

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $\mathbb{A}$ s'il existe un vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tel que

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

où $\mathbb{A}$ est une matrice carrée d'ordre n donnée.
On peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

qui est un système linéaire homogène de n équations. Si $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \neq 0$ pour tout λ, ce système admet une et une seule solution, le vecteur $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Une solution $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ existe si et seulement si $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0$.

— On appelle POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DE LA MATRICE $\mathbb{A}$ le polynôme défini par

$$p_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n.$$

Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme admet **exactement** n racines (comptées avec leur multiplicité).
Dans $\mathbb{R}$, tout polynôme admet **au plus** n racines (comptées avec leur multiplicité).

— On appelle VALEUR PROPRE DE $\mathbb{A}$ tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $p(\lambda) = 0$.
La multiplicité de la valeur propre est dite "multiplicité algébrique".
Dans $\mathbb{C}$, toute matrice carrée d'ordre n admet exactement n valeurs propres (distinctes ou confondues).
Dans $\mathbb{R}$, toute matrice carrée d'ordre n admet donc au plus n valeurs propres (distinctes ou confondues).

— On appelle SPECTRE DE $\mathbb{A}$ l'ensemble de ses valeurs propres et on le note $\sigma(\mathbb{A})$.

— On appelle RAYON SPECTRALE DE $\mathbb{A}$ la valeur propre de module maximale et on le note $\varrho(\mathbb{A})$.

— On dit que deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ carrées d'ordre n sont semblables s'il existe une matrice $\mathbb{P}$ carrées d'ordre n inversible telle que $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P}$. On peut démonter que

  — $p_{\mathbb{A}}(\lambda) = p_{\mathbb{B}}(\lambda)$;

  — $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$.

— On appelle VECTEUR PROPRE DE $\mathbb{A}$ ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ tout vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tel que $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

— L'ensemble des VECTEURS PROPRES DE $\mathbb{A}$ ASSOCIÉS À LA VALEUR PROPRE λ engendre un espace vectoriel. La dimension de cet espace vectoriel est dite "multiplicité géométrique" et elle toujours inférieure ou égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante.

On peut démonter que

1. $\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, (donc $\det(\mathbb{A}) = 0$ ssi il existe une valeur propre nulle) ;
2. $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$;
3. $\sigma(\mathbb{A}^T) = \sigma(\mathbb{A})$ et $\sigma(\mathbb{A}^H) = \sigma(\mathbb{A})$;
4. λ est une valeur propre de $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n\times n} \iff \bar{\lambda}$ est une valeur propre de $\mathbb{A}^H$.

Une matrice carrée $\mathbb{A}$ d'ordre n est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. On peut démonter que

1. si le polynôme caractéristique a exactement n racines distinctes deux à deux alors $\mathbb{A}$ est diagonalisable et $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{P}$ avec $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et les colonnes de $\mathbb{P}$ sont les vecteurs propres de $\mathbb{A}$;
2. $\mathbb{A}^p = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{D}^p\mathbb{P}$ et $\mathbb{D}^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p)$;
3. si la "multiplicité géométrique" de l'espace vectoriel associé à une valeur propre est strictement inférieur à la "multiplicité algébrique" de cette valeur propre, la matrice n'est pas diagonalisable ;
4. si $\mathbb{A}$ est orthogonale alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Par conséquent, une matrice peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE
Considérons la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

— *Calcul des valeurs propres*
Le polynôme caractéristique de $\mathbb{A}$ est

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\Big((2-\lambda)(1-\lambda)-1\Big) - (1-\lambda) = (1-\lambda)\Big((2-\lambda)(1-\lambda)-2\Big) = (1-\lambda)\Big(-3\lambda+\lambda^2\Big) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3) \end{aligned}$$

Nous avons trouvé 3 valeurs propres :

$$\lambda_1 = 0 \quad < \quad \lambda_2 = 1 \quad < \quad \lambda_3 = 3.$$

— *Calcul des vecteurs propres*

— Calcul des vecteurs propres associés à la valeurs propre λ_1.
On cherche $\mathbf{x}$ tel que

$$(\mathbb{A}-\lambda_1\mathbb{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix}1-\lambda_1 & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda_1 & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss (le système étant homogène, on n'écrit pas le second membre) on a

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 2}]{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On obtient le système linéaire triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc $x_3=\kappa\in\mathbb{R}$, $x_2=x_3=\kappa$ et $x_1=x_2=\kappa$ donc

$$\mathbf{x}=\kappa\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Pour faire simple, on choisira $\kappa=1$.

— Calcul des vecteurs propres associés à la valeurs propre λ_2.
On cherche $\mathbf{x}$ tel que

$$(\mathbb{A}-\lambda_2\mathbb{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix}1-\lambda_2 & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda_2 & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss on a

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{L_2\leftarrow L_1} \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 2}]{L_3\leftarrow L_3-L_2} \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On obtient le système linéaire triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc $x_3=\kappa\in\mathbb{R}$, $x_2=0$ et $x_1=x_2-x_3=-\kappa$ donc

$$\mathbf{x}=\kappa\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Pour faire simple, on choisira $\kappa=1$.

— Calcul des vecteurs propres associés à la valeurs propre λ_3.
On cherche $\mathbf{x}$ tel que

$$(\mathbb{A}-\lambda_3\mathbb{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix}1-\lambda_3 & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda_3 & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss on a

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{L_2\leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 2}]{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On obtient le système linéaire triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $x_3 = \kappa \in \mathbb{R}$, $x_2 = -2x_3 = -2\kappa$ et $x_1 = -x_2/2 = \kappa$ donc

$$\mathbf{x} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour faire simple, on choisira $\kappa = 1$.

— *Diagonalisation*
On peut alors écrire les valeurs propres et les vecteurs propres dans deux matrices

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et vérifier que $\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$, c'est-à-dire que $\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{D}$:

$$\mathbb{A}\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Une matrice carrée $\mathbb{A}$ d'ordre n n'est pas toujours diagonalisable. En revanche, elle est toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$, *i.e.* elle est semblable à une matrice triangulaire et l'on a le résultat suivant :

Proposition 1.24 (Décomposition de Schur)
Pour toute matrice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ il existe une matrice $\mathbb{U}$ carrées d'ordre n unitaire telle que $\mathbb{T} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U}^H\mathbb{A}\mathbb{U}$ avec

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{12} & t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ayant noté λ_i les valeurs propres de $\mathbb{A}$. Les matrices $\mathbb{U}$ et $\mathbb{T}$ ne sont pas forcement uniques.

On peut démonter que

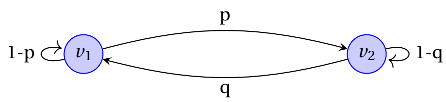
1. si $\mathbb{A}$ est hermitienne alors $\mathbb{T}$ est toujours une matrice diagonale et les colonnes de $\mathbb{U}$ sont les vecteurs propres de $\mathbb{A}$;
2. si de plus $\mathbb{A}$ est normale alors on a la décomposition spectrale $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^H = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$

1.4.3 Applications

Marche aléatoire entre deux états (chaîne de Markov)

Lorsqu'un système n'ayant que deux états possibles 1 et 2 évolue par étapes successives aléatoires et indépendantes, on dit qu'il suit une marche aléatoire entre ses deux états. Soit p la probabilité qu'il passe de 1 à 2 et q la probabilité qu'il passe de 2 à 1. On peut alors lui associer :

— un graphe probabiliste qui schématise les échanges entre 1 et 2 par des arêtes orientées, pondérées par les probabilités de passer d'un état à l'autre ou de rester au même état,



— une matrice de transition $\mathbb{T}$ carrée d'ordre 2 telle que le coefficient t_{ij} est égal à la probabilité

— de passer de l'état j à l'état i lorsque $i \neq j$;
— de rester à l'état i lorsque $i = j$.

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$$

Une matrice de transition est dite stochastique : ses coefficients appartiennent à l'intervalle $[0;1]$ et la somme des coefficients de chacune de ses colonnes est égale à 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

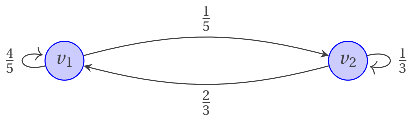
— l'événement A_n : « le système est dans l'état A à l'étape n » ;
— l'événement B_n : « le système est dans l'état B à l'étape n » ;
— les probabilités $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$ telles que $a_n + b_n = 1$.

Le vecteur $\mathbf{u}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelée la **répartition de probabilité à l'étape** n et l'on a

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbb{T}\mathbf{u}^{(n)} = \mathbb{T}^n\mathbf{u}^{(0)}$$

Exemple

Akwa, un chien ayant une puce, rencontre Bali, un autre chien. Chaque seconde, la puce reste sur un chien ou va sur l'autre. On a un système à deux états : l'état 1 (la puce est sur Akwa) et l'état 2 (la puce est sur Bali) dont l'évolution est une marche aléatoire entre ces deux états.
Supposons que chaque seconde soit la puce va d'Akwa (état 1) à Bali (état 2) une fois sur cinq, soit elle va de Bali à Akwa deux fois sur trois, soit elle reste sur le même chien. Alors, la marche aléatoire a pour graphe



et matrice de transition :

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/3 \\ 1/5 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Initialement, la puce est sur Akwa donc $\mathbf{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Après une seconde, la répartition de probabilité est

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbb{T}\mathbf{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/3 \\ 1/5 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Après deux secondes, la répartition de probabilité est

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbb{T}\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/3 \\ 1/5 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58/75 \\ 17/75 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{u}^{(n+1)}$, il faut calculer $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{T}\mathbf{u}^{(n)} = \mathbb{T}(\lim_{n\to+\infty}\mathbf{u}^{(n)})$.
Supposons qu'une telle limite existe et notons-la $\mathbf{u}$, alors $\mathbf{u}$ vérifie $\mathbf{u} = \mathbb{T}\mathbf{u}$, autrement dit $\lambda = 1$ est une valeur propre de $\mathbb{T}$ et $\mathbf{u}$ est le vecteur propre unitaire correspondant.
Le vecteur propre associé à $\lambda = 1$ est donné par

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $3y_1 = 10y_2$ soit encore $\mathbf{x} = (10\kappa, 3\kappa)^T$. La distribution normalisée est donnée par les composantes du vecteur propre unitaire correspondant, c'est-à-dire

$$\mathbf{x} = \frac{1}{10\kappa + 3\kappa}\begin{pmatrix} 10\kappa \\ 3\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{13} \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{10}{13}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{3}{13}.$$

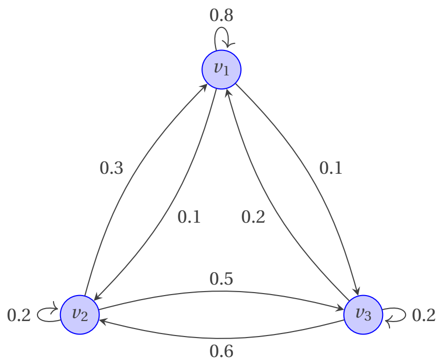
On généralise ces définitions et ces propriétés à des marches aléatoires entre trois états ou plus. Ainsi, le coefficient t_{ij} de la matrice de transition $\mathbb{T}$ est égal à la probabilité de passer de l'état j à l'état i.

Exemple

v_1, v_2 et v_3 sont trois villes. Des trafiquants de drogue prennent leur marchandise le matin dans n'importe laquelle de ces villes pour l'apporter le soir dans n'importe quelle autre. On notera p_{ij} la probabilité qu'une marchandise prise le matin dans la ville v_j soit rendue le soir dans la ville v_i. On construit ainsi la matrice $\mathbb{P} \in \mathscr{M}_3([0;1])$, appelée *matrice de transition de la chaîne de* Markov. On remarque que la somme des composantes de chaque vecteur colonne est égale à 1.
Supposons que $\mathbb{A}$ soit connue et vaille

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Les trafiquants se promenant de ville en ville, il peut être utile de visualiser leurs déplacements par le diagramme de transition suivant :



On notera $x_i^{(k)}$ la proportion de trafiquants qui se trouvent au matin du jour k dans la ville v_i. On montre que le vecteur $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})^T$ vérifie la relation

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{A}\mathbf{x}^{(k)}$$

et donc par une récurrence immédiate

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{A}^k \mathbf{x}^{(0)}.$$

Supposons que le chef de la mafia locale dispose de 1000 trafiquants qui partent tous le matin du jour 0 de la ville v_1. Quelle sera la proportion de trafiquants dans chacune des villes au bout d'une semaine ? d'un an ?

Méthode directe Il s'agit de calculer des puissances successives de $\mathbb{A}$ avec $\mathbf{x}^{(0)} = (1,0,0)^T$. Au bout d'une semaine on a

$$\mathbf{x}^{(7)} = \mathbb{A}^7 \cdot \mathbf{x}^{(0)} \simeq (56.4\%, 22.6\%, 21\%)^T.$$

Au but d'un an les proportions ne changent guère :

$$\mathbf{x}^{(365)} = \mathbb{A}^{365} \cdot \mathbf{x}^{(0)} \simeq (55.7\%, 22.9\%, 21.3\%)^T.$$

Le calcul de la puissance de $\mathbb{A}$ est lourd car il s'agit de 365 multiplications matricielles.

Méthode par diagonalisation Si on diagonalise $\mathbb{A}$ *i.e.* si on calcule $\mathbb{D}$ et $\mathbb{P}$ telles que $\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$ alors

$$\mathbf{x}^{(365)} = \mathbb{A}^{365} \cdot \mathbf{x}^{(0)} = \underbrace{(\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1})(\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}) \cdots (\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1})}_{365 \text{ fois}} \cdot \mathbf{x}^{(0)} = \mathbb{P}\mathbb{D}^{365}\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbf{x}^{(0)}.$$

Le calcul de la puissance de $\mathbb{D}$ est immédiat car

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2\sqrt{5}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \implies \mathbb{D}^{365} = \begin{pmatrix} 1^{365} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+2\sqrt{5}}{10}\right)^{365} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-2\sqrt{5}}{10}\right)^{365} \end{pmatrix}$$

```
clc; clear all;
A = [0.8 0.3 0.2; 0.1 0.2 0.6; 0.1 0.5 0.2]
x_init=[1;0;0]
n=365

% Methode directe
x_365=A^n*x_init

% Methode par diagonalisation
[V,D] = eig(A);
x_365=V*D^n*inv(V)*x_init
```

Décomposition en valeurs singulières

Soit $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ une matrice rectangulaire. Un théorème démontré officiellement en 1936 par C. ECKART et G. YOUNG affirme que toute matrice rectangulaire $\mathbb{A}$ se décompose sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{S}\mathbb{V}^T$$

avec $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ des matrices orthogonales (*i.e.* $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^T$ et $\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^T$) et $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ une matrice diagonale qui contient les r valeurs singulières de $\mathbb{A}$, $r = \min\{n, p\}$, $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_r \ge 0$. Ce qui est remarquable, c'est que n'importe quelle matrice admet une telle décomposition alors que la décomposition en valeurs propres (la diagonalisation d'une matrice) n'est pas toujours possible.
Notons $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{v}_i$ les vecteurs colonne des matrices $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$. La décomposition s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{S}\mathbb{V}^T &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{n\times p} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \\ \mathbf{v}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p^T \end{pmatrix}}_{p\times p} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r \end{pmatrix}}_{n\times r} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}}_{r\times r} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \end{pmatrix}}_{r\times p} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \underbrace{\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i^T}_{r\times r}
\end{aligned}$$

Pour calculer ces trois matrices on remarque que $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{S}\mathbb{V}^T = \mathbb{U}\mathbb{S}\mathbb{V}^{-1}$ et $\mathbb{A}^T = \mathbb{V}\mathbb{S}\mathbb{U}^T = \mathbb{V}\mathbb{S}\mathbb{U}^{-1}$ ainsi, pour $i = 1, \dots, r$, en multipliant par $\mathbb{A}$ à gauche $\mathbb{A}^T\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i$ et en multipliant par $\mathbb{A}$ à droite $\mathbb{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\mathbb{A}^T\mathbf{u}_i &= \sigma_i\mathbb{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i^2\mathbf{u}_i, \qquad \text{pour } i = 1, \dots, r \\
\mathbb{A}^T\mathbb{A}\mathbf{v}_i &= \sigma_i\mathbb{A}^T\mathbf{u}_i = \sigma_i^2\mathbf{v}_i, \qquad \text{pour } i = 1, \dots, r
\end{aligned}$$

ainsi les σ_i^2 sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}\mathbb{A}^T$ et les $\mathbf{u}_i$ les vecteurs propres associés mais aussi les σ_i^2 sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$ et les $\mathbf{v}_i$ les vecteurs propres associés (attention, étant des valeurs propres, ils ne sont pas définis de façon unique).
On peut exploiter cette décomposition pour faire des économies de mémoire.

— Pour stocker la matrice $\mathbb{A}$ nous avons besoin de $n \times p$ valeurs.
— Pour stocker la décomposition SVD nous avons besoin de $n \times r + r + r \times p = (n+p+1)r > (n+p+1)r$ valeurs donc à priori on ne fait pas d'économies de stockage. Cependant, s'il existe $s < r$ tel que $\sigma_s = \sigma_{s+1} = \dots = \sigma_r = 0$, alors nous n'avons plus besoin que de $n \times s + s + s \times p = (n+p+1)s$ valeurs. Si $s < np/(n+p+1)$ on fait des économies de stockage.

Idée de la compression : si nous approchons $\mathbb{A}$ en ne gardant que les premiers s termes de la somme (sachant que les derniers termes sont multipliés par des σ_i plus petits, voire nuls)

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \underbrace{\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i^T}_{\in\mathbb{R}^{n\times p}}, \qquad \text{où } s < r$$

— pour stocker la matrice $\widetilde{\mathbb{A}}$ nous avons toujours besoin de $n \times p$ valeurs,
— pour stocker la décomposition SVD nous avons besoin de $n \times s + s + s \times p = (n+p+1)s$ valeurs. Si $s < np/(n+p+1)$ on fait des économies de stockage.

