CHAPITRE 1

Fonctions de plusieurs variables

— Une *fonction* f de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles fait correspondre à tout point $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ au plus un réel $f(\mathbf{x})$. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se note aussi $\mathbf{x}$ ou $\underline{x}$. Si $n = 2$, on utilise souvent la notation (x, y), si $n = 3$ la notation (x, y, z).

— Le *domaine de définition* de f est l'ensemble $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ des points $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui ont une image par f.

— L'*image* par f de $\mathscr{D}$ est l'ensemble $\operatorname{Im}_f(\mathscr{D}_f) = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid r = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathbb{R}$.

— L'ensemble des points $S = \left\{ (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathscr{D}_f \right\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la *surface représentative* de f ; c'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction d'une variable. Évidemment, la représentation géométrique devient plus lourde que pour les fonctions d'une seule variable : une fonction de n variables se visualise à priori dans un espace à $n+1$ dimensions (n pour les variables, 1 pour le résultat de la fonction), alors que les pages d'un livre sont, par nature, bidimensionnelles. Pour contourner cette impossibilité technique, nous nous limiterons aux représentations des fonctions de deux variables, soit sous forme de dessins en perspective, soit sous forme de coupes par des plans horizontaux ou verticaux qui donnent des informations souvent utiles, quoique parcellaires. Ce problème de visualisation introduit une rupture nette par rapport aux fonctions d'une variable étudiées antérieurement.

Lorsque $n = 2$, le graphe

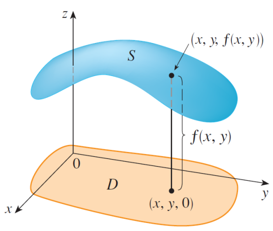
$$\mathscr{G}_f \equiv \left\{ (x, y, z = f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathscr{D}_f \right\}$$

est tridimensionnel. On peut considérer le graphe d'une fonction de deux variables comme étant le relief d'une région (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude).

On visualise le graphe d'une fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

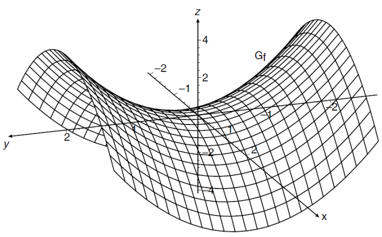
par l'altitude $z = f(x, y)$.



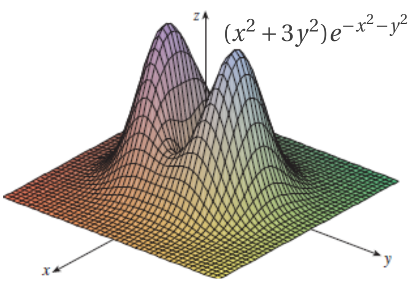
Les axes relatifs aux variables, x et y, sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine $\mathscr{D}_f$ apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z. Ainsi, à tout $(x, y) \in \mathscr{D}_f$, dont l'image est $f(x, y) \in \mathbb{R}$, correspond le point suivant du graphe : $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet la visualisation des surfaces à trois dimensions. Dans ce cas, l'axe z est toujours placé verticalement. Toutefois, pour des raisons de lisibilité, les axes x et y ne sont pas toujours présentés selon la même orientation.

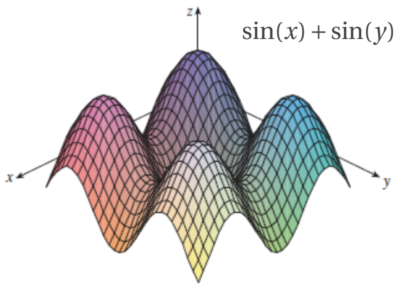
Exemple

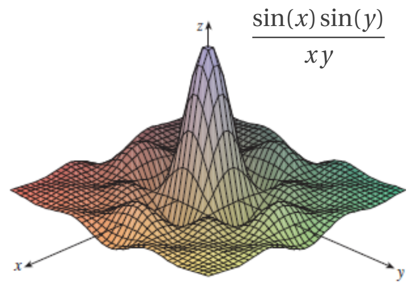
Le graphe de la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ qui a la forme d'une selle de cheval, comme l'indique la représentation en perspective de la figure ci-dessous.