1.4.4 Localisation des valeurs propres

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n.
Une première estimation de la localisation du spectre d'une matrice dans le plan complexe est donnée par

$$|\lambda| \le ||\mathbb{A}|| \qquad \forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$$

pour toute norme $||\cdot||$ consistante. Cette estimation dit que toutes les valeurs propres appartiennent au cercle de rayon $||\mathbb{A}||$

centré dans l'origine du plan complexe :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{O} =\subset \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \le ||\mathbb{A}|| \}.$$

Parmi les normes les plus utilisées nous avons

$$||\mathbb{A}||_1 = \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = ||\mathbb{A}^T||_\infty$$

$$||\mathbb{A}||_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = ||\mathbb{A}^T||_1$$

Une autre estimation est donnée par les disques de GERSHGORIN. Les disques de GERSHGORIN $\mathscr{R}_i$ et $\mathscr{C}_j$ associés à la i-ème ligne et à la j-ème colonne sont respectivement définis par

$$\mathscr{R}_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \right\}, \qquad \mathscr{C}_j = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|z - a_{jj}\right| \le \sum_{\substack{i=1,\\ i\ne j}}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

Les disques de GERSHGORIN peuvent servir à localiser les valeurs propres d'une matrice, comme le montre la proposition suivante

Proposition 1.25
Toutes les valeurs propres d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ appartiennent à la région du plan complexe définie par l'intersection des deux régions constituées respectivement de la réunion des disques des lignes et des disques des colonnes :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{R}_i \right)}_{\mathscr{S}_\mathscr{R}} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathscr{C}_j \right)}_{\mathscr{S}_\mathscr{C}}.$$

Si de plus m disques des lignes (ou des colonnes), $1 \le m \le n$, sont disjoints de la réunion des $n - m$ autres disques, alors leur réunion contient exactement m valeurs propres.

Rien n'assure qu'un disque contienne des valeurs propres, à moins qu'il ne soit isolé des autres.
Remarquer qu'on peut déduire que toutes les valeurs propres d'une matrice à diagonale strictement dominante sont non nulles.

EXEMPLE
Considérons la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nous avons les estimations suivantes :

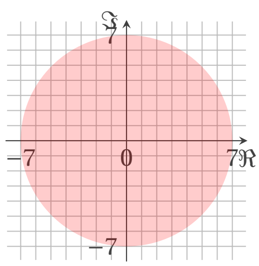
1. Si on considère les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ nous avons

$$||\mathbb{A}||_1 = \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1\dots n} \{\, |3| + |-1| + |0|; |2| + |2| + |1|; |3| + |-1| + |3| \,\} = \max_{j=1\dots n} \{4; 5; 7\} = 7$$

$$||\mathbb{A}||_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1\dots n} \{\, |3| + |2| + |3|; |-1| + |2| + |-1|; |0| + |1| + |3| \,\} = \max_{i=1\dots n} \{8; 4; 4\} = 8$$

donc toutes les valeurs propres appartiennent au cercle de rayon 7 centré dans l'origine du plan complexe :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{O} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 7 \}.$$



2. Disques des lignes :

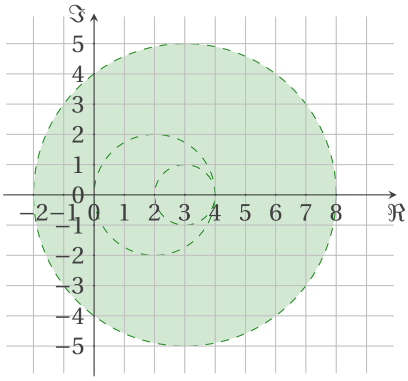
$$\mathscr{R}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{11}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq 1}}^{n} |a_{1j}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |2| + |3| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 5 \},$$

$$\mathscr{R}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{22}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq 2}}^{n} |a_{2j}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq |-1| + |-1| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 2 \},$$

$$\mathscr{R}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{33}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq 3}}^{n} |a_{3j}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |0| + |1| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 1 \}.$$

Toutes les valeurs propres appartiennent à la réunion des disques des lignes :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{S}_{\mathscr{R}} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3 = \mathscr{R}_1.$$



3. Disques des colonnes :

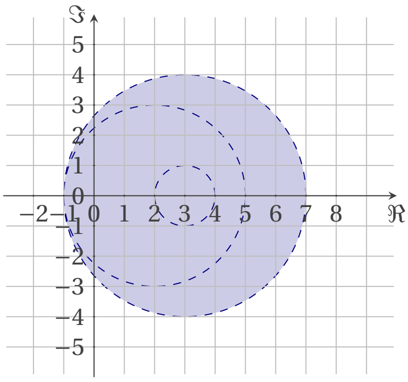
$$\mathscr{C}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{11}| \leq \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq 1}}^{n} |a_{i1}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |-1| + |0| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 1 \},$$

$$\mathscr{C}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{22}| \leq \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq 2}}^{n} |a_{i2}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq |2| + |1| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 3 \},$$

$$\mathscr{C}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{33}| \leq \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq 3}}^{n} |a_{i3}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |3| + |-1| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 4 \}.$$

Toutes les valeurs propres appartiennent à la réunion des disques des colonnes :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{S}_{\mathscr{C}} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 = \mathscr{C}_3.$$



4. Toutes les valeurs propres appartiennent à l'intersection de ces trois régions :

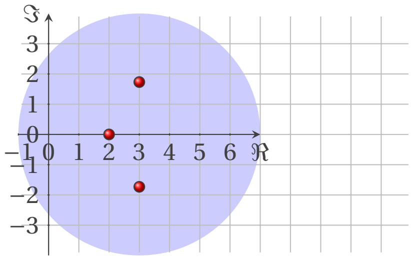
$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{S}_{\mathscr{C}} \cap \mathscr{S}_{\mathscr{R}} \cap \mathscr{S}_{\mathscr{C}} = \mathscr{C}_3$$

En effet, on a

$$p_{\mathbb{A}}(\lambda) = -\lambda^3+8\lambda^2-24\lambda+24 = -(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+12)$$

donc

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3+i\sqrt{3} \qquad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 3-i\sqrt{3}.$$



Exemple

Considérons la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

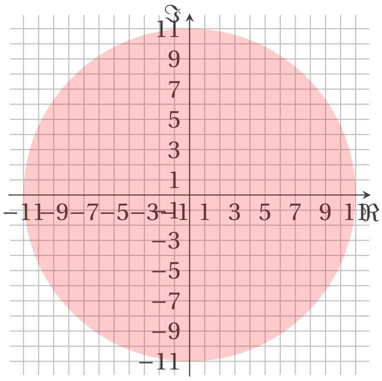
Nous avons les estimations suivantes :

1. Si on considère les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ nous avons

$$||\mathbb{A}||_1 = \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1\dots n} \{\,|10|+|-1|+|0|;|2|+|2|+|1|;|3|+|-1|+|3|\,\} = \max_{j=1\dots n} \{11;5;7\} = 11$$
$$||\mathbb{A}||_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1\dots n} \{\,|10|+|2|+|3|;|-1|+|2|+|-1|;|0|+|1|+|3|\,\} = \max_{i=1\dots n} \{15;4;4\} = 15$$

donc toutes les valeurs propres appartiennent au cercle de rayon 11 centré dans l'origine du plan complexe :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{O} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 11 \,\}.$$



2. Disques des lignes :

$$\mathscr{R}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-a_{11}| \le \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne 1}}^{n} |a_{1j}| \right\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-10| \le |2|+|3| \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-10| \le 5 \,\},$$

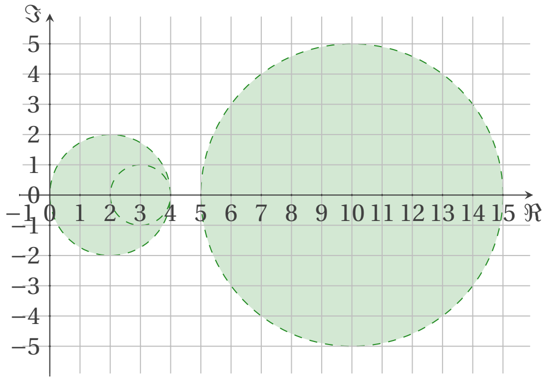
$$\mathscr{R}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-a_{22}| \le \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne 2}}^{n} |a_{2j}| \right\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le |-1|+|-1| \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le 2 \,\},$$

$$\mathscr{R}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-a_{33}| \le \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne 3}}^{n} |a_{3j}| \right\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \le |0|+|1| \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \le 1 \,\}.$$

Toutes les valeurs propres appartiennent à la réunion des disques des lignes :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{S}_{\mathscr{R}} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3.$$

De plus, comme le disque $\mathscr{R}_1$ est disjoint de la réunion $\mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3$, une et une seule valeur propre est contenue dans $\mathscr{R}_1$ et les deux autres valeurs propres appartiennent à $\mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3 = \mathscr{R}_2$.



3. Disques des colonnes :

$$\mathscr{C}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{11}| \leq \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq 1}}^{n} |a_{i1}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-10| \leq |-1| + |0| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-10| \leq 1 \},$$

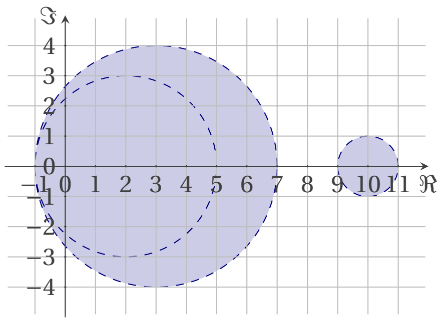
$$\mathscr{C}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{22}| \leq \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq 2}}^{n} |a_{i2}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq |2| + |1| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 3 \},$$

$$\mathscr{C}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{33}| \leq \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq 3}}^{n} |a_{i3}| \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |3| + |-1| \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 4 \}.$$

Toutes les valeurs propres appartiennent à la réunion des disques des colonnes :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{S}_{\mathscr{C}} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3.$$

De plus, comme le disque $\mathscr{C}_1$ est disjoint de la réunion $\mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3$, une et une seule valeur propre est contenue dans $\mathscr{C}_1$ et les deux autres valeurs propres appartiennent à $\mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 = \mathscr{C}_3$.



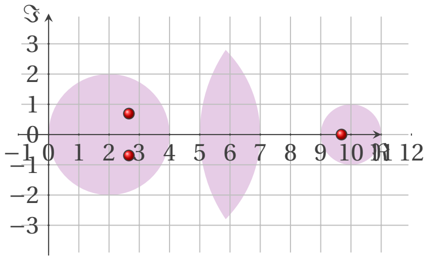
4. Toutes les valeurs propres appartiennent à l'intersection de ces trois régions :

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathscr{S}_{\mathscr{O}} \cap \mathscr{S}_{\mathscr{R}} \cap \mathscr{S}_{\mathscr{C}}$$

En effet, on a

$$\lambda_1 \simeq 9.6876 \qquad \lambda_2 \simeq 2.6562 + 0.6928i \qquad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} \simeq 2.6562 - 0.6928i.$$

```
A=[10 2 3; -1 2 -1; 0 1 3]
eig(A)
```



1.5 Exercices

1.5.1 Calcul matriciel

Exercice 1.1 (Écriture matricielle)
On considère les matrices $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbb{B} = (b_{ij})$ et $\mathbb{C} = (c_{ij})$ carrées d'ordre 4 définies par $a_{ij} = i^2$, $b_{ij} = i + j$, $c_{ij} = \min\{\,i; j\,\}$. Écrire ces matrices sous la forme de tableaux de nombres.

Correction

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

```
A=zeros(4);
for i=1:4
   A(i,:)=i^2;
end
A
```

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

```
B=zeros(4);
for i=1:4
   for j=1:4
      B(i,j)=i+j;
   end
end
B
```

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
C=zeros(4);
for i=1:4
   for j=1:4
      C(i,j)=min(i,j);
   end
end
C
```

Exercice 1.2
Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{A} - 2\mathbb{B} - \mathbb{C} = \mathbb{O}$.
2. Trouver une matrice $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{C} - 4\mathbb{D} = \mathbb{O}$.

Correction

1. On cherche $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{C} = \mathbb{A} - 2\mathbb{B}$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2\times1 & 2-2\times2 \\ 0-2\times0 & 4-2\times1 \\ 1-2\times1 & -1-2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

   $\mathbb{A} - 2\mathbb{B} - \mathbb{C} = \mathbb{O}$.

2. On cherche $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{D} = \frac{1}{4}(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{C}) = \frac{1}{4}(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{A} - 2\mathbb{B}) = \frac{1}{2}\mathbb{A} - \frac{1}{4}\mathbb{B}$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times(-3) - \frac{1}{4}\times1 & \frac{1}{2}\times2 - \frac{1}{4}\times2 \\ \frac{1}{2}\times0 - \frac{1}{4}\times0 & \frac{1}{2}\times4 - \frac{1}{4}\times1 \\ \frac{1}{2}\times1 - \frac{1}{4}\times1 & \frac{1}{2}\times(-1) - \frac{1}{4}\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 & 1/2 \\ 0 & 7/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

```
A=[-3 2; 0 4; 1 -1]
B=[1 2; 0 1; 1 1]
C=A-2*B
D=1/4*(A+B+C)
```

Exercice 1.3

Effectuer les multiplications suivantes

$$\begin{pmatrix}3&1&5\\2&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\3&0&1&8\\0&-5&3&4\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4&-3\end{pmatrix}.$$

Correction

$$\overbrace{\begin{pmatrix}3&1&5\\2&7&0\end{pmatrix}}^{2\times3}\overbrace{\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\3&0&1&8\\0&-5&3&4\end{pmatrix}}^{3\times4}=\overbrace{\begin{pmatrix}3\times2+1\times3+5\times0 & 3\times1+1\times0+5\times(-5) & 3\times(-1)+1\times1+5\times3 & 3\times0+1\times8+5\times4\\ 2\times2+7\times3+0\times0 & 2\times1+7\times0+0\times(-5) & 2\times(-1)+7\times1+0\times3 & 2\times0+7\times8+0\times4\end{pmatrix}}^{2\times4}$$

$$=\begin{pmatrix}9&-220&13&28\\25&2&5&560\end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}}^{1\times3}\overbrace{\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}}^{3\times1}=\overbrace{\begin{pmatrix}-3\times2+0\times(-4)+5\times(-3)\end{pmatrix}}^{1\times1}=-21$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}}^{3\times1}\overbrace{\begin{pmatrix}2&-4&-3\end{pmatrix}}^{1\times3}=\overbrace{\begin{pmatrix}-3\times2&-3\times(-4)&-3\times(-3)\\0\times2&0\times(-4)&0\times(-3)\\5\times2&5\times(-4)&5\times(-3)\end{pmatrix}}^{3\times3}=\begin{pmatrix}-6&12&9\\0&0&0\\10&-20&-15\end{pmatrix}$$

```
[3 1 5; 2 7 0]*[2 1 -1 0; 3 0 1 8; 0 -5 3 4]
[-3 0 5]*[2 -4 -3]' % ce qui equivaut a [-3 0 5]*[2; -4; -3]
[-3 0 5]'*[2 -4 -3] % ce qui equivaut a [-3; 0; 5]*[2 -4 -3]
```

Exercice 1.4

Soit les matrices

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\x\\x^2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

1. Calculer tous les produits possibles à partir de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.
2. Calculer $(\mathbb{A}-\mathbb{I})^7$ et en extraire le coefficient en position $(2,3)$.
3. Calculer $\mathbb{A}^{-1}$ et la trace de $\mathbb{A}^{-1}$ (*i.e.* la somme des coefficients sur la diagonale).

Correction

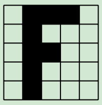
Sans utiliser un module spécifique, il n'est pas possible de faire des calculs formels avec MATLAB/Octave, donc on ne peut pas utiliser $\mathbf{u}$ sans donner une valeur numérique à x.

```
A=[1 2 3; -1 0 1; 0 1 0] % 3x3
B=[2 -1 0; -1 0 1] % 2x3
v=[1;0;1] % 3x1
% Les produits possibles sont
B*A % (2x3)*(3x3) -> 2x3
A*v % (3x3)*(3x1) -> 3x1
```

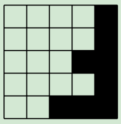
```
B*v % (2x3)*(3x1) -> 2x1
%
Id=eye(3)
D=(A-Id)^7 % c'est bien ^7 (produit matriciel) et non .^7
D(2,3) % -> 153
%
invA=A^(-1) % ou inv(A)
sum(diag(invA))
```

Exercice 1.5 (Multiplication matricielle appliquée)

On modélise une image en noir et blanc formée de 25 pixels par une matrice de 5 lignes et 5 colonnes, dans laquelle 0 correspond à un pixel blanc et 1 à un pixel noir. L'image à modéliser est la suivante :



1. Donner la matrice $\mathbb{M}$ associée à l'image.
2. Soient
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
Calculer le produit $\mathbb{AM}$. Quel est l'effet de la matrice $\mathbb{A}$ sur l'image ? Quel est l'effet si on fait le produit $\mathbb{MA}$ sur l'image ?
Calculer le produit $\mathbb{BM}$. Quel est l'effet de la matrice $\mathbb{B}$ sur l'image ? Quel est l'effet si on fait le produit $\mathbb{MB}$ sur l'image ?
3. Quelle image obtient-on en faisant le produit $\mathbb{AMB}$?
4. Quel produit matriciel peut-on faire pour obtenir la figure suivante ?

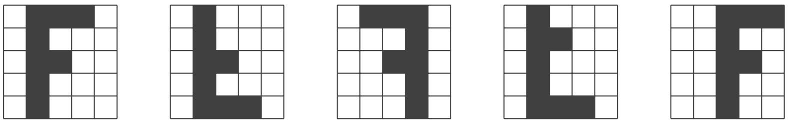


Correction

1.
$$\mathbb{M}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

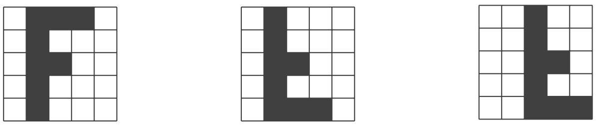
2. Le produit $\mathbb{AM}$ correspond à inverser l'ordre des lignes de la matrice $\mathbb{M}$: l'image est alors symétrique par rapport à la troisième ligne.
Le produit $\mathbb{MA}$ correspond à inverser l'ordre des colonnes de la matrice $\mathbb{M}$: l'image est alors symétrique par rapport à la troisième colonne.
Le produit $\mathbb{BM}$ correspond à translater les lignes de la matrice $\mathbb{M}$ d'un rang vers le haut (la première ligne passant en cinquième ligne) : l'image est alors translatée d'un rang vers le haut (la première ligne passant en cinquième ligne).
Le produit $\mathbb{MB}$ correspond à translater les colonnes de la matrice $\mathbb{M}$ d'un rang vers la droite (la cinquième colonne passant en première colonne) : l'image est alors translatée d'un rang vers la droite (la cinquième colonne passant en première colonne).

$$\mathbb{AM}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}\quad \mathbb{MA}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad \mathbb{BM}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}\quad \mathbb{MB}=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

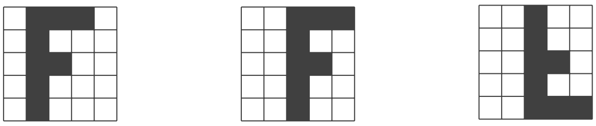


$\mathbb{M}$ $\quad$ $\mathbb{A}\mathbb{M}$ $\quad$ $\mathbb{M}\mathbb{A}$ $\quad$ $\mathbb{B}\mathbb{M}$ $\quad$ $\mathbb{M}\mathbb{B}$

3. Le produit $\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{M})\mathbb{B}$ correspond par exemple à une symétrie horizontale par rapport à la troisième ligne suivie d'une translation d'un rang vers la droite. On peut aussi l'écrire comme $\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{B} = \mathbb{A}(\mathbb{M}\mathbb{B})$ qui correspond à une translation d'un rang vers la droite suivie d'une symétrie horizontale par rapport à la troisième ligne. Dans tous les cas on obtient l'image suivante :



$\mathbb{M}$ $\to$ $\mathbb{A}\mathbb{M}$ $\to$ $(\mathbb{A}\mathbb{M})\mathbb{B}$

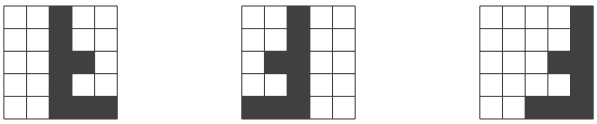


$\mathbb{M}$ $\to$ $\mathbb{M}\mathbb{B}$ $\to$ $\mathbb{A}(\mathbb{M}\mathbb{B})$

4. On peut par exemple calculer $\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{B}$.

$\mathbb{M}$ $\to$ $\mathbb{A}\mathbb{M}$ $\to$ $(\mathbb{A}\mathbb{M})\mathbb{A}$ $\to$ $(\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{A})\mathbb{B}$

Ou encore calculer $\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}$.



$\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{B}$ $\to$ $\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{B}\mathbb{A}$ $\to$ $\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}$

```
M=[0 1 1 1 0
   0 1 0 0 0
   0 1 1 0 0
   0 1 0 0 0
   0 1 0 0 0]
```

```
A=eye(5);
A=A(:,5:-1:1)
%
B=diag(ones(4,1),1);
B(5,1)=1;
B
```

```
A*M
M*A
B*M
M*B
A*M*B
A*M*A*B
A*M*B*A*B*B
```

Exercice 1.6

Calculer a, b, c et d tels que

$$① \begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\mathbb{I}_2, \qquad ② \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}=\mathbb{I}_2.$$

Que peut-on conclure ?

Correction

Comme

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3c&b+3d\\2a+8c&2b+8d\end{pmatrix}$$

il faut que

$$\begin{cases} a+3c=1,\\ b+3d=0,\\ 2a+8c=0,\\ 2b+8d=1, \end{cases} \iff \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3/2\\-1&1/2\end{pmatrix}.$$

De la même manière, pour avoir
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 3a+8b \\ c+2d & 3c+8d \end{pmatrix}$$
il faut que
$$\begin{cases} a+2b=1, \\ 3a+8b=0, \\ c+2d=0, \\ 3c+8d=1, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

```
A=[1 3; 2 8]
I2=eye(2)
I2/A
A\I2
```

On conclut que
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

```
inv([1 3; 2 8])
```

Exercice 1.7

On dit que deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ commutent si $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
En déduire $\mathbb{A}^{-1}$.

Correction

On cherche $\mathbb{B}$ telle que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
Comme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 5b_{31} & 5b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix}$$
et
$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 3b_{12} & 5b_{13} \\ b_{21} & 3b_{22} & 5b_{23} \\ b_{31} & 3b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix}$$
il faut que
$$\begin{cases} b_{11} = b_{11}, \\ b_{12} = 3b_{12}, \\ b_{13} = 5b_{13}, \\ 3b_{21} = b_{21}, \\ 3b_{22} = 3b_{22}, \\ 3b_{23} = 5b_{23}, \\ 5b_{31} = b_{31}, \\ 5b_{32} = 3b_{32}, \\ 5b_{33} = 5b_{33}, \end{cases} \iff \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}.$$

Si de plus on veut que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}_3$, *i.e.* $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$, il faut $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1/3$ et $\kappa_3 = 1/5$.

```
inv(diag([1 3 5]))
```

Exercice 1.8

Trouver pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont inversibles :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} t+3 & t^2-9 \\ t^2+9 & t-3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} t^2-9 & t+3 \\ t-3 & t^2+9 \end{pmatrix}.$$

Correction

$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} t+3 & t^2-9 \\ t^2+9 & t-3 \end{pmatrix} = (t+3)\times(t-3) - (t^2-9)\times(t^2+9) = -(t-3)(t+3)(t^2+8).$$

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

```
determinant=@(t)[det([t+3, t^2-9; t^2+9, t-3])];
fsolve(determinant,1)
fsolve(determinant,-1)
```

$$\det(\mathbb{B}) = \det\begin{pmatrix} t^2-9 & t+3 \\ t-3 & t^2+9 \end{pmatrix} = (t^2-9)\times(t^2+9) - (t+3)\times(t-3) = (t-3)(t+3)(t^2+8).$$

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

```
determinant=@(t)[det([t^2-9, t+3; t-3, t^2+9])];
fsolve(determinant,1)
fsolve(determinant,-1)
```

Exercice 1.9

Trouver pour quelles valeurs de t la matrice suivante est inversible

$$\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}.$$

Correction

On commence par calculer le déterminant de la matrice. Étant une matrice d'ordre 3, on peut par exemple utiliser la méthode de Sarrus :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} \\ = \Big((t+3)\times(t-3)\times(t+4) + 5\times(-6)\times 1 + 6\times(-1)\times 1\Big) - \Big(1\times(t-3)\times 6 + 1\times(-6)\times(t+3) + (t+4)\times(-1)\times 5\Big) \\ = t^3-4t+4t^2-16 = t(t^2-4)+4(t^2-4) = (t^2-4)(t+4) = (t-2)(t+2)(t+4).\end{aligned}$$

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-4,-2,2\}$.

```
determinant=@(t)[det([t+3, -1, 1; 5, t-3, 1; 6, -6, t+4])];
fsolve(determinant,1)
fsolve(determinant,-1)
fsolve(determinant,-10)
```

Exercice 1.10

Soit a, b et c trois réels quelconques, calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \det\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Correction
Pour calculer un déterminant comportant des paramètres, il est souvent intéressant de faire apparaître des zéros dans une ligne ou une colonne :

$$D_1=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\xrightarrow[=]{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\C_3\leftarrow C_3-C_1}}\det\begin{pmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}b-a&c-a\\b^2-a^2&c^2-a^2\end{pmatrix}$$
$$=(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)=(b-a)(c-a)\Big((c+a)-(b+a)\Big)=(b-a)(c-a)(c-b);$$
$$D_2=\det\begin{pmatrix}1+a&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1+a\end{pmatrix}\xrightarrow[=]{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\C_3\leftarrow C_3-C_1}}\det\begin{pmatrix}1+a&-a&-a\\1&a&0\\1&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow[=]{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}\det\begin{pmatrix}3+a&0&0\\1&a&0\\1&0&a\end{pmatrix}=a^2(3+a).$$

Exercice 1.11
1. Pour quelles valeurs de $\kappa\in\mathbb{R}$ la matrice $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&\kappa\\2&3\end{pmatrix}$ est inversible ?
2. Calculer le rang des matrices $\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&2&8\\2&1&4\\0&3&12\end{pmatrix}$ et $\mathbb{C}=\begin{pmatrix}2&1&3\\8&4&12\\1&2&0\end{pmatrix}$.
3. Calculer le déterminant des matrices $\mathbb{D}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\2&3&7&4\\3&1&12&0\\4&0&-5&0\end{pmatrix}$ et $\mathbb{E}=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\1&7&12&-5\\0&3&1&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}$.

Correction
1. La matrice $\mathbb{A}$ est inversible pour $\kappa\neq\frac{3}{2}$ car $\det(\mathbb{A})=3-2\kappa$.

```
determinant=@(k)[det([1 k; 2 3])];
fsolve(determinant,0)
```

2. Sans faire de calcul on peut déjà affirmer que $1\le \operatorname{rg}(\mathbb{B})\le 3$. Comme $\det(\mathbb{B})=0$ (sans faire de calcul, il suffit de remarquer que $C_3=4C_2$), alors $1\le\operatorname{rg}(\mathbb{B})\le 2$. Comme $\det\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=-3\neq0$, on conclut que $\operatorname{rg}(\mathbb{B})=2$. De la même manière, $1\le\operatorname{rg}(\mathbb{C})\le3$ et puisque $\det(\mathbb{C})=0$ (sans faire de calcul, il suffit de remarquer que $L_2=4L_1$), alors $1\le\operatorname{rg}(\mathbb{C})\le2$. Comme $\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=3\neq0$, on conclut que $\operatorname{rg}(\mathbb{C})=2$.

```
rank([1 2 8; 2 1 4; 0 3 12])
rank([2 1 3; 8 4 12; 1 2 0])
```

3. $\det(\mathbb{D})=\det\begin{pmatrix}0&0&\boxed{1}&0\\2&3&7&4\\3&1&12&0\\4&0&-5&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&0\\\boxed{4}&0&0\end{pmatrix}=4\det\begin{pmatrix}3&4\\1&0\end{pmatrix}=-16.$

   $\det(\mathbb{E})=\det\begin{pmatrix}0&2&3&4\\\boxed{1}&7&12&-5\\0&3&1&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&0\\\boxed{4}&0&0\end{pmatrix}=-4\det\begin{pmatrix}3&4\\1&0\end{pmatrix}=16.$