Voici d'autres exemples :



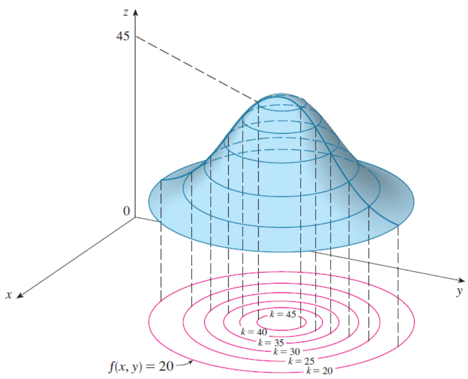


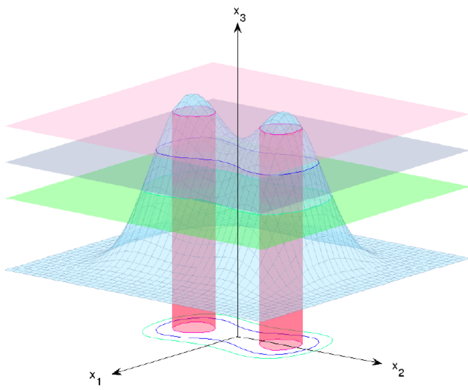


Si on considère des coupes horizontales on obtient, de façon générale, des courbes planes, dites *courbes ou lignes de niveau.*

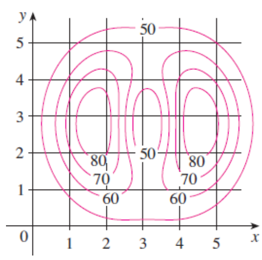
Définition 1.1 (Lignes de niveau)
Soit $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; la courbe de niveau k de la fonction f est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection de la surface représentative de f avec le plan horizontal $z = k$, *i.e.* l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathscr{D} \mid f(x, y) = k\right\}$.

En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. Les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace.

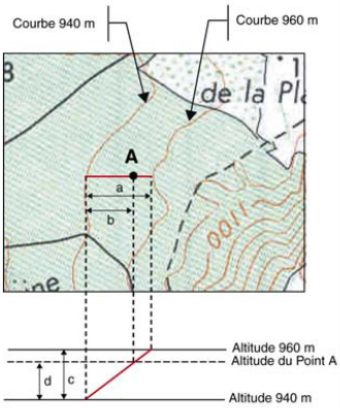


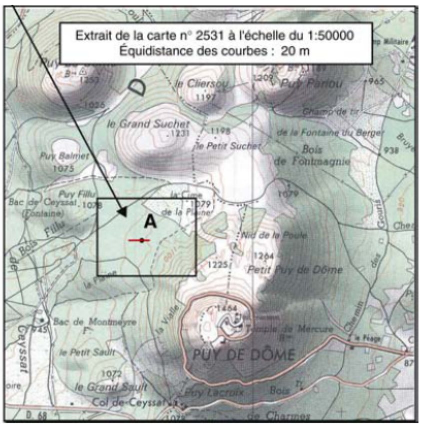


EXEMPLE
L'image ci-contre montre les courbes de niveaux d'une fonction f. On peut alors se faire une idée de l'allure de la fonction supposée continue. Par exemple $f(1;3) \approx 72$, $f(4;5) \approx 56$, soit $40 < f(3;3) < 50$ soit $50 < f(3;3) < 60$, etc.



EXEMPLE (CARTES TOPOGRAPHIQUES)
On peut considérer le relief d'une région comme étant le graphe d'une fonction de deux variables (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude). Une courbe de niveau nous indique les points de même altitude (ici, l'altitude du point A est $940 + d = 940 + cb/a$). En dessinant les courbes de niveau avec leur altitude correspondante, on obtient la *carte topographique du relief.* La lecture d'une carte topographique permet non seulement d'obtenir des mesures quantitatives du relief, mais aussi de faire rapidement des observations qualitatives sur sa nature. Par exemple, localiser les points de plus haute et de plus basse altitude; les crêtes, les fonds, les vallées, les cols, etc.; les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces, puisqu'ils correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.
Attention : dans cette représentation les couleurs ne correspondent pas à la représentation planaire mais servent à reproduire les ombres.