```
det([0 0 1 0; 2 3 7 4; 3 1 12 0; 4 0 -5 0])
det([0 2 3 4; 1 7 12 -5; 0 3 1 0; 0 4 0 0])
```

Exercice 1.12 (F. Le Roux)
En admettant le fait que les nombres 2001, 1073, 5800 et 8903 sont tous divisibles par 29, montrer que le déterminant de la matrice

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&1\\1&0&7&3\\5&8&0&0\\8&9&0&3\end{pmatrix}$$

est aussi divisible par 29 (*sans* calculer ce déterminant!).

Correction
Le déterminant ne change pas lorsque on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Si on ajoute à la quatrième colonne la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{3} 10^{4-i} C_i$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{3} 10^{4-i} C_i + C_4 = 10^3 \begin{pmatrix}2\\1\\5\\8\end{pmatrix} + 10^2 \begin{pmatrix}0\\0\\8\\9\end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix}0\\7\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2001\\1073\\5800\\8903\end{pmatrix} = 29 \begin{pmatrix}69\\37\\200\\307\end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 29\times 69\\ 1 & 0 & 7 & 29\times 37\\ 5 & 8 & 0 & 29\times 200\\ 8 & 9 & 0 & 29\times 307\end{pmatrix}\\
= -29\times 69\times \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 5 & 8 & 0\\ 8 & 9 & 0\end{pmatrix} + 29\times 37\times \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 8 & 0\\ 8 & 9 & 0\end{pmatrix} - 29\times 200\times \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 7\\ 8 & 9 & 0\end{pmatrix} + 29\times 307\times \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 7\\ 5 & 8 & 0\end{pmatrix}\\
= 29\times \left[-69\times \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 5 & 8 & 0\\ 8 & 9 & 0\end{pmatrix} + 37\times \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 8 & 0\\ 8 & 9 & 0\end{pmatrix} - 200\times \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 7\\ 8 & 9 & 0\end{pmatrix} + 307\times \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 7\\ 5 & 8 & 0\end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Exercice 1.13
Soit $n \geq 2$ un entier naturel pair. Une matrice de taille $n \times n$ est à remplir par deux joueurs, A (qui veut un déterminant non nul, commence) et B (qui veut un déterminant nul). Ils ont le droit de mettre n'importe quel réel dans une case vide de la matrice, chacun leur tour. Trouver une stratégie gagnante pour B.

Correction
Il suffit de faire en sorte qu'une colonne soit identique (ou un multiple) d'une autre.

1.5.2 Espaces vectoriels et bases

Exercice 1.14
Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + 2z = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction
On montre que $F = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de E. En effet

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x, y, z \in \mathbb{R} \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \\ y = -2z - x. \end{cases}$$

Donc

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}\kappa_1\\ -\kappa_1 - 2\kappa_2\\ \kappa_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (Cette méthode permet également d'en déduire que $\{(1, -1, 0), (0, -2, 1)\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 1.15
Démontrer que l'ensemble
$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\; a+b=0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\; a+b=0\right\}=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\;\middle|\; a,c\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1.16
Démontrer que l'ensemble
$$F=\left\{(x,x,y)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\; x,y\in\mathbb{R}\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction

$$F=\left\{\begin{pmatrix}\kappa_1\\ \kappa_1\\ \kappa_2\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\kappa_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\kappa_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.17
Démontrer que l'ensemble
$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & b\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & b\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1.18
Démontrer que l'ensemble
$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\; a+b+c+d=0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

$$\begin{aligned}F&=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\; a+b+c+d=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a-b-c\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1.19
Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; a + b + 2c = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction
On montre que $F = \mathrm{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$. En effet

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; a + b + 2c = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + (-2c - a)x + cx^2 \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a(1 - x) + c(-2x + x^2) \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ 1 - x, -2x + x^2 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.
(On peut également en déduire que $\{1 - x, -2x + x^2\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 1.20
Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ p \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; p(1) = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction
On montre que $F = \mathrm{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$. En effet

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; a + b + c = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bx + (-a - b)x^2 \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a(1 - x^2) + b(x - x^2) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ 1 - x^2, x - x^2 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.
(On peut également en déduire que $\left\{ 1 - x^2, x - x^2 \right\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 1.21
Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ p \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; p'(1) = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction
On montre que $F = \mathrm{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$. En effet

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; b + 2c = 0 \right\} \\ &= \left\{ a - 2cx + cx^2 \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a + c(-2x + x^2) \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ 1, -2x + x^2 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.
(On peut également en déduire que $\left\{ 1, -2x + x^2 \right\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 1.22
Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \det(\mathbb{A}) = 0 \right\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction
Soit $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\mathbb{A}'=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ deux matrices de F. Comme $\mathbb{A}+\mathbb{A}'=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, alors $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}')=1$, donc $\mathbb{A}+\mathbb{A}'\not\in F$.

Exercice 1.23

Prouver que les familles suivantes sont libres :

1. $\mathscr{A}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}\subset\mathbb{R}_2$
2. $\mathscr{B}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
3. $\mathscr{C}=\left\{1,t,t^2\right\}\subset\mathbb{R}_2[t]$
4. $\mathscr{D}=\{1,t,t(t-1),t(t-1)(t-2)\}\subset\mathbb{R}_3[t]$

Correction

1. $\alpha\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)+\beta\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ssi $\left(\begin{smallmatrix}\alpha+\beta\\\beta\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ssi $\alpha=\beta=0$ donc la famille est libre.
2. $\alpha\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)+\beta\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)+\gamma\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)+\delta\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\implies\begin{cases}\alpha=0\\\beta+\gamma=0\\\gamma+\delta=0\\\delta=0\end{cases}\implies\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ donc la famille est libre.
3. C'est la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$ donc la famille est libre.
4. $\alpha+\beta t+\gamma t(t-1)+\delta t(t-1)(t-2)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ ssi $\alpha+(\beta-\gamma+2\delta)t+(\gamma-3\delta)t^2+\delta t^3=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ ssi $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ donc la famille est libre.

Exercice 1.24

Montrer que l'ensemble

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\;ac=b^2\right\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction
Soit $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\mathbb{A}'=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ deux matrices de F. Comme $\mathbb{A}+\mathbb{A}'=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, alors $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}')=1$, donc $\mathbb{A}+\mathbb{A}'\not\in F$.

Exercice 1.25

Montrer que l'ensemble

$$F=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;ax+by-z=0,\;bx+y-w\geq0\;\forall a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

n'est pas un espace vectoriel.

Correction
Le vecteur $\mathbf{v}=(0,0,0,-1)\in F$ mais $-\mathbf{v}\not\in F$ donc F n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 1.26

Montrer que l'ensemble

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;x^2+y=0\right\}$$

n'est pas un espace vectoriel.

Correction
Soit $\mathbf{u}=(a,b,c)$ et $\mathbf{v}=(d,e,f)$ deux vecteurs de l'ensemble F. Alors $a^2+b=0$ et $d^2+e=0$. Pour que la somme $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a+d,b+e,c+f)$ appartient à F il faut vérifier si $(a+d)^2+(b+e)=0$. Or on a $a^2+d^2+2ad+b+e=2ad$ qui n'est pas forcement 0 donc F n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 1.27
Soient $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$ et $\mathbf{u}_2 = (1,2,3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y, z pour que le vecteur $\mathbf{w} = (x, y, z)$ appartient à $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Correction

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \in \operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad &\iff \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \mathbf{w} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 \\
&\iff \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} a+b = x, \\ a+2b = y, \\ a+3b = z \end{cases} \\
&\iff \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} a = 2x - y, \\ b = y - x, \\ z = -x + 2y \end{cases} \\
&\iff \quad x - 2y + z = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 1.28
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{u} = (-2,3,7)$, $\mathbf{v} = (1,-2,-3)$ et $\mathbf{w} = (-1,-1,6)$. Montrer que

$$\operatorname{Vect}\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\} = \operatorname{Vect}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} = \operatorname{Vect}\{\mathbf{v},\mathbf{w}\} = \operatorname{Vect}\{\mathbf{w},\mathbf{u}\}.$$

Correction
Comme $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$, on peut tirer de cette relation l'un des vecteurs en fonction des deux autres, ce qui permet de prouver que les espaces engendrés par deux des trois vecteurs sont égaux à $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$.

Exercice 1.29
Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^2$ de la famille $\mathscr{A} = \{\mathbf{u}_1 = (3,1), \mathbf{u}_2 = (-1,5)\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1,0)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

Correction
Comme $\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$, $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = 2$ et l'on a $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = \operatorname{card}(\mathscr{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéaire indépendants. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ on cherche les réels a et b tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} 3a - b = 1, \\ a + 5b = 0 \end{cases} \iff a = \frac{5}{16},\ b = \frac{-1}{16},$$

d'où la relation $\mathbf{w} = \frac{1}{16}(5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$.

Exercice 1.30
Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathscr{A} = \{\mathbf{u}_1 = (-1,1,-3), \mathbf{u}_2 = (1,2,5), \mathbf{u}_3 = (1,7,1)\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1,0,0)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$.

Correction
Comme $\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = 3$ et l'on a $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = \operatorname{card}(\mathscr{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont linéairement indépendants, *i.e.* la famille $\mathscr{A}$ est libre. Comme $\operatorname{card}(\mathscr{A}) = \dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\operatorname{Vect}(\mathscr{A}) = \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{w} \in \operatorname{Vect}(\mathscr{A})$. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ on cherche les réels a, b et c tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} -a + b + c = 1, \\ a + 2b + 7c = 0, \\ -3a + 5b + c = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b + c = 1, \\ 3b + 8c = 0, \\ 2b - 2c = -3, \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b + c = 1, \\ 3b + 8c = 0, \\ -\frac{22}{3}c = -\frac{11}{3}, \end{cases} \iff a = -\frac{3}{2},\ b = -1,\ c = \frac{1}{2},$$

d'où la relation $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(-3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)$.

Exercice 1.31
Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathscr{A} = \{\mathbf{u}_1 = (1,4,-3), \mathbf{u}_2 = (2,5,3), \mathbf{u}_3 = (-3,0,-3)\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1,0,0)$ appartient-il à $\text{Vect}(\mathscr{A})$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$.

Correction
Comme $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, $\text{rg}(\mathscr{A}) = 3$ et l'on a $\text{rg}(\mathscr{A}) = \text{card}(\mathscr{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont linéaire indépendants, *i.e.* $\mathscr{A}$ est une famille libre. Comme $\text{card}(\mathscr{A}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ alors $\text{Vect}(\mathscr{A}) = \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{w} \in \text{Vect}(\mathscr{A})$. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ on cherche les réels a, b et c tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} a+2b+3c=1, \\ 4a+5b=0, \\ -3a+3b-3c=0, \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b+3c=1, \\ -3b-12c=-4, \\ 9b+6c=3, \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b+3c=1, \\ -3b-12c=-4, \\ -30c=9, \end{cases} \iff a = \frac{-1}{6},\ b = \frac{2}{15},\ c = \frac{3}{10},$$

d'où la relation $\mathbf{w} = -\frac{1}{6}\mathbf{u}_1 + \frac{2}{15}\mathbf{u}_2 + \frac{3}{10}\mathbf{u}_3$.

Exercice 1.32
Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathscr{A} = \{\mathbf{u}_1 = (1,2,3), \mathbf{u}_2 = (3,2,1), \mathbf{u}_3 = (3,3,3), \mathbf{u}_4 = (7,0,-7)\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille.

Correction
Sans faire de calcul on sait que $\text{rg}(\mathscr{A}) \le 3$ donc au moins un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Comme $4\mathbf{u}_3 = 3\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$ donc $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$. Comme $2\mathbf{u}_4 = -7\mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_2$ alors $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\} = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Comme $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants et on conclut que $\text{rg}(\mathscr{A}) = 2$.

Exercice 1.33
Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^5$ de la famille

$$\mathscr{A} = \{\mathbf{u}_1 = (1,1,1,2,5), \mathbf{u}_2 = (2,1,0,3,4), \mathbf{u}_3 = (-1,0,-1,4,7), \mathbf{u}_4 = (-9,-2,1,-1,9)\}.$$

Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille.

Correction
Sans faire de calcul on sait que $1 \le \text{rg}(\mathscr{A}) \le 4$. Comme $\mathbf{u}_4 = 3\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$ donc $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Comme $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, on conclut que $\text{rg}(\mathscr{A}) = 3$.

Exercice 1.34
Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (2,3,-1), \quad \mathbf{u}_2 = (1,-1,-2)$$

et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (3,7,0), \quad \mathbf{v}_2 = (5,0,-7)$$

sont les mêmes.

Correction
Pour montrer l'égalité des deux ensembles, on va prouver les deux inclusions réciproques : $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ et $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

① $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$: il suffit de montrer que $\mathbf{v}_1 \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ et $\mathbf{v}_2 \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, ce qui suit de la remarque $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

② $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$: il suffit de montrer que $\mathbf{u}_1 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ et $\mathbf{u}_2 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, ce qui suit de la remarque $7\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ et $7\mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$.

Exercice 1.35
Montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (1,2,-1,3), \quad \mathbf{u}_2 = (2,4,1,-2), \quad \mathbf{u}_3 = (3,6,3,-7)$$

et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,-4,11), \quad \mathbf{v}_2 = (2,4,-5,14)$$

sont les mêmes.

Correction
On note U l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ et V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.
Remarquons tout d'abord que si $U = V$ alors $\dim(U) = \dim(V) = 2$ donc la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ n'est pas libre.
Pour démontrer que $U = V$ on montre que $U \subset V$ et que $V \subset U$.

— Pour montrer que $U \subset V$ il suffit de montrer que chaque $\mathbf{u}_i$, $i = 1,2,3$, est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{u}_1 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \iff \begin{cases} 1 = a+2b, \\ 2 = 2a+4b, \\ -1 = -4a-5b, \\ 3 = 11a+14b, \end{cases} \iff a = -1,\ b = 1$$

$$\mathbf{u}_2 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \iff \begin{cases} 2 = a+2b, \\ 4 = 2a+4b, \\ 1 = -4a-5b, \\ -2 = 11a+14b, \end{cases} \iff a = -4,\ b = 3$$

$$\mathbf{u}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \iff \begin{cases} 3 = a+2b, \\ 6 = 2a+4b, \\ 3 = -4a-5b, \\ -7 = 11a+14b, \end{cases} \iff a = -7,\ b = 5$$

— Pour montrer que $V \subset U$ il suffit de montrer que chaque $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2$, est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \iff \begin{cases} 1 = a+2b+3c, \\ 2 = 2a+4b+6c, \\ -4 = -a+b+3c, \\ 11 = 3a-2b-7c, \end{cases} \iff a = 3+\kappa,\ b = -1-2\kappa,\ c = \kappa,$$

$$\mathbf{v}_2 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \iff \begin{cases} 2 = a+2b+3c, \\ 4 = 2a+4b+6c, \\ -5 = -a+b+3c, \\ 14 = 3a-2b-7c, \end{cases} \iff a = 4-\kappa,\ b = -1-2\kappa,\ c = \kappa,$$

Exercice 1.36
Soient $p_0(x) = x+1$, $p_1(x) = x^2+x$ et $p_2(x) = 2x^2+1$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$. Démontrer que $\mathrm{Vect}\left\{p_0, p_1, p_2\right\} = \mathbb{R}_2[x]$.

Correction
<u>Méthode 1 :</u> pour prouver l'égalité de deux ensembles A et B, on peut démontrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$. Pour démontrer que $A \subset B$, on considère un élément quelconque de A et on démontre qu'il appartient à B.

— Comme $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ qui est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de ces trois polynômes est encore un élément de $\mathbb{R}_2[x]$, par conséquent $\mathrm{Vect}\left\{p_0, p_1, p_2\right\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

— $\mathbb{R}_2[x] \subset \mathrm{Vect}\left\{p_0, p_1, p_2\right\}$ ssi pour tout $q \in \mathbb{R}_2[x]$ il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2$:

$$\begin{aligned} q(x) = a + bx + cx^2 &\in \mathrm{Vect}\left\{p_0, p_1, p_2\right\} \\ &\iff \exists\,(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \exists\,(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } a+bx+cx^2 = \lambda_0(x+1)+\lambda_1(x^2+x)+\lambda_2(2x^2+1)\\
&\iff \exists\,(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } a+bx+cx^2 = (\lambda_0+\lambda_2)+(\lambda_0+\lambda_1)x+(\lambda_1+2\lambda_2)x^2\\
&\iff \exists\,(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases}\lambda_0+\lambda_2=a,\\ \lambda_0+\lambda_1=b,\\ \lambda_1+2\lambda_2=c.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Comme $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=3$, le système est de Cramer et on peut conclure que $\mathbb{R}_2[x]\subset\text{Vect}\left\{p_0,p_1,p_2\right\}$. Après résolution du système linéaire on trouve $q=bp_0+(-a+b+c)p_1+(a-b)p_2$.

__Méthode 2 :__ comme $\text{card}(\left\{p_0,p_1,p_2\right\})=3=\dim(\mathbb{R}_2[x])$, il suffit de prouver que la famille $\left\{p_0,p_1,p_2\right\}$ est libre, *i.e.* “$\lambda_0\cdot p_0+\lambda_1\cdot p_1+\lambda_2\cdot p_2=0 \implies \lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0$” :

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0\cdot p_0+\lambda_1\cdot p_1+\lambda_2\cdot p_2=0\\
&\iff \lambda_0(x+1)+\lambda_1(x^2+x)+\lambda_2(2x^2+1)=0\\
&\iff (\lambda_0+\lambda_2)+(\lambda_0+\lambda_1)x+(\lambda_1+2\lambda_2)x^2=0\\
&\iff \begin{cases}\lambda_0+\lambda_2=0,\\ \lambda_0+\lambda_1=0,\\ \lambda_1+2\lambda_2=0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Comme $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=3$, le système admet l'unique solution nulle et on peut conclure que $\text{Vect}\left\{p_0,p_1,p_2\right\}=\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 1.37

Étudier si la famille

$$\mathscr{F}=\{\mathbf{u}=(2,3),\mathbf{v}=(4,5)\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction

On dit qu'une famille $\mathscr{F}=\left\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i\cdot\mathbf{u}_i=\mathbf{0}_E \qquad\implies\qquad a_i=0\ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i\cdot\mathbf{u}_i=\mathbf{0}_E \qquad\iff\qquad a_1\mathbf{u}+a_2\mathbf{v}=(0,0) \qquad\iff\qquad \begin{cases}2a_1+4a_2=0,\\ 3a_1+5a_2=0\end{cases} \qquad\iff\qquad \begin{cases}a_1=0,\\ a_2=0,\end{cases}$$

donc la famille est libre.

(On peut remarquer que, $\mathscr{F}$ étant libre et comme $\text{card}(\mathscr{F})=2$, elle engendre un espace vectoriel de dimension 2. Puisque $\mathscr{F}\subset\mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2)=2$, on conclut que $\text{Vect}(\mathscr{F})=\mathbb{R}^2$.)

Exercice 1.38

Étudier si la famille

$$\mathscr{F}=\{\mathbf{u}=(1,0,1),\mathbf{v}=(2,1,0),\mathbf{w}=(0,-1,2)\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction

On dit qu'une famille $\mathscr{F}=\left\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i\cdot\mathbf{u}_i=\mathbf{0}_E \qquad\implies\qquad a_i=0\ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbf{u}+a_2\mathbf{v}+a_3\mathbf{w}=(0,0,0) \iff \begin{cases} a_1+2a_2=0,\\ a_2-a_3=0,\\ a_1+2a_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1=-2\kappa,\\ a_2=\kappa,\\ a_3=\kappa \end{cases}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa=1$, on a $\mathbf{w}=2\cdot\mathbf{u}-\mathbf{v}$.

Exercice 1.39
Étudier si la famille

$$\mathscr{F}=\left\{\mathbb{A}=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\mathbb{C}=\mathbb{I}_3\right\}$$

de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction
On dit qu'une famille $\mathscr{F}=\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i\cdot\mathbf{u}_i=\mathbf{0}_E \qquad\Longrightarrow\qquad a_i=0\ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbb{A}+a_2\mathbb{B}+a_3\mathbb{C}=\mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} 3a_1+a_2+a_3=0,\\ 2a_1+a_2=0,\\ a_1+a_2=0,\\ a_1+a_2=0,\\ 2a_1+a_2+a_3=0,\\ 3a_1+a_2=0,\\ 2a_1+a_2=0,\\ a_1+a_2=0,\\ 3a_1+a_2+a_3=0. \end{cases} \iff \begin{cases} a_1=0,\\ a_2=0,\\ a_3=0, \end{cases}$$

donc la famille est libre.

Exercice 1.40
Considérons les matrices d'ordre 2 à coefficients réels

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}0&0\\\kappa&0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&\kappa\\-2&0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{C}=\begin{pmatrix}\kappa&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de $\kappa\in\mathbb{R}$ les trois matrices forment une famille libre ?

Correction
Nous pouvons tout de suite dire que si $\kappa=0$ alors la famille n'est pas libre.
La famille $\mathscr{F}=\{\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}\}$ est libre lorsque

$$\alpha\mathbb{A}+\beta\mathbb{B}+\gamma\mathbb{C}=\mathbb{O}_2 \qquad\Longrightarrow\qquad \alpha=\beta=\gamma=0.$$

On a

$$\alpha\mathbb{A}+\beta\mathbb{B}+\gamma\mathbb{C}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \implies \begin{cases} \beta+\kappa\gamma=0,\\ \kappa\beta+\gamma=0,\\ \kappa\alpha-2\beta-\gamma=0,\\ \gamma=0, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta=0,\\ \kappa\alpha=0,\\ \gamma=0. \end{cases}$$

La famille est libre ssi $\kappa\neq 0$.

Exercice 1.41
Étudier si la famille

$$\mathscr{F}=\left\{p_0(x)=x^3+x^2, p_1(x)=x^2+x, p_2(x)=x+1, p_3(x)=x^3+1\right\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction
On dit qu'une famille $\mathscr{F}=\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i\cdot\mathbf{u}_i=\mathbf{0}_E \qquad\Longrightarrow\qquad a_i=0\ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot\mathbf{u}_i=\mathbf{0}_E \iff a_0p_0+a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3=0 \iff (a_2+a_3)+(a_1+a_2)x+(a_0+a_1)x^2+(a_0+a_3)x^3=0$$

$$\iff \begin{cases} a_2+a_3=0,\\ a_1+a_2=0,\\ a_0+a_1=0,\\ a_0+a_3=0,\end{cases} \iff \begin{cases} a_0=\kappa,\\ a_1=-\kappa,\\ a_2=\kappa,\\ a_3=-\kappa,\end{cases} \quad\text{pour tout } \kappa\in\mathbb{R}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa=1$ on a $p_3=p_0-p_1+p_2$.

Exercice 1.42
On considère dans $\mathbb{R}^n$, $n\ge 4$, une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$. Les familles suivantes sont libres ?

① $\{\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$
② $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$
③ $\{\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\}$
④ $\{3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$
⑤ $\{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\}$

Correction
① Oui
② Oui
③ Non
④ Oui car $\alpha(3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)+\beta(\mathbf{e}_3)+\gamma(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)=\mathbf{0} \implies 3\alpha\mathbf{e}_1+\gamma\mathbf{e}_2+(\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{e}_3=\mathbf{0}$. Comme $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ sont linéairement indépendants, cela implique $3\alpha=\gamma=\alpha+\beta+\gamma=0 \implies \alpha=\beta=\gamma=0$
⑤ Non : $-7(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1)=2(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)+3(\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2)$

Exercice 1.43
On considère dans $\mathbb{R}^n$, $n\ge 4$, une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$. Les familles suivantes sont libres ?

① $\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\}$
② $\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$
③ $\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\}$
④ $\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3\}$
⑤ $\{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\}$

Correction
① Oui
② Oui

③ Oui

④ Non

⑤ Non : $-7(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1)=2(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)+3(\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2)$

Exercice 1.44

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$. Les familles suivantes sont libres ?

① $\{2\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,-\mathbf{e}_3\}$

② $\{\mathbf{e}_1,-\mathbf{e}_3\}$

③ $\{\mathbf{e}_1,3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_4\}$

④ $\{3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$