1.1 Dérivées partielles du premier ordre et gradient

Rappels Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que f *est dérivable* en $x_0 \in I$ s'il existe finie la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ce qui équivaut, en posant $h = x - x_0$, à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cette limite est notée $f'(x_0)$ et appelée dérivée de f en x_0.

L'unique dérivée d'une fonction d'une variable réelle, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction tandis que la variable parcourt l'axe des abscisses. Pour une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de $\mathbb{R}^3$, la situation est très différente. En effet, l'axe réel n'offre que deux types de mouvements possibles : de gauche à droite et de droite à gauche tandis que le plan $\mathbb{R}^2$ possède une infinité de directions. Il peut s'avérer intéressant d'étudier comment une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan. À cet égard, considérons d'abord la direction à y fixé. Prenons le point (x_0, y_0) du domaine de f. Son image est $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de $\mathbb{R}^3$, comporte le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = y_0$ est la courbe d'équation $z = f(x, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$. Le point (x_0, y_0) étant fixé, on peut alors interpréter cette courbe comme le graphe de la fonction $f_{y=y_0}$ d'une seule variable définie par $f_{y=y_0}(x) = f(x, y_0)$ dans le repère $x0z$. Si $f_{y=y_0}$ est dérivable en x_0, alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de la fonction f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ passant par le point (x_0, y_0). Par analogie on peut répéter le même raisonnement à x fixé. En conclusion, lorsqu'on pose toutes les variables d'une fonction égales à une constante, sauf une, on obtient alors une fonction d'une seule variable qui peut être dérivée suivant les règles habituelles.

Définition 1.2 (Dérivées partielles premières)
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions partielles f_{y_0} et f_{x_0} évaluées en (x_0, y_0), *i.e.* les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad \text{dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } x \text{ au point } (x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \qquad \text{dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } y \text{ au point } (x_0, y_0)$$

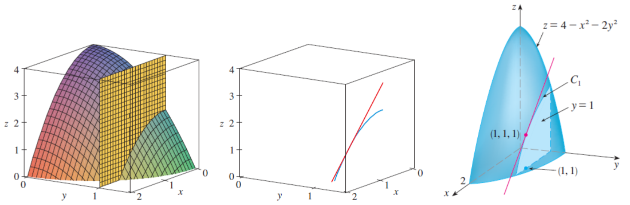
Il s'agit de limites d'une fonction réelle de variable réelle !
Si f admet toutes les dérivées partielles premières, on dit que f est *dérivable*.

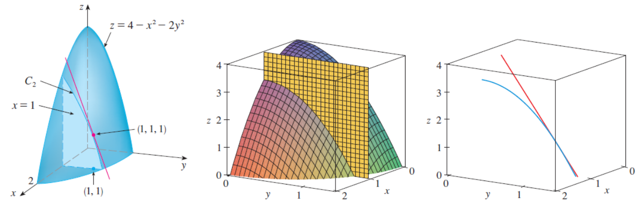
Remarque (Notation)
La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ se note aussi $\partial_x f$ ou $f_{,x}$ ou encore $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y$ en insistant sur la variable qu'on considère constante.
(Attention à ne pas confondre $f_{,x}$ la dérivée de f par rapport à x avec $f_{x=x_0}$ la fonction partielle associée à f.)

Astuce
En pratique, pour calculer la dérivée partielle $\partial_x f$ (resp. $\partial_y f$), on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x (resp. y) et que l'autre variable, y (resp. x), était une constante.

EXEMPLE

Soit $f(x,y)=4-x^2-2y^2$. Le graphe de f est le paraboloïde $z=4-x^2-2y^2$. On a $\partial_x f(x,y)=-2x$ et $\partial_y f(x,y)=-4y$.
Le plan vertical $y=1$ intersecte le paraboloïde dans la parabole d'équation $z(x)=2-x^2$ (et on appelle cette courbe C_1 comme dans la figure à gauche). La pente de la droite tangente à cette parabole au point $(1,1)$ est $\partial_x f(1,1)=-2$.
De la même façon, le plan vertical $x=1$ intersecte le paraboloïde dans la parabole $z(y)=2-2y^2$ (et on appelle cette courbe C_2 comme dans la figure à droite). La pente de la droite tangente à cette parabole au point $(1,1)$ est $\partial_y f(1,1)=-4$.