⑤ $\{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\}$

Correction

① Oui

② Oui

③ Non

④ Oui

⑤ Non : $-7(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1)=2(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)+3(\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2)$

Exercice 1.45

Écrire la base canonique de $\mathbb{R}_3$, la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$.

Correction

1. Base canonique de $\mathbb{R}_3$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
2. Base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$
3. Base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$: $\{1,t,t^2\}$

Exercice 1.46

Soit V un espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille libre d'éléments de V. Donner la définition de $\operatorname{card}(\mathscr{F})$ et de $\dim(V)$. Si $\dim(V)=\operatorname{card}(\mathscr{F})$, que peut-on conclure ?

Correction

1. Le cardinal d'une famille est le nombre d'éléments qui la constitue.
2. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments d'une de ses bases, *i.e.* le cardinal d'une de ses bases.
3. Si la dimension de l'espace vectoriel V coïncide avec le cardinal de la famille $\mathscr{F}$ contenue dans V, alors la famille $\mathscr{F}$ constitue une base de V. Attention : si la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre, on ne peut rien conclure.

Exercice 1.47

Vrai ou Faux ?

① Toute famille génératrice contient une base.

② La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur de cet espace.

③ Toute famille contenant une famille liée est liée.

④ La base de $\mathbb{R}_3[x]$ est $\{1,x,x^2,x^3\}$.

⑤ Si $E=\operatorname{Vect}\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ et si $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ est une famille libre, alors $\dim(E)=3$.

⑥ $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_p\}=\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_{p-1}\}$ si et seulement si $\mathbf{u}_p$ est combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_{p-1}$.

⑦ Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que deux vecteurs parmi ces trois ne sont pas colinéaires. Alors la famille $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ est libre.

Correction

① Vrai (dans le sens que d'une famille génératrice on peut extraire une famille libre qui génère le même espace vectoriel).

② Faux. Un espace vectoriel de dimension finie a une infinité de vecteurs. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur d'une de ces bases.

③ Vrai. La relation non trivial qui lie des vecteurs de la plus petite des deux familles est vraie dans la plus grande.

④ Incorrect. On ne peut pas parler de «la» base de $\mathbb{R}_3[x]$ car il y en a une infinité.

⑤ Vrai. La famille $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ est une base de E car libre et génératrice de E.

⑥ Vrai.

⑦ Faux. Par exemple si $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$, deux vecteurs parmi ces trois ne sont pas colinéaires mais la famille $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ est liée.

Exercice 1.48

Considérons l'ensemble

$$F=\left\{\,(x,x,y,y)\;\middle|\;x,y\in\mathbb{R}\,\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car

$$F=\left\{\begin{pmatrix}\kappa_1\\\kappa_1\\\kappa_2\\\kappa_2\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\kappa_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\kappa_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

2. Les deux vecteurs $\mathbf{u}_1=(1,1,0,0)$ et $\mathbf{u}_2=(0,0,1,1)$ constituent une famille génératrice de F. On vérifie aisément que cette famille est libre donc elle est une base de F. Comme $\operatorname{card}(\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\})=2$, alors $\dim(F)=2$.

Exercice 1.49

Considérons l'ensemble

$$F=\left\{\,a+ax^2+bx^4\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\,\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$ car

$$F=\left\{\,a+ax^2+bx^4\;\middle|\;(a,b)\in\mathbb{R}^2\,\right\}=\left\{\,a(1+x^2)+bx^4\;\middle|\;(a,b)\in\mathbb{R}^2\,\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\,1+x^2,x^4\,\right\}.$$

2. Les deux polynômes $p(x)=1+x^2$ et $q(x)=x^4$ constituent une famille génératrice de F. On vérifie aisément que cette famille est libre donc elle est une base de F. Comme $\operatorname{card}(\{\,p,q\,\})=2$, alors $\dim(F)=2$.

Exercice 1.50

Considérons l'ensemble

$$F=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;2x+y+z=0\,\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car

$$F=\left\{\begin{pmatrix}\kappa_1\\\kappa_2\\-2\kappa_1-\kappa_2\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\kappa_1\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\kappa_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

2. Les deux vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2)$ et $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$ constituent une famille génératrice de F. On vérifie aisément que cette famille est libre donc elle est une base de F. Comme $\operatorname{card}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 1.51

Considérons l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| \, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \kappa_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. Les trois matrice $\mathbb{I}_3$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ constituent une famille génératrice de F. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre : on dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1 \mathbb{I}_3 + a_2 \mathbb{A} + a_3 \mathbb{B} = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille $\mathscr{F} = \{\mathbb{I}_3, \mathbb{A}, \mathbb{B}\}$ est libre et est une base de F. Comme $\operatorname{card}(\mathscr{F}) = 3$, alors $\dim(F) = 3$.

Exercice 1.52

Considérons l'ensemble

$$F = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \,\middle|\, p(0) = p(1) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ car

$$F = \{ x(x-1)(ax+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \left\{ a\left(x^2(x-1)\right) + b\left(x(x-1)\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ x^2(x-1), x(x-1) \right\}.$$

Si on n'a pas remarqué que 0 et 1 sont racines des polynômes de F, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} F &= \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1) = 0 \} \\ &= \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a = 0 \text{ et } a + b + c + d = 0 \} \\ &= \{ bx + cx^2 + (-b - c)x^3 \mid b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ b(x - x^3) + c(x^2 - x^3) \mid b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \operatorname{Vect}\{ x - x^3, x^2 - x^3 \}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Les deux polynômes $p(x) = x - x^3$ et $q(x) = x^2 - x^3$ constituent une famille génératrice de F. On montre que la famille $\mathscr{F} = \{ x - x^3, x^2 - x^3 \}$ est une base de l'espace vectoriel F; en effet

$$\alpha(x - x^3) + \beta(x^2 - x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha x + \beta x^2 + (-\alpha - \beta)x^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Comme $\operatorname{card}(\mathscr{F}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 1.53

Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. Soit $U = \{ p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(-1) = 0 \}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$ et en donner une base.

Correction

On montre que $U = \operatorname{Vect}\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned} U &= \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a - b + c - d = 0 \} \\ &= \{ a + bx + cx^2 + (a - b + c)x^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ a(1 + x^3) + b(x - x^3) + c(x^2 + x^3) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \operatorname{Vect}\{ 1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3 \}. \end{aligned}$$

Par conséquent U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
(On peut également en déduire que $\{ 1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3 \}$ est une famille génératrice de U)

Exercice 1.54

Démontrer que l'ensemble

$$F = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p'(1) = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ et en donner une base.

Correction

On montre que $F = \operatorname{Vect}\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned} F &= \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p'(1) = 0 \} \\ &= \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a = 0 \text{ et } b + 2c + 3d = 0 \} \\ &= \left\{ bx + cx^2 + \frac{-b - 2c}{3} x^3 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ b(x - x^3/3) + c(x^2 - 2x^3/3) \mid b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
On montre que la famille $\mathscr{F} = \{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \}$ est une base de l'espace vectoriel F; en effet

$$\alpha(x - x^3/3) + \beta(x^2 - 2x^3/3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha x + \beta x^2 + (-\alpha - 2\beta)x^3/3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Exercice 1.55

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 avec les entrées réelles. Soient a, b et c trois nombres réels quelconques. Considérons le sous-ensemble

$$E = \left\{ \mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner une base explicite de E.

Correction

1. E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. Les trois matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ constituent une famille génératrice de E. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre : on dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbb{A} + a_2\mathbb{B} + a_3\mathbb{C} = \mathbb{O}_2 \iff \begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ 2a_3 = 0, \\ -a_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre et est une base de E. Comme $\operatorname{card}\{\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}\} = 3$, alors $\dim(E) = 3$.

Exercice 1.56

Trouver une base de l'espace engendré par les polynômes dans les deux familles suivantes

1. $W = \{1+2x+3x^2, x+2x^2, 1+2x+4x^2, 1+x\}$
2. $W = \{2+2x^2, 2+x-x^2, 3+x+x^2, 3+x+3x^2\}$

Correction

1. Notons

$$w_1(x) = 1+2x+3x^2, \qquad w_2(x) = x+2x^2, \qquad w_3(x) = 1+2x+4x^2, \qquad w_4(x) = 1+x.$$

W est une famille non libre si et seulement si

$$\begin{aligned} &\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid a w_1(x) + b w_2(x) + c w_3(x) + d w_4(x) = 0 \iff \\ &\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid (a+c+d) + (2a+b+2c+d)x + (3a+2b+4c)x^2 = 0 \iff \\ &\begin{cases} a + c + d = 0, \\ 2a + b + 2c + d = 0, \\ 3a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c + d = 0, \\ b - d = 0, \\ 2b + c - 3d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c + d = 0, \\ b - d = 0, \\ c - d = 0 \end{cases} \iff \\ &(a,b,c,d) = (-2\kappa, \kappa, \kappa, \kappa),\ \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Autrement dit $w_4 = 2w_1 - w_2 - w_3$. On a alors

$$\operatorname{Vect}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \operatorname{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}.$$

Vérifions si la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E &\iff a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \\
&\iff (a+c) + (2a+b+2c)x + (3a+2b+4c)x^2 = 0 \\
&\iff \begin{cases} a \quad +c=0, \\ 2a \ +b+2c=0, \\ 3a+2b+4c=0 \end{cases} \iff a = b = c = 0
\end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de l'espace $\text{Vect}(W)$.

2. Notons

$$w_1(x) = 2 + 2x^2, \qquad w_2(x) = 2 + x - x^2, \qquad w_3(x) = 3 + x + x^2, \qquad w_4(x) = 3 + x + 3x^2.$$

W est une famille non libre si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid a w_1(x) + b w_2(x) + c w_3(x) + d w_4(x) = 0 \iff \\
&\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid (2a+2b+3c+3d) + (b+c+d)x + (2a-b+c+3d)x^2 = 0 \iff \\
&\begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0, \\ b \ +c \ +d=0, \\ 2a \ -b \ +c+3d=0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0, \\ b \ +c \ +d=0, \\ b+4c+6d=0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0, \\ b \ +c \ +d=0, \\ 3c+5d=0, \end{cases} \iff \\
&(a,b,c,d) = (\kappa, 2\kappa, -5\kappa, 3\kappa), \ \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Autrement dit $3w_4 = -w_1 - 2w_2 + 5w_3$. On a alors

$$\text{Vect}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}.$$

Vérifions si la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E &\iff a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \\
&\iff (2a+2b+3c) + (b+c)x + (2a-b+c)x^2 = 0 \\
&\iff \begin{cases} 2a+2b+3c=0, \\ b \ +c=0, \\ b+4c=0, \end{cases} \iff a = b = c = 0
\end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de l'espace $\text{Vect}(W)$.

Exercice 1.57

Soit

$$\mathscr{F} = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

une famille d'éléments de l'espace vectoriel $E = \{ \mathbb{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathbb{M} = \mathbb{M}^T \}$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice de E, *i.e.* $E = \text{Vect}(\mathscr{F})$;
2. montrer que $\mathscr{F}$ n'est pas libre ;
3. extraire de $\mathscr{F}$ une base de E.

Correction
On remarque que

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$.

1. La famille $\mathscr{F}$ est génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, *i.e.* s'il existe λ_1, λ_2, λ_3 et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbb{B}_1 + \lambda_2 \mathbb{B}_2 + \lambda_3 \mathbb{B}_3 + \lambda_4 \mathbb{B}_4, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

i.e. si et seulement si, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant admet (au moins) une solution

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = b, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = b, \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = c. \end{cases}$$

La matrice augmentée associée à ce système est

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right).$$

Comme la seconde et la troisième ligne sont égales alors $\mathrm{rg}(\mathbb{A})$ et $\mathrm{rg}([\mathbb{A}|b])$ sont < 4. Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|b]) = 3$: le système admet une solution (non unique car le rang n'est pas maximal).

2. $\mathscr{F}$ n'est pas libre car $2\mathbb{B}_4 = \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}_3$

3. On en extrait par exemple la famille $\mathscr{B} = \{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3\}$ qui est une base de E car
   (i) $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3$,
   (ii) $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$,
   (iii) $\mathscr{B}$ est libre car la combinaison linéaire $\lambda_1 \mathbb{B}_1 + \lambda_2 \mathbb{B}_2 + \lambda_3 \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exercice 1.58

Soit

$$\mathscr{F} = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

une famille d'éléments de l'espace vectoriel $E = \left\{ \mathbb{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \mathbb{M} = \mathbb{M}^T \right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice de E, *i.e.* $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$;
2. montrer que $\mathscr{F}$ n'est pas libre ;
3. extraire de $\mathscr{F}$ une base de E.

Correction
On remarque que

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$.

1. La famille $\mathscr{F}$ est génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, *i.e.* s'il existe λ_1, λ_2, λ_3 et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbb{B}_1 + \lambda_2 \mathbb{B}_2 + \lambda_3 \mathbb{B}_3 + \lambda_4 \mathbb{B}_4, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

i.e. si et seulement si, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant admet (au moins) une solution

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = b, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = b, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = c. \end{cases}$$

La matrice augmentée associée à ce système est

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right).$$

Comme la seconde et la troisième ligne sont égales alors $\text{rg}(\mathbb{A})$ et $\text{rg}([\mathbb{A}|b])$ sont < 4. Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|b]) = 3$: le système admet une solution (non unique car le rang n'est pas maximal).

2. $\mathscr{F}$ n'est pas libre car $\mathbb{B}_4 = \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}_3$
3. On en extrait par exemple la famille $\mathscr{B} = \{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3\}$ qui est une base de E car
   (i) $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3$,
   (ii) $\text{card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$,
   (iii) $\mathscr{B}$ est libre car la combinaison linéaire $\lambda_1\mathbb{B}_1 + \lambda_2\mathbb{B}_2 + \lambda_3\mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exercice 1.59

Soit

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 + x + x^2 + x^3, \\ q_1(x) &= x + x^2 + x^3, \\ q_2(x) &= x^2 + x^3, \\ q_3(x) &= x^3, \end{aligned}$$

quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Démontrer que l'ensemble $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ qu'on notera $\mathscr{B}$.
2. Notons $\mathscr{C} = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Calculer $\text{coord}(c_i, \mathscr{B})$ et $\text{coord}(q_i, \mathscr{C})$.
3. Exprimer le polynôme $a + bx + cx^2 + dx^3$ dans la base $\mathscr{B}$.

Correction

1. Pour montrer que l'ensemble $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ il faut montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$. On dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall\ i = 1, \dots, p.$$

Ici

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E &\iff a_0 q_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 = 0 \\ &\iff a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 = 0 \iff \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donc la famille est libre. Comme $\text{card}(\text{Vect}\{q_0, q_1, q_2, q_3\}) = 4$ et $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 4$, alors $\mathscr{B} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Soit $\mathscr{C} = \{c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2, x_3(x) = x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Calculons les coordonnées de q_j

dans la base $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= 1\cdot c_0(x)+1\cdot c_1(x)+1\cdot c_2(x)+1\cdot c_3(x) &&\implies \text{coord}(q_0,\mathscr{C})=(1,1,1,1)\\
q_1(x) &= 0\cdot c_0(x)+1\cdot c_1(x)+1\cdot c_2(x)+1\cdot c_3(x) &&\implies \text{coord}(q_1,\mathscr{C})=(0,1,1,1)\\
q_2(x) &= 0\cdot c_0(x)+0\cdot c_1(x)+1\cdot c_2(x)+1\cdot c_3(x) &&\implies \text{coord}(q_2,\mathscr{C})=(0,0,1,1)\\
q_3(x) &= 0\cdot c_0(x)+0\cdot c_1(x)+0\cdot c_2(x)+1\cdot c_3(x) &&\implies \text{coord}(q_3,\mathscr{C})=(0,0,0,1)
\end{aligned}$$

En résolvant le système linéaire (ici c'est très facile car il s'agit d'un système triangulaire), on obtient

$$\begin{cases}
q_0 &= c_0+c_1+c_2+c_3,\\
q_1 &= c_1+c_2+c_3,\\
q_2 &= c_2+c_3,\\
q_3 &= c_3,
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
c_0 &= q_0-q_1,\\
c_1 &= q_1-q_2,\\
c_2 &= q_2-q_3,\\
c_3 &= q_3,
\end{cases}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned}
c_0(x) &= 1\cdot q_0(x)-1\cdot q_1(x)+0\cdot q_2(x)+0\cdot q_3(x) &&\text{i.e.}\quad \text{coord}(c_0,\mathscr{B})=(1,-1,0,0),\\
c_1(x) &= 0\cdot q_0(x)+1\cdot q_1(x)-1\cdot q_2(x)+0\cdot q_3(x) &&\text{i.e.}\quad \text{coord}(c_1,\mathscr{B})=(0,1,-1,0),\\
c_2(x) &= 0\cdot q_0(x)+0\cdot q_1(x)+1\cdot q_2(x)-1\cdot q_3(x) &&\text{i.e.}\quad \text{coord}(c_2,\mathscr{B})=(0,0,1,-1),\\
c_3(x) &= 0\cdot q_0(x)+0\cdot q_1(x)+0\cdot q_2(x)+1\cdot q_3(x) &&\text{i.e.}\quad \text{coord}(c_3,\mathscr{B})=(0,0,0,1).
\end{aligned}$$

3. Soit le polynôme $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$; dans la base $\mathscr{C}$ il a coordonnées (a,b,c,d), donc

$$p(x)=ac_0+bc_1+cc_2+dc_3=a(q_0-q_1)+b(q_1-q_2)+c(q_2-q_3)+d(q_3)=aq_0+(b-a)q_1+(c-b)q_2+(d-c)q_3.$$

Par conséquent, dans la base $\mathscr{B}$ le polynôme $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ a coordonnées

$$\text{coord}(p,\mathscr{B})=(a,b-a,c-b,d-c).$$

Exercice 1.60 (Rang d'une famille de vecteurs)
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le rang de la famille

$$\mathscr{E}=\{\mathbf{u}_1=(1,2,3),\mathbf{u}_2=(2,-1,1),\mathbf{u}_3=(1,0,1),\mathbf{u}_4=(0,1,1)\}.$$

Correction
Notons $\mathscr{F}=\text{Vect}(\mathscr{E})$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{E}$.

— Comme $\text{card}(\mathscr{E})=4$ alors $\text{rg}(\mathscr{E})=\dim(\mathscr{F})\le 4$.
— Comme $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\dim(\mathscr{F})\le\dim(\mathbb{R}^3)=3$ ainsi $\text{rg}(\mathscr{E})=\dim(\mathscr{F})\le 3$.
— Comme $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéairement indépendants, alors $\dim(\text{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\})=2$ et comme $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\subset\mathscr{F}$, on obtient $\text{rg}(\mathscr{E})=\dim(\mathscr{F})\ge 2$.
— Étudions maintenant la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}\subset\mathscr{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\text{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\})=3$ alors $\text{rg}(\mathscr{E})=3$; si elle est liée on ne peut pas conclure. On étudiera alors la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\}\subset\mathscr{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\text{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\})=3$ alors $\text{rg}(\mathscr{E})=3$; si elle est liée $\text{rg}(\mathscr{E})=2$.
  Comme $5\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2$, la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ est liée.
  Comme $5\mathbf{u}_4=2\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$, la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\}$ est liée.

On conclut que $\text{rg}(\mathscr{E})=2$.

Exercice 1.61
Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace des polynômes de degré au plus 3 et considérons l'ensemble

$$V=\left\{\,p\in\mathbb{R}_3[t]\;\middle|\;p(0)+p(2)=0,\;p(1)=3p(-1)\,\right\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.
2. Déterminer une base et la dimension de V.

3. Montrer que le polynôme $p(t) = 2+2t-t^3$ est dans V et trouver les composantes de p dans la base de V calculée auparavant.

Correction

1. On montre que $V = \operatorname{Vect}\left\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p\right\}$ où $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[t]$. En effet
$$\begin{aligned}
V &= \left\{ p\in\mathbb{R}_3[t] \;\middle|\; p(0)+p(2)=0,\ p(1)=3p(-1) \right\}\\
&= \left\{ a+bt+ct^2+dt^3\in\mathbb{R}_3[t] \;\middle|\; 2a+2b+4c+8d=0 \text{ et } a+b+c+d=3a-3b+3c-3d \right\}\\
&= \left\{ \left(-\frac{5}{3}c-2d\right)+\left(-\frac{1}{3}c-2d\right)t+ct^2+dt^3 \;\middle|\; c,d\in\mathbb{R} \right\}\\
&= \left\{ \left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}t+t^2\right)c+\left(-2-2t+t^3\right)d \;\middle|\; c,d\in\mathbb{R} \right\}\\
&= \operatorname{Vect}\left\{ q_1(t)=-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}t+t^2;\, q_2(t)=-2-2t+t^3 \right\}.
\end{aligned}$$
Par conséquent V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.
2. La famille $\mathscr{V} = \left\{q_1,q_2\right\}$ est génératrice de l'espace vectoriel V. De plus,
$$\alpha q_1+\beta q_2 = 0_{\mathbb{R}_3[t]} \qquad\iff\qquad \alpha q_1(t)+\beta q_2(t)=0\ \forall t\in\mathbb{R} \qquad\iff\qquad \alpha=\beta=0$$
donc elle est aussi libre donc elle est une base de V et $\dim(V)=2$.
3. Si $p(t)=2+2t-t^3$ on a $p(0)+p(2)=\big(2\big)+\big(2+4-8\big)=0$ et $p(1)-3p(-1)=\big(2+2-1\big)-3\big(2-2+1\big)=0$ donc $p\in V$ et $\operatorname{coord}(p,\mathscr{V})=(0,-1)$.

Exercice 1.62

Montrer que les matrices
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix} \qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix} \qquad \mathbb{C}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}$$
forment un base de l'espace vectoriel M des matrices symétriques d'ordre 2. Décomposer sur cette base la matrice
$$\mathbb{G}=\begin{pmatrix}5&6\\6&7\end{pmatrix}.$$

Correction

La famille $\mathscr{F}=\{\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}\}$ est une base de l'espace vectoriel
$$M=\left\{\mathbb{M}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathbb{M}=\mathbb{M}^T\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$
car

(i) $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}\in M$,
(ii) $\operatorname{card}(\mathscr{F})=\dim(M)$,
(iii) $\mathscr{F}$ est libre car la combinaison linéaire $\lambda_1\mathbb{A}+\lambda_2\mathbb{B}+\lambda_3\mathbb{C}=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 & -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3\\ -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\iff \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0,\\ -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0,\\ -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3=0,\end{cases} &\iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
\iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On cherche maintenant $\operatorname{coord}(\mathbb{G},\mathscr{F})$ les coordonnées de la matrice $\mathbb{G}$ dans la base $\mathscr{F}$, *i.e.* les uniques $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\mathbb{A}+\lambda_2\mathbb{B}+\lambda_3\mathbb{C}=\mathbb{G}$:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\6&7\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3&-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3\\-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3&\lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\6&7\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=5,\\-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=6,\\-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=6,\\\lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3=7,\end{cases}\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\6\\7\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\16\\2\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\16\\-14\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37/5\\34/15\\14/3\end{pmatrix}=\operatorname{coord}(\mathbb{G},\mathscr{F}).$$

1.5.3 Systèmes linéaires : utilisation de fonctions prédéfinies dans Octave

Exercice 1.63 (Systèmes linéaires)

On a demandé à 215 étudiants de dire quel est leur langage de programmation préféré parmi Python, Matlab, Java et C. Chaque étudiant devait fournir une seule réponse. On sait que 163 étudiants ont déclaré préférer Python ou Matlab; 65 ont déclaré préférer Matlab ou C; 158 ont déclaré préférer Python ou C.

Traduire les données par un système linéaire de 4 équations et 4 inconnues et le résoudre par la méthode de Gauss.

Correction

On note p, m, j et c le nombre d'étudiants préférant respectivement Python, Matlab, Java et C. D'après l'énoncé on a

$$\begin{cases}p+m+j+c=215,\\p+m=163,\\m+c=65,\\p+c=158.\end{cases}$$

On passe à la notation matricielle et on résout le système par la méthode de Gauss (4 équations donc 3 étapes) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&215\\1&1&0&0&163\\0&1&0&1&65\\1&0&0&1&158\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3\\L_4\leftarrow L_4-L_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&215\\0&0&-1&-1&-52\\0&1&0&1&65\\0&-1&-1&0&-57\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Pivot nul}]{L_2\leftrightarrow L_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&215\\0&1&0&1&65\\0&0&-1&-1&-52\\0&-1&-1&0&-57\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Étape 2}]{\substack{L_3\leftarrow L_3\\L_4\leftarrow L_4+L_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&215\\0&1&0&1&65\\0&0&-1&-1&-52\\0&0&-1&1&8\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Étape 3}]{L_4\leftarrow L_4-L_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&215\\0&1&0&1&65\\0&0&-1&-1&-52\\0&0&0&2&60\end{array}\right).$$

On résout le système triangulaire supérieur ainsi obtenu par remonté :

$$\begin{aligned}2c=60&\implies c=30,\\-j-c=-52&\implies j=-c+52=22,\\m+c=65&\implies m=-c+65=35,\\p+m+j+c=215&\implies p=215-m-j-c=128.\end{aligned}$$

Les préférences sont donc : 128 pour Python, 35 pour Matlab, 22 pour Java et 30 pour C.