EXEMPLE

1. Soit la fonction $f(x,y)=3x^2+xy-2y^2$. Alors $\mathscr{D}_f\equiv\mathbb{R}^2$, f est continue, $\partial_x f(x,y)=6x+y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x,y)=x-4y$ (car x est considérée constante).
2. Soit la fonction $f(x,y,z)=5xz\ln(1+7y)$. Alors $\mathscr{D}_f\equiv\{(x,y,z)\mid y>-1/7\}$, f est continue et $\partial_x f(x,y,z)=5z\ln(1+7y)$, $\partial_y f(x,y,z)=\frac{35xz}{1+7y}$ et $\partial_z f(x,y,z)=5x\ln(1+7y)$.
3. La résistance totale R d'un conducteur produite par trois conducteurs de résistances R_1, R_2 R_3, connectés en parallèle, est donnée par la formule
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}.$$
On a alors $\partial_{R_i}R(R_1,R_2,R_3)=R^2/R_i^2$.

Définition 1.3 (Vecteur gradient)

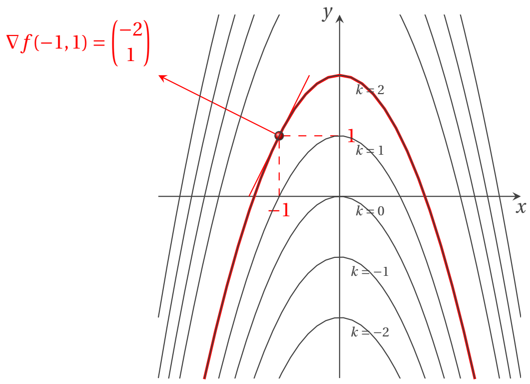
Le gradient de la fonction $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ évalué au point $\hat{\mathbf{x}}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_n)$, noté $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$ ou encore $\mathbf{grad} f(\hat{\mathbf{x}})$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières :
$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}})=\begin{pmatrix}\partial_{x_1}f(\hat{\mathbf{x}})\\ \partial_{x_2}f(\hat{\mathbf{x}})\\ \vdots\\ \partial_{x_n}f(\hat{\mathbf{x}})\end{pmatrix}$$
Il est **orthogonal** à la courbe de niveau de f passant par $\hat{\mathbf{x}}$.

Définition 1.4 (Plan tangent)

Soit $\mathscr{D}$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et soit $f\colon\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable en $\hat{\mathbf{x}}$. L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(\mathbf{x})$ en $\hat{\mathbf{x}}$ est
$$L(\mathbf{x})=f(\hat{\mathbf{x}})+(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^T\cdot\nabla f(\hat{\mathbf{x}}).$$
Pour $n=2$, en notant $\hat{\mathbf{x}}\equiv(x_0,y_0)$, l'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y)$ en (x_0,y_0) s'écrit
$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$$
ce qui équivaut, en notant $(h,k)=(x-x_0,y-y_0)$, à
$$L(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+h\partial_x f(x_0,y_0)+k\partial_y f(x_0,y_0).$$

EXEMPLE

Considérons la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y$. Le gradient de f est le vecteur $\nabla f(x,y)=(2x,1)^T$. La courbe de niveau k de la fonction f est l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x^2+y=k\right\}$, autrement dit la parabole d'équation $y=-x^2+k$. Le gradient est orthogonal à la courbe de niveau de f qui passe par le point (x,y).
Dans la figure ci-dessous on considère le point $(-1,1)$. Le vecteur gradient de f dans ce point vaut $(-2,1)^T$. Le point donné appartient à la courbe de niveau 2 qui a pour équation $y=-x^2+2$. La droite tangente à cette courbe au point $(-1,1)$ a pour équation $y=2x+3$ qui est orthogonale au gradient.