```
A=[1 1 1 1; 1 1 0 0; 0 1 0 1; 1 0 0 1]
b=[215; 163; 65; 158]
sol=A\b
```

Systèmes linéaires : méthode de Gauss pour des systèmes carrés

Exercice 1.64

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

① $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2\\ x_1-2x_2-3x_3=-6\\ x_1+4x_2+4x_3=3\end{cases}$ ② $\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8\\ 4x_1+x_2-4x_3=15\end{cases}$ ③ $\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ u+v-3w=-6\end{cases}$

④ $\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2x+3y+3z+2t=14\\ x+2y+z+t=7\\ -x-z+t=-1\end{cases}$ ⑤ $\begin{pmatrix}6&1&1\\2&4&0\\1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\0\\6\end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\\10\end{pmatrix}$

Correction

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

①

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2-3x_3=-6,\\ x_1+4x_2+4x_3=3.\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ -4x_2-2x_3=-8,\\ 2x_2+5x_3=1.\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2/2} \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ -4x_2-2x_3=-8,\\ 4x_3=-3.\end{cases}$$

donc $x_3=\frac{-3}{4}$, $x_2=\frac{19}{8}$ et $x_1=\frac{-7}{2}$.

②

$$\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8\\ 4x_1+x_2-4x_3=15\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+4L_1]{L_2\leftarrow L_2+2L_1} \begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ x_2+8x_3=16\\ 5x_2+8x_3=63\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-5L_2} \begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ x_2+8x_3=16\\ -32x_3=-17\end{cases}$$

donc $x_3=\frac{17}{32}$, $x_2=\frac{47}{4}$ et $x_1=\frac{43}{32}$.

③

$$\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ u+v-3w=-6\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_1/2} \begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ -v-\frac{3}{2}w=-{}^{13}/_{2}\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2/2} \begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ -2w=-6\end{cases}$$

donc $w=3$, $v=2$ et $u=1$.

④

$$\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2x+3y+3z+2t=14\\ x+2y+z+t=7\\ -x-z+t=-1\end{cases} \xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3+L_1/2\\ L_4\leftarrow L_4-L_1/2}]{L_2\leftarrow L_2+L_1} \begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ \frac{3}{2}y+z+3t=8\\ \frac{1}{2}y-z-t=-2\end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_2-L_2/4]{L_3\leftarrow L_3-3L_2/4} \begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4\\ -\frac{7}{4}z-\frac{5}{2}t=-6\end{cases} \xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-7L_3/5} \begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4\\ -\frac{2}{5}t=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

donc $t=1$, $z=2$, $y=2$ et $x=0$.

⑤

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{ccc|c} 6&1&1&12\\ 2&4&0&0\\ 1&2&6&6\end{array}\right) \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{6}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{6}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6&1&1&12\\ 0&\frac{11}{3}&-\frac{1}{3}&-4\\ 0&\frac{11}{6}&\frac{35}{6}&4\end{array}\right) \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{\frac{11}{6}}{\frac{11}{3}}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6&1&1&12\\ 0&\frac{11}{3}&-\frac{1}{3}&-4\\ 0&0&6&6\end{array}\right)$$

donc

$$\begin{cases} 6x_1+x_2+x_3=12,\\ \frac{11}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3=-4\\ 6x_3=6\end{cases} \implies x_3=1,\quad x_2=-1,\quad x_1=2.$$

⑥

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{array}\right)$$

donc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 40 \end{cases} \implies \qquad x_4 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

```
A=[1 2 -1; 1 -2 -3; 1 4 4]
b=[2; -6; 3]
A\b
A=[-1 1 3; 2 -1 2; 4 1 -4]
b=[12; -8; 15]
A\b
A=[-2 -4 3; 0 2 -1; 1 1 -3]
b=[-1; 1; -6]
A\b
```

```
A=[-2 -1 0 4; 2 3 3 2; 1 2 1 1; -1 0 -1 1]
b=[2; 14; 7; -1]
A\b
A=[6 1 1; 2 4 0; 1 2 6]
b=[12; 0; 6]
A\b
A=[1 2 3 4; 2 3 4 1; 3 4 1 2; 4 1 2 3]
b=[10; 10; 10; 10]
A\b
```

Exercice 1.65

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système est-il compatible? Possède-t-il une solution unique?

Correction

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1/2} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -{}^1\!/\!_2 x_2 + {}^1\!/\!_2 x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -{}^1\!/\!_2 x_2 + {}^1\!/\!_2 x_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

Le système est compatible car le rang du système est 2 inférieur au nombre d'inconnues 3 et la solution n'est pas unique car $\mathrm{rg}(S) < 3$. Il admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, \kappa, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
Que dit Octave?

```
>> [2,-1,-3;-1,0,2;2,-3,-1]\[0;0;0]
warning: matrix singular to machine precision
```

Exercice 1.66

Trouver toutes les solutions du système linéaire homogène

$$(S) \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Correction
Le système étant homogène, il est inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de GAUSS :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\-2&0&2\\-11&6&5\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-11L_1/3]{L_2\leftarrow L_2-2L_1/3}\begin{pmatrix}-3&1&2\\0&-2/3&2/3\\0&7/3&-7/3\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+7L_2/2}\begin{pmatrix}-3&1&2\\0&-2/3&2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 1.67
Équilibrer la réaction

$$Zn+H_2SO_4+K_2Cr_2O_7\to KCr(SO_4)_2+ZnSO_4+H_2O.$$

Correction
Écrivons les coefficients stœchiométriques et les contraintes :

$$x_1Zn+x_2H_2SO_4+x_3K_2Cr_2O_7\to x_4KCr(SO_4)_2+x_5ZnSO_4+x_6H_2O$$

1. Atomes de Zn : $x_1=x_5$, *i.e.* $x_1-x_5=0$
2. Atomes de H : $2x_2=2x_6$, *i.e.* $x_2-x_6=0$
3. Atomes de S : $x_2=2x_4+x_5$, *i.e.* $x_2-2x_4-x_5=0$
4. Atomes de K : $2x_3=x_4$, *i.e.* $2x_3-x_4=0$
5. Atomes de Cr : $2x_3=x_4$, *i.e.* $2x_3-x_4=0$
6. Atomes de O : $4x_2+7x_3=8x_4+4x_5+x_6$, *i.e.* $4x_2+7x_3-8x_4-4x_5-x_6=0$

Notons que la contrainte $2x_3-x_4=0$ est répétée deux fois, donc on ne l'écrira qu'une seule fois dans le système linéaire; cela donne 5 équations pour 6 inconnues. Fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_6=1$; on obtient alors le système linéaire

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&-2&-1\\0&0&2&-1&0\\0&4&7&-8&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&0&-2&-1&0\\0&0&2&-1&0&0\\0&4&7&-8&-4&1\end{array}\right)\xrightarrow[L_5\leftarrow L_5-4L_2]{L_3\leftarrow L_3-L_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&0&-2&-1&-1\\0&0&2&-1&0&0\\0&0&7&-8&-4&-3\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&2&-1&0&0\\0&0&0&-2&-1&-1\\0&0&7&-8&-4&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_5\leftarrow L_5-\frac{7}{2}L_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&2&-1&0&0\\0&0&0&-2&-1&-1\\0&0&0&-\frac{9}{2}&-4&-3\end{array}\right)\xrightarrow{L_5\leftarrow L_5-\frac{9}{4}L_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&2&-1&0&0\\0&0&0&-2&-1&-1\\0&0&0&0&-\frac{7}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

dont la solution est bien

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/7\\1\\1/7\\2/7\\3/7\end{pmatrix}$$

Si on multiplie tous les coefficients par 7 on obtient

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\1\\2\\3\\7\end{pmatrix}$$

et donc la réaction équilibrée

$$3Zn + 7H_2SO_4 + K_2Cr_2O_7 \to 2KCr(SO_4)_2 + 3ZnSO_4 + 7H_2O.$$

Exercice 1.68 (V. Guirardel)

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Candidat	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
Qui	7	12	6	8
Quo	11	6	10	9
Qua	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Correction

Il s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m + 12a + 6i = 8, \\ 11m + 6a + 10i = 9, \\ 11m + 16a + 14i = 14. \end{cases}$$

Utilisons la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8, \\ 11m+6a+10i=9, \\ 11m+16a+14i=14, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{7}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{11}{7}L_1} \begin{cases} 7m+12a+6i=8, \\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7}, \\ -\frac{20}{7}a+\frac{32}{7}i=\frac{10}{7}, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{9}L_2} \begin{cases} 7m+12a+6i=8, \\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7}, \\ \frac{40}{9}i=\frac{20}{9}, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(0.2, 0.3, 0.5)$.

Une autre interprétation est la suivante : il s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m + 12a + 6i = 8(m + a + i) \\ 11m + 6a + 10i = 9(m + a + i), \\ 11m + 16a + 14i = 14(m + a + i). \end{cases}$$

Utilisons la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} -m+4a-2i=0, \\ 2m-3a+i=0, \\ -3m+2a=0, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{7}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{11}{7}L_1} \begin{cases} -m+4a-2i=0, \\ 5a-3i=0, \\ -10a+6i=0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{9}L_2} \begin{cases} -m+4a-2i=0, \\ 5a-3i=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 3\kappa, 5\kappa)$ avec $\kappa \in [0;1/5]$.

Exercice 1.69 (V. Guirardel)

Une entreprise fabrique des manteaux. Ces manteaux sont composés de tissu rouge, de tissu bleu et d'une doublure noire. Le tableau suivant résume les mètres carrés de chaque tissu nécessaires à la confection du manteau en tailles S, M, L et XL :

	S	M	L	XL
Tissu rouge	0.4	0.5	0.6	0.7
Tissu bleu	1	1.1	1.2	1.3
Doublure	1.5	1.7	1.9	2.1

Chaque tissu est tissé à l'aide de plusieurs types de fil : coton, polyester et polyamide. Le tableau suivant résume les mètres de fil de chaque type nécessaires par mètre carré de tissu :

	Tissu rouge	Tissu bleu	Doublure
Coton	500	400	1000
Polyamide	1000	900	700
Polyester	500	600	0

1. L'entreprise veut produire s manteaux taille S, m manteaux taille M, ℓ manteaux taille L et x manteaux taille XL. Quelle quantité de fil de chaque catégorie doit-elle commander ? Répondre à cette question dans le langage des matrices.
2. En fin d'année, l'entreprise veut écouler entièrement ses stocks de fils. Il lui reste 100 000 m de coton et de polyamide, et 20 000 m de Polyester. Peut-elle transformer entièrement ses stocks de fils en manteaux ?

Correction
Introduisons les deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ et les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ suivants

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}0.4&0.5&0.6&0.7\\1&1.1&1.2&1.3\\1.5&1.7&1.9&2.1\end{pmatrix}\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}500&400&1000\\1000&900&700\\500&600&0\end{pmatrix}\qquad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}s\\m\\\ell\\x\end{pmatrix}\qquad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}c\\a\\e\end{pmatrix}$$

1. Pour produire s manteaux taille S, m manteaux taille M, ℓ manteaux taille L et x manteaux taille XL, l'entreprise doit commander c mètres de coton, a mètres de polyamide et e mètres de polyester où c, a, e sont les entrées du vecteur $\mathbf{v}$ suivant :
$$\mathbf{v}=\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2100s+2390m+2680\ell+2970x\\2350s+2680m+3010\ell+3340x\\800s+910m+1020\ell+1130x\end{pmatrix}.$$
2. On cherche s'il existe un vecteur $\mathbf{u}$ tel que
$$\begin{pmatrix}100000\\100000\\20000\end{pmatrix}=\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbf{u},$$
i.e. s'il existe une solution du système linéaire
$$\begin{pmatrix}2100&2390&2680&2970\\2350&2680&3010&3340\\800&910&1020&1130\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\m\\\ell\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100000\\100000\\20000\end{pmatrix}.$$
En appliquant la méthode de GAUSS on obtient le système
$$\begin{pmatrix}2100&2390&2680&2970\\0&\frac{115}{21}&\frac{230}{21}&\frac{115}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\m\\\ell\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100000\\-\frac{250000}{21}\\-\frac{440000}{23}\end{pmatrix}$$
qui n'admet pas de solution.

Exercice 1.70
Soit le système linéaire
$$(S)\quad\begin{cases}x-\alpha y=1,\\\alpha x-y=1.\end{cases}$$
Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-\alpha&1\\\alpha&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\alpha L_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&-\alpha&1\\0&-1+\alpha^2&1-\alpha\end{array}\right).$$

Comme $-1+\alpha^2=(\alpha-1)(\alpha+1)$ on conclut que

1. si $\alpha=1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\alpha=-1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=2$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\alpha\not\in\{-1;1\}$ alors (S) possède une solution unique $x=\frac{1}{\alpha+1}$ et $y=-\frac{1}{\alpha+1}$.

Exercice 1.71

Soit le système linéaire

$$(S)\quad\begin{cases}x+\alpha y=1,\\ -\alpha x-y=1.\end{cases}$$

En utilisant le pivot de Gauss, déterminer les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ de telle sorte que ce système possède :

a) une infinité de solutions ;
b) aucune solution ;
c) une solution unique.

Correction

$$\begin{cases}x+\alpha y=1\\ -\alpha x-y=1\end{cases}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2+\alpha L_1}\begin{cases}x+\alpha y=1\\ (-1+\alpha^2)y=\alpha+1\end{cases}$$

Comme $-1+\alpha^2=(\alpha-1)(\alpha+1)$ on conclut que

a) si $\alpha=-1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
b) si $\alpha=1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=2$) alors (S) ne possède aucune solution,
c) si $\alpha\not\in\{-1;1\}$ alors (S) possède une solution unique $x=-\frac{1}{\alpha-1}$ et $y=\frac{1}{\alpha-1}$.

Exercice 1.72

Soit le système linéaire

$$(S)\quad\begin{cases}x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&3&\beta&3\\1&\beta&3&-3\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&\beta+2&1\\0&\beta-1&4&-4\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+(1-\beta)L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&\beta+2&1\\0&0&(6-\beta-\beta^2)&-(3+\beta)\end{array}\right).$$

Comme $6-\beta-\beta^2=(2-\beta)(3+\beta)$ on conclut que

1. si $\beta=-3$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\beta=2$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=-5$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\beta\not\in\{2;-3\}$ alors (S) possède une solution unique.

Exercice 1.73
Trouver les valeurs de $\kappa \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système suivant a un nombre respectivement fini et infini de solutions :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \kappa, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - \kappa x_2 + \kappa x_3 = \kappa. \end{cases}$$

Correction

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \kappa \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -\kappa & \kappa & \kappa \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1/2]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \kappa \\ 0 & -1/2 & -1 & -\kappa/2 \\ 0 & -\kappa+1/2 & \kappa & \kappa/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (1-2\kappa)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \kappa \\ 0 & -1/2 & -1 & -\kappa/2 \\ 0 & 0 & 3\kappa-1 & \kappa^2 \end{array}\right).$$

On conclut que

1. si $\kappa = \frac{1}{3}$ alors (S) ne possède aucune solution,
2. si $\kappa \neq \frac{1}{3}$ alors (S) possède une solution unique donnée par $x_3 = \frac{\kappa^2}{3\kappa-1}$, $x_2 = \frac{-\kappa/2+x_3}{-1/2} = \frac{\kappa(\kappa-1)}{3\kappa-1}$ et $x_1 = \frac{\kappa+x_2}{2} = \frac{\kappa(2\kappa-1)}{3\kappa-1}$,
3. il n'existe aucune valeur de κ pour que (S) possède une infinité de solutions.

Exercice 1.74
Résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ x - y + 2z = 7, \\ 3x + az = 10. \end{cases}$$

Correction
Si on utilise la méthode de Gauss on trouve

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & a & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & a-9 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & a-7 & -6 \end{array}\right).$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ -3y - z = 5, \\ (a-7)z = -6. \end{cases}$$

Par conséquent,

— si $a \neq 7$, $z = \dfrac{-6}{a-7}$, $y = \dfrac{5+z}{-3} = \dfrac{5a-41}{-3(a-7)}$ et $x = 2 - 2y - 3z = \dfrac{2(8a-35)}{3(a-7)}$ est l'unique solution du système linéaire ;
— si $a = 7$ il n'y a pas de solutions du système linéaire.

Observons que si on ne veut pas calculer la solution mais juste dire s'il en existe une (ou plusieurs), il suffit de regarder le rang des matrices $\mathbb{A}$ et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$:

— $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 7 \\ 2 & \text{si } a = 7 \end{cases}$ car $\det(\mathbb{A}) = 21 - 3a$ et $\det(\mathbb{A}_{33}) \neq 0$ où $\mathbb{A}_{33}$ est la sous-matrice de $\mathbb{A}$ obtenue en supprimant la 3-ème ligne et la 3-ème colonne ;
— $\mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ car $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \neq 0$ où $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ est la sous-matrice de $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$ obtenue en supprimant la 3-ème colonne.

Exercice 1.75

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ x + 2y + 3z = 2, \\ 3x + az = 10. \end{cases}$$

Correction

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & a & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & a-6 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & a-7 & -6 \end{array}\right).$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ 3y + z = -5, \\ (a-7)z = -6. \end{cases}$$

Par conséquent,

- si $a \neq 7$, $z = \frac{-6}{a-7}$, $y = \frac{-5-z}{3} = \frac{-5a+41}{3(a-7)}$ et $x = 7 - y - 2z = \frac{2(8a-35)}{3(a-7)}$ est l'unique solution du système linéaire ;
- si $a = 7$ il n'y a pas de solutions du système linéaire.

Observons que si on ne veut pas calculer la solution mais juste dire s'il en existe une (ou plusieurs), il suffit de regarder le rang des matrices $\mathbb{A}$ et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$:

- $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 7 \\ 2 & \text{si } a = 7 \end{cases}$ car $\det(\mathbb{A}) = 3a - 21$ et $\det(\mathbb{A}_{33}) \neq 0$ où $\mathbb{A}_{33}$ est la sous-matrice de $\mathbb{A}$ obtenue en supprimant la 3-ème ligne et la 3-ème colonne ;
- $\mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ car $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ où $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{smallmatrix}\right)$ est la sous-matrice de $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]\,A$ obtenue en supprimant la 3-ème colonne.

Exercice 1.76

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + z + w = 0, \\ ax + y + (a-1)z + w = 0, \\ 2x + ay + z + 2w = 0, \\ x - y + 2z + aw = 0. \end{cases}$$

Correction

Il s'agit d'un système homogène, il est alors inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de Gauss. En appliquant cette méthode on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-a \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - aL_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & a(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x + z + w = 0, \\ y - z + (1-a)w = 0, \\ (a-1)z + a(a-1)w = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si on pose $w = \kappa_1 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque, alors

— si $a \neq 1$, $z = \frac{-a(a-1)w}{a-1} = -a\kappa_1$, $y = -(1-a)w+z = -\kappa_1$ et $x = -w-z = (a-1)\kappa_1$: tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{(a-1,-1,-a,1)\}$ sont solution du système linéaire ;

— si $a = 1$, on pose $z = \kappa_2 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque et on a $y = -(1-a)w+z = -(1-a)\kappa_1+\kappa_2$ et $x = -w-z = -\kappa_1-\kappa_2$: tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{(-1,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$ sont solution du système linéaire.

Exercice 1.77

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+z+w=0,\\ (b+1)x+y+bz+w=0,\\ 2x+(b+1)y+z+2w=0,\\ x-y+2z+(b+1)w=0. \end{cases}$$

Correction

Il s'agit d'un système homogène, il est alors inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de Gauss. En appliquant cette méthode on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ b+1 & 1 & b & 1\\ 2 & b+1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3-2L_1\\ L_4 \leftarrow L_4-L_1}]{L_2 \leftarrow L_2-(b+1)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -b\\ 0 & b+1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4+L_2]{L_3 \leftarrow L_3-(b+1)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -b\\ 0 & 0 & b & b(b+1)\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x+z+w=0,\\ y-z-bw=0,\\ bz+b(b+1)w=0,\\ 0=0. \end{cases}$$

Par conséquent, si on pose $w = \kappa_1 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque, alors

— si $b \neq 0$,
$$z = \frac{-b(b+1)w}{b} = -(b+1)\kappa_1, \qquad y = bw+z = -\kappa_1, \qquad x = -w-z = b\kappa_1;$$
tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{(b+1,1,b+1,-1)\}$ sont solution du système linéaire ;

— si $b = 0$, on pose $z = \kappa_2 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque et on a $y = bw+z = \kappa_2$ et $x = -w-z = -\kappa_1-\kappa_2$: tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{(-1,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$ sont solution du système linéaire.

Exercice 1.78

Discuter et résoudre le système

$$(S_a) \quad \begin{cases} (1+a)x+y+z=0,\\ x+(1+a)y+z=0,\\ x+y+(1+a)z=0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Correction

Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)^3+1+1-(1+a)-(1+a)-(1+a) = (1+a)^3-3(1+a)+2$$
$$= \Big((1+a)-1\Big)\Big((1+a)^2+(1+a)-2\Big) = \Big((1+a)-1\Big)\Big((1+a)+2\Big)\Big((1+a)-1\Big) = a^2(3+a).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_a) \text{ est de Cramer si et seulement } a \in \mathbb{R}\setminus\{-3,0\}.$$

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

— *Étude du cas $a=-3$.* Le système s'écrit

$$(S_{-3})\quad\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ x-2y+z=0,\\ x+y-2z=0,\end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases}-2x & y & +z=0\\ & x-2y & +z=0\\ & x & y-2z=0\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1/2]{L_2\leftarrow L_2+L_1/2}\begin{cases}-2x & y & +z=0\\ & -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\ & \frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=0\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{cases}-2x & -y & +z=0\\ & -\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\ & 0z=0\end{cases}$$

donc $z=\kappa\in\mathbb{R}$, $y=z$ et $x=z$, ainsi

$$\mathscr{S}=\{\,(\kappa,\kappa,\kappa)\mid\kappa\in\mathbb{R}\,\}.$$

— *Étude du cas $a=0$.* Le système s'écrit

$$(S_0)\quad\begin{cases}x+y+z=0,\\ x+y+z=0,\\ x+y+z=0,\end{cases}$$

donc $z=\kappa_1\in\mathbb{R}$, $y=\kappa_2\in\mathbb{R}$ et $x=-\kappa_1-\kappa_2$, ainsi

$$\mathscr{S}=\left\{\,(-\kappa_1-\kappa_2,\kappa_2,\kappa_1)\;\middle|\;(\kappa_1,\kappa_2)\in\mathbb{R}^2\,\right\}.$$

— *Étude du cas $a\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$.* Il s'agit d'un système de Cramer homogène, donc l'unique solution est $(0,0,0)$:

$$\mathscr{S}=\{\,(0,0,0)\,\}.$$

Exercice 1.79

Discuter et résoudre le système

$$(S_a)\quad\begin{cases}x+ay+(a-1)z=0,\\ 3x+2y+az=3,\\ (a-1)x+ay+(a+1)z=a,\end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et de paramètre $a\in\mathbb{R}$.

Correction

Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\begin{vmatrix}1 & a & a-1\\ 3 & 2 & a\\ a-1 & a & a+1\end{vmatrix}=2(a+1)+a^2(a-1)+3a(a-1)-2(a-1)^2-a^2-3a(a+1)=a^2(a-4).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_a)\text{ est de Cramer si et seulement }a\in\mathbb{R}\setminus\{0,4\}.$$

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

— *Étude du cas $a=0$.* Le système s'écrit

$$(S_0)\quad\begin{cases}x-z=0,\\ 3x+2y=3,\\ -x+z=0,\end{cases}$$

donc $z=\kappa\in\mathbb{R}$, $y=\frac{3-3\kappa}{2}$ et $x=\kappa$, ainsi

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\kappa,\frac{3-3\kappa}{2},\kappa\right)\;\middle|\;\kappa\in\mathbb{R}\right\}.$$

— *Étude du cas $a=4$*. Le système s'écrit

$$(S_4)\quad \begin{cases} x+4y+3z=0,\\ 3x+2y+4z=3,\\ 3x+4y+5z=4,\end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+4y+3z=0,\\ 3x+2y+4z=3,\\ 3x+4y+5z=4,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-3L_1} \begin{cases} x\ +4y+3z=0,\\ \quad -10y-5z=3,\\ \quad -8y-4z=4,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow 10L_3-8L_2} \begin{cases} x\ +4y+3z=0,\\ \quad -10y-5z=3,\\ \qquad 0=16.\end{cases}$$

La dernière équation est impossible donc

$$\mathscr{S}=\emptyset.$$

— *Étude du cas $a\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$*. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+ay+(a-1)z=0,\\ 3x+2y\qquad +az=3,\\ (a-1)x+ay+(a+1)z=a,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-(a-1)L_1]{L_2\leftarrow L_2-3L_1} \begin{cases} x\qquad +ay\ +(a-1)z=0,\\ (2-3a)y+(3-2a)z=3,\\ (2-a)ay+(3-a)az=a,\end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{(2-a)a}{(2-3a)}L_2} \begin{cases} x\qquad +ay\ +(a-1)z=0,\\ (2-3a)y+(3-2a)z=3,\\ \qquad -\frac{a^2(a-4)}{3a-2}z=\frac{4a}{3a-2}.\end{cases}$$

On obtient $z=-\frac{4}{a(a-4)}$, $y=-\frac{a-6}{a(a-4)}$, $x=\frac{a^2-2a-4}{a(a-4)}$, ainsi

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{a^2-2a-4}{a(a-4)},-\frac{a-6}{a(a-4)},-\frac{4}{a(a-4)}\right)\right\}.$$

Calcul de la matrice inverse

Exercice 1.80

Calculer $\mathbb{A}^{-1}$ où $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix}1&0&-1\\4&-1&-2\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

Correction

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_3]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\4&-1&-2&0&1&0\\-2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ L_3\leftarrow L_3+2L_1}]{L_1\leftarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&2&-4&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow -L_2\\ L_3\leftarrow L_3}]{L_1\leftarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-2&4&-1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_3\\ L_3\leftarrow -L_3}]{L_1\leftarrow L_1-L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&0&-1&-2\\0&0&1&-2&0&-1\end{array}\right)=[\mathbb{I}_3|\mathbb{A}^{-1}].$$

```
A=[1 0 -1; 4 -1 -2; -2 0 1]
inv(A)
```

Exercice 1.81

Calculer $\mathbb{A}^{-1}$ où $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$.

Correction

$$
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) = [\mathbb{I}_3|\mathbb{A}^{-1}].
$$

```
A=[1 0 1; 0 1 2; 2 0 1]
inv(A)
```

Exercice 1.82
Calculer les inverses des matrices suivantes (si elles existent) :

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}.
$$

Correction
$\det(\mathbb{A}) = 22 \neq 0$ donc $\mathbb{A}$ est inversible et on trouve

$$
\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.
$$

$\det(\mathbb{B}) = 2 \neq 0$ donc $\mathbb{B}$ est inversible et on trouve

$$
\mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -130 & 28 & 38 \\ 24 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

$\det(\mathbb{C}) = 0$ donc $\mathbb{C}$ n'est pas inversible.

Exercice 1.83
Soit $\mathbb{A}$ la matrice

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
$$

1. Calculer $\det(\mathbb{A})$.
2. Si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$, calculer $\mathbb{A}^{-1}$.

Correction

1. Pour calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$ on développe par rapport à la première ligne

$$
\det(\mathbb{A}) = 1 \cdot \det(\mathbb{A}_{11}) - 0 \cdot \det(\mathbb{A}_{12}) + 0 \cdot \det(\mathbb{A}_{13}) - (-1) \cdot \det(\mathbb{A}_{14}) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
$$

On note que la première colonne de la sous-matrice $\mathbb{A}_{11}$ est l'opposée de la deuxième colonne, ainsi le déterminant de $\mathbb{A}_{11}$ est nul et il ne reste plus qu'à calculer le déterminant de $\mathbb{A}_{14}$ (par exemple en utilisant la règle de SARRUS).

$$
\det(\mathbb{A}) = 0 + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1.
$$

2. Calculons $\mathbb{A}^{-1}$ avec l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode de Gauss

$$
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_4]=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-2L_2}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1\\ L_2\leftarrow L_2+L_3\\ L_4\leftarrow L_4-2L_3}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_4\\ L_2\leftarrow L_2+L_4\\ L_3\leftarrow L_3+L_4}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1
\end{array}\right)
=[\mathbb{I}_4|\mathbb{A}^{-1}].
$$

Méthode de Cramer

— On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$:

$$
\text{comatrice}=\begin{pmatrix}
+\begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-2\\2&0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&-1&-2\\1&0&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\1&2&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\1&2&0\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}0&0&-1\\2&-1&-2\\2&0&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-1&-2\\1&0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&2&-2\\1&2&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\1&2&0\end{vmatrix}\\
+\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&-1&-1\\2&0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\1&0&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\1&2&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&2&0\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&-1&-1\\2&-1&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\1&-1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\1&2&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&2&-1\end{vmatrix}
\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}0&-1&0&-1\\2&1&0&2\\-2&-1&-1&-2\\1&1&1&1\end{pmatrix};
$$

— on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$:

$$
\text{comatrice}^T=\begin{pmatrix}0&2&-2&1\\-1&1&-1&1\\0&0&-1&1\\-1&2&-2&1\end{pmatrix};
$$

— on divise par $\det(\mathbb{A})$ et on obtient

$$
\mathbb{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-2&1\\-1&1&-1&1\\0&0&-1&1\\-1&2&-2&1\end{pmatrix}.
$$