Le plan tangent à f en $\hat{\mathbf{x}} = (-1,1)$ s'écrit

$$L(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^T \cdot \nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = (-1)^2 + 1 + (x+1, y-1) \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 2 - 2(x+1) + (y-1) = -2x + y - 1.$$

Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$: il s'agit en fait d'un plan tangent pour $n = 2$ et d'un hyperplan tangent pour $n > 2$. Dans un espace de dimension n, un hyperplan est une variété linéaire de dimension $n-1$.

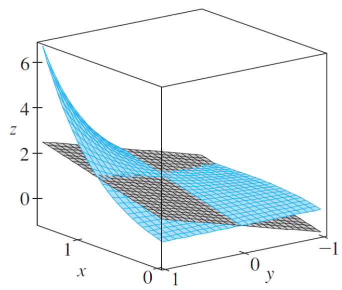
EXEMPLE
On peut calcule le plan tangent à la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{xy}$ en $(1,0)$ et utiliser sa linéarisation pour approcher $f(1.1,-0.1)$. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xe^{xy} & f(1,0) &= 1 \\ \partial_x f(x,y) &= e^{xy} + xye^{xy} & \partial_x f(1,0) &= 1 \\ \partial_y f(x,y) &= x^2 e^{xy} & \partial_y f(1,0) &= 1 \end{aligned}$$

Les trois fonctions f, $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues, donc f est différentiable. Sa linéarisation donne

$$f(x,y) \simeq f(1,0) + (x-1)\partial_x f(1,0) + (y-0)\partial_y f(1,0) = 1 + (x-1) + y = x + y,$$

autrement dit $xe^{xy} \simeq x + y$ lorsque $(x,y) \simeq (1,0)$, ainsi $f(1.1,-0.1) \simeq 1.1 - 0.1 = 1$. En effet, $f(1.1,-0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$



1.2 Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice hessienne

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (x_0, y_0). On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les définitions suivantes s'énoncent dans des ensembles ouverts pour éviter les problèmes liés au calcul de limites au bord du domaine.

Définition 1.5 (Dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de deux variables)
Soit la fonction $f\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $\mathscr{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a 2 dérivées partielles d'ordre 1 et donc 4 dérivées partielles d'ordre 2 ainsi notées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xx} f(x_0,y_0)\text{)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xy} f(x_0,y_0)\text{)}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) \qquad \text{(notée aussi } \partial_{yx} f(x_0,y_0)\text{)},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) \qquad \text{(notée aussi } \partial_{yy} f(x_0,y_0)\text{)}.$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; on aura n dérivées partielles d'ordre 1, n^2 dérivées partielles d'ordre 2, etc. donc n^k dérivées partielles d'ordre k.

Théorème 1.6 (Théorème de SCHWARZ (ou de CLAIRAUT))
Si les dérivées partielles mixtes $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$ sont continues en (x_0, y_0) alors $\partial_{xy} f(x_0,y_0) = \partial_{yx} f(x_0,y_0)$.

Définition 1.7 (Matrice hessienne)
Soit la fonction $f\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $\mathscr{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est la matrice de taille 2×2 dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x_0,y_0) & \partial_{xy} f(x_0,y_0) \\ \partial_{yx} f(x_0,y_0) & \partial_{yy} f(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le réel dét$(H_f(x_0,y_0)) \equiv \partial_{xx} f(x_0,y_0)\partial_{yy} f(x_0,y_0) - \partial_{xy} f(x_0,y_0)\partial_{yx} f(x_0,y_0)$.

Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$.

EXEMPLE
Les dérivées premières et secondes de la fonction $f(x,y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$ sont

$$\partial_x f(x,y) = -4x + 3y^2, \qquad \partial_y f(x,y) = 6xy - 3y^2,$$
$$\partial_{xx} f(x,y) = -4, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 6y, \qquad \partial_{yx} f(x,y) = 6y, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 6x - 6y.$$

La matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 6y \\ 6y & 6x - 6y \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice hessienne de f est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes, $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$, sont égales.

Comme la dérivée seconde pour les fonctions d'une seule variable, la matrice hessienne permet d'étudier la convexité des fonctions de plusieurs variables et joue, dès lors, un rôle important dans leur optimisation.

1.3 Optimisation (dans un ouvert et sans