```
A=[1 0 0 -1; 1 1 -1 -1; 1 2 -1 -2; 1 2 0 -2]
det(A)
inv(A)
```

Systèmes linéaires : méthode de Gauss pour des systèmes rectangulaires (sur ou sous déterminés)

Exercice 1.84

Vrai ou faux?

① Un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues dont les secondes membres sont nuls n'a que la solution nulle.

② Un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues dont les secondes membres sont nuls a des solutions non nulles.

Correction

① Faux. Contrexemple : un système linéaire où toutes les équations sont identiques.

② Vrai : $\text{rg}(\mathbb{A}) \le 3$, $\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \le 3$; comme les secondes membres sont nuls alors $\text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = \text{rg}(\mathbb{A})$ donc il admet forcement des solutions ; comme il y a 4 inconnues, alors on a une infinité de solutions.

Exercice 1.85

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Correction

(S) est équivalent au système

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ -3y + 3z = 0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme (κ, κ, κ) pour $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.86

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 = b. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible ?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

Correction

(S) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 0 = b + 18. \end{cases}$$

1. (S) est possible si et seulement si $b = -18$.
2. Si $b = -18$, (S) admet ∞^3 solutions de la forme $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6 - a + 2b - 4c, a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.87

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ 2x + y - z = 1, \\ -x + y + 2z = -2, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

Correction

(S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S') \quad \begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ 2x + y - z = 1, \\ -x + y + 2z = -2, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ -3y-3z=3, \\ 3y+3z=-3, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ -3y-3z=3, \\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(1+\kappa, -1-\kappa, \kappa)$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x, y, z) = (1+\kappa, -1-\kappa, \kappa)$ on a $x + y + z = 1 + \kappa - 1 - \kappa + \kappa = \kappa$ donc $x + y + z = 4$ si et seulement si $\kappa = 4$ ainsi (S) admet l'unique solution $(5, -5, 4)$.

Exercice 1.88

Déterminer si le système suivant a une solution non nulle. Dans le cas affirmatif trouver la(les) solution(s) et expliquer pourquoi :

$$(S)\quad \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\\ 3x-11y+12z=0.\end{cases}$$

Correction

(S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S')\quad \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x\ +y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x-2y\ +2z=0,\\ 5y\ -6z=0,\\ 10y-12z=0,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 5y-6z=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 6\kappa, 5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ on a $3x-11y+12z=6\kappa-66\kappa+60\kappa=0$ donc $3x-11y+12z=0$ pour tout $\kappa\in\mathbb{R}$ ainsi (S) admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$.

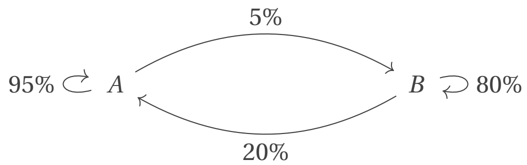
1.5.4 Valeurs et vecteur propres

Exercice 1.89 (Migration entre deux villes)

Deux villes A et B totalisent une population d'un million d'habitants. La ville A est plus agréable, mais la ville B offre plus de possibilités d'emplois. 20% des habitants de B partent chaque année habiter A pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de A partent chaque année habiter B pour trouver un meilleur emploi. Sachant qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en A, quelle est la population de A et de B au bout de 1 an, 2 ans, 4 ans, 9 ans ?

Correction

On résume les informations dans un graphe de transition :



Les sommets du graphes correspondent aux différents états possibles (ici, habiter la ville A ou la ville B), et les flèches donnent le pourcentage de gens qui passent d'un état à un autre, d'une année sur l'autre.

Méthode directe La suite des états successifs est décrite par une relation de récurrence linéaire, de la forme $\mathbf{x}_{n+1}=\mathbb{T}\mathbf{x}_n$. Le vecteur $\mathbf{x}_n\in\mathbb{R}^2$ est le vecteur d'état du système, *i.e.* le vecteur (a_n,b_n) où a_n est la population de la ville A après n années et b_n est la population de la ville B après n années, et la matrice $\mathbb{T}$ est la matrice de transition. Ainsi,

$$\mathbf{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}\frac14\\ \frac34\end{pmatrix} \qquad \mathbb{T}=\begin{pmatrix}95\% & 20\%\\ 5\% & 80\%\end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbf{x}^{(1)}=\mathbb{T}\mathbf{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}95\% & 20\%\\ 5\% & 80\%\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14\\ \frac34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{31}{80}\\ \frac{49}{80}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3875\\ 0.6125\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbb{T}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 95\% & 20\% \\ 5\% & 80\% \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{31}{80} \\ \frac{49}{80} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{157}{320} \\ \frac{163}{320} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90625 \\ 0.509375 \end{pmatrix}$$

Méthode par récurrence La relation de récurrence linéaire qui peut être explicitée : $\mathbf{x}_n = \mathbb{T}^n \mathbf{x}_0$. Ainsi,

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbb{T}^2\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{73}{80} & \frac{7}{20} \\ \frac{7}{80} & \frac{13}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{157}{320} \\ \frac{163}{320} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90625 \\ 0.509375 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \mathbb{T}^4\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{221}{256} & \frac{35}{64} \\ \frac{35}{256} & \frac{29}{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{641}{1024} \\ \frac{383}{1024} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.6259765625 \\ 0.3740234375 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(9)} = \mathbb{T}^9\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1068259}{1310720} & \frac{242461}{327680} \\ \frac{242461}{1310720} & \frac{85219}{327680} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3977791}{5242880} \\ \frac{1265089}{5242880} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.7587034225 \\ 0.2412965775 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier numériquement que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

autrement dit la suite converge vers un état où le 80% de la population se trouve dans la la ville A et 20% dans la ville B.

Méthode par diagonalisation En diagonalisant d'abord la matrice $\mathbb{T}$ on obtient $\mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$ avec

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25\% \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{5} & \frac{\sqrt{17}}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{P}\mathbb{D}^k\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{5} & \frac{\sqrt{17}}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{5} & \frac{\sqrt{17}}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 1.90 (Chaîne de Markov)

Considérons un processus de MARKOV modélisé par la matrice de transition suivante :

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que les valeurs propres de $\mathbb{T}$ sont 1 et $-\frac{1}{3}$.
2. Calculer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sans les normaliser (on utilisera la méthode de GAUSS pour résoudre les deux systèmes linéaires).
3. Définir deux matrice $\mathbb{D}$ et $\mathbb{P}$ telles que $\mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$ et calculer $\mathbb{P}^{-1}$ en utilisant la méthode de GAUSS.
4. On veut trouver le comportement du processus à long terme si l'état initiale est $\mathbf{x}^{(0)} = (1,0)^T$. On sait que le comportement du processus à l'étape $k+1$ est lié au comportement à l'étape k par la relation $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{T}\mathbf{x}^{(k)}$ et donc, par récurrence, $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{T}^{k+1}\mathbf{x}^{(0)}$. On cherche à calculer $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)}$.
   — S'il existe $\mathbf{x} = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)}$, alors $\mathbf{x} = \mathbb{T}\mathbf{x}$, autrement dit $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire $(\mathbb{T} - \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Calculer $\mathbf{x}$ et le diviser par la somme de ses composantes.
   — Étant donné que $\mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$, alors $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{P}(\lim_{k\to+\infty} \mathbb{D}^k)\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$. Calculer le produit $\mathbb{P}(\lim_{k\to+\infty} \mathbb{D}^k)\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$ et le diviser par la somme de ses composantes. Vérifier qu'on obtient bien la valeur calculée précédemment.

Correction

1. Calcul des valeurs propres :

$$p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbb{T}-\lambda\mathbb{I}_2) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda\end{pmatrix} = -\lambda\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)-\frac{1}{3} = \lambda^2-\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{3}.$$

   On vérifie facilement que les valeurs données annulent ce polynôme, en effet :

$$p(1) = 1^2-\frac{2}{3}-\frac{1}{3} = 0,$$
$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{3} = 0.$$

2. On pose $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$. Pour calculer les vecteurs propres on doit résoudre deux systèmes linéaires homogènes.[1]

   2.1. On résout le système linéaire $(\mathbb{T}-\lambda_1\mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ce qui donne l'espace vectoriel des vecteurs de la forme $(\kappa, 3\kappa)^T$:

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2\leftarrow L_2+\frac{1}{3}L_1]{} \begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} y = \kappa,\\ x = \frac{1}{3}y = \frac{\kappa}{3}.\end{cases}$$

   On choisit par exemple comme base l'élément $\mathbf{x} = (1,3)^T$.

   2.2. On résout le système linéaire $(\mathbb{T}-\lambda_2\mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ce qui donne l'espace vectoriel des vecteurs de la forme $(-\kappa, \kappa)^T$:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2\leftarrow L_2-L_1]{} \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} y = \kappa,\\ x = -y = -\kappa.\end{cases}$$

   On choisit par exemple comme base l'élément $\mathbf{x} = (-1,1)^T$.

3. $\mathbb{D}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres et $\mathbb{P}$ la matrice dont chaque colonne contient un vecteur de l'espace propre associé. On pose donc

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \qquad \mathbb{P} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

   et on calcule $\mathbb{P}^{-1}$:

$$[\mathbb{P}|\mathbb{I}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -3 & 1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2/4} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4\end{array}\right) \xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4\end{array}\right) = [\mathbb{I}_2|\mathbb{P}^{-1}]$$

   Ainsi

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

4. À long terme le vecteur d'état sera $\mathbf{x} = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)}$.

   — On a déjà calculé la solution du système linéaire $(\mathbb{T}-\mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, il s'agit simplement d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1, donc si on note $\mathbf{v} = (1,3)^T$, on calcule $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{v}}{\sum_{i=1}^2 v_i} = (1/4, 3/4)^T = (25\%, 75\%)^T$.

   — Étant donné que $\mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$, alors

$$\mathbb{P}(\lim_{k\to+\infty}\mathbb{D}^k)\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \lim_{k\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{(-3)^k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

   donc $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)^T$.

1. Les systèmes étant homogènes, on n'écrira pas la matrice augmentée.

Exercice 1.91 (Chaîne de Markov)

Une étude non officielle de la météo dans une ville au début du printemps montre les observations suivantes :

— il est presque impossible d'avoir deux beaux jours consécutifs,

— si nous avons un beau jour, on a la même probabilité d'avoir de la neige ou de la pluie le jour suivant,

— si nous avons la neige ou de la pluie, alors nous avons une chance égale pour avoir la même chose le jour suivant,

— s'il y a un changement de neige ou de pluie, seulement la moitié du temps ce changement est à un beau jour.

Si les lettres b, p, n représentent beau, pluie et neige respectivement, on note $P(i \to j)$ la probabilité d'avoir la météo j si la veille la météo était i, donc

$$\begin{aligned} &P(b\to b)=0 && P(p\to b)=0.25 && P(n\to b)=0.25\\ &P(b\to p)=0.5 && P(p\to p)=0.5 && P(n\to p)=0.25\\ &P(b\to n)=0.5 && P(p\to n)=0.25 && P(n\to n)=0.5. \end{aligned}$$

Comme la météo de demain dépend seulement d'aujourd'hui, c'est un processus de MARKOV. La matrice de transition qui modélise ce système est donc

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que les valeurs propres de $\mathbb{T}$ sont 1, $\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{4}$.
2. Calculer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sans les normaliser (on utilisera la méthode de GAUSS pour résoudre les trois systèmes linéaires).
3. Définir deux matrice $\mathbb{D}$ et $\mathbb{P}$ telles que $\mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$ et calculer $\mathbb{P}^{-1}$ en utilisant la méthode de GAUSS.
4. On veut trouver le comportement de la météo à long terme s'il fait beau aujourd'hui, *i.e.* si $\mathbf{x}^{(0)} = (1,0,0)^T$. On sait que le comportement de la météo au jour $k+1$ est lié à la météo au jour k par la relation

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{T}\mathbf{x}^{(k)}$$

et donc, par récurrence,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{T}^{k+1}\mathbf{x}^{(0)}.$$

On cherche à calculer $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)}$.

— S'il existe $\mathbf{x} = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)}$, alors $\mathbf{x} = \mathbb{T}\mathbf{x}$, autrement dit $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire $(\mathbb{T} - \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Calculer cette limite. [a]

— Étant donné que $\mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{T}^k\mathbf{x}^{(0)} = \lim_{k\to+\infty} (\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1})^k\mathbf{x}^{(0)} = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\mathbb{D}^k\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \mathbb{P}(\lim_{k\to+\infty} \mathbb{D}^k)\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$$

Calculer ce produit et vérifier qu'on obtient bien la limite $\mathbf{x}$ calculée précédemment.

a. Puisque toutes les entrées de la matrice de transition sont entre 0 et 1 exclusivement, alors la convergence est garantie d'avoir lieu. La convergence peut avoir lieu quand 0 et 1 sont dans la matrice de transition, mais la convergence n'est plus garantie.

Correction

1. Calcul des valeurs propres :

$$p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbb{T} - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) + \frac{1}{16}\lambda - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda - \frac{1}{16}.$$

On vérifie facilement que les valeurs données annulent ce polynôme, en effet :

$$\begin{aligned} p(1) &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda - \frac{1}{16} = -1 + 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 0,\\ p\left(\frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{4} - \frac{1}{16} = 0,\\ p\left(-\frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{(-4)^3} + \frac{1}{(-4)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{-4} - \frac{1}{16} = 0. \end{aligned}$$

2. On pose $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$. Pour calculer les vecteurs propres on doit résoudre trois systèmes linéaires.[2]

   2.1. On résout le système linéaire $(\mathbb{T} - \lambda_1 \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ce qui donne $\mathbf{x} = (1, 2, 2)^T$:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} z = \kappa, \\ y = \frac{-\frac{3}{8}z}{-\frac{3}{8}} = \kappa, \\ x = \frac{-\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z}{-1} = \frac{\kappa}{2}. \end{cases}$$

   2.2. On résout le système linéaire $(\mathbb{T} - \lambda_2 \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ce qui donne $\mathbf{x} = (0, 1, -1)^T$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}]{} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} z = \kappa, \\ y = \frac{-\frac{3}{4}z}{\frac{3}{4}} = -\kappa, \\ x = \frac{-\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z}{-\frac{1}{4}} = 0. \end{cases}$$

   2.3. On résout le système linéaire $(\mathbb{T} - \lambda_3 \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ce qui donne $\mathbf{x} = (-2, 1, 1)^T$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} z = \kappa, \\ y = \frac{\frac{1}{4}z}{\frac{1}{4}} = \kappa, \\ x = \frac{-\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z}{\frac{1}{4}} = -2\kappa. \end{cases}$$

3. $\mathbb{D}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres et $\mathbb{P}$ la matrice dont chaque colonne contient le vecteur propre associé. On pose donc

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   et on calcule $\mathbb{P}^{-1}$:

$$[\mathbb{P}|\mathbb{I}_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3/10} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right) = [\mathbb{I}_3|\mathbb{P}^{-1}]$$

   Ainsi

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

4. S'il fait beau aujourd'hui, alors le vecteur d'état initial est

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   À long terme le vecteur d'état sera $\mathbf{x} = \lim_{k \to +\infty} \mathbf{x}^{(k)}$.

   — On a déjà calculé la solution du système linéaire $(\mathbb{T} - \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, il s'agit simplement d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1, donc si on note $\mathbf{v} = (1, 2, 2)^T$, on calcule $\mathbf{x} = \mathbf{v} / \sum_{i=1}^{3} v_i = (1/5, 2/5, 2/5)^T$.

2. Les systèmes étant homogènes, on n'écrira pas la matrice augmentée.

— Étant donné que $\mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$, alors

$$\mathbf{x} = \mathbb{P}(\lim_{k\to+\infty} \mathbb{D}^k)\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \lim_{k\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(-4)^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

À long terme, il y a une probabilité de 20% d'avoir un beau jour, 40% d'avoir de la pluie et 40% d'avoir de la neige.

Exercice 1.92 (Valeurs singulières)

Soit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer analytiquement et vérifier numériquement sa décomposition SVD.

Correction

$\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ avec $n = 2$ et $p = 3$ donc $r = 2$.

Pour calculer la décomposition SVD nous allons calculer les valeurs et vecteurs propres des matrices $\mathbb{A}\mathbb{A}^T$ et $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$.

	Valeurs propres	Vecteurs propres unitaires
$\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9 > \lambda_2 = 1$	$\mathbb{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9 > \lambda_2 = 1 > \lambda_3 = 0$	$\mathbb{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Donc $\sigma_1^2 = 9$, $\sigma_2^2 = 1$ et

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{S}\mathbb{V}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{n\times p}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \\ \mathbf{v}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p^T \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{p\times p}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{n\times r}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{r\times r}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{r\times p}} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \underbrace{\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i^T}_{\in\mathbb{R}^{r\times r}}$$

devient

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\stackrel{r=2}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que la décomposition n'est pas unique, par exemple avec Octave on trouve

Vecteurs propres unitaires :

$$\mathbb{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne le même résultat (heureusement!)

```
A=[1 2 0; 2 1 0]
[n,p]=size(A)
r=min(n,p)

AAT=A*A'
[VecAAT,ValAAT]=eig(AAT) % unsorted list of all eigenvalues
% To produce a sorted vector with the eigenvalues, and re-order the eigenvectors accordingly:
[ee,perm] = sort(diag(abs(ValAAT)),"descend");
ValAAT=diag(ee)
VecAAT=VecAAT(:,perm)

ATA=A'*A
[VecATA,ValATA]=eig(ATA)
[ee,perm] = sort(diag(abs(ValATA)),"descend");
ValATA=diag(ee)
VecATA=VecATA(:,perm)

myS=diag(sqrt(diag(ValATA)),n,p)
myU=VecAAT
myV=VecATA

[UU,SS,VV]=svd(A)

dS=diag(SS)

AA=zeros(5,4);
for i=1:length(dS)
   temp=dS(i)*UU(:,i)*VV(i,:)
   AA+=temp
end
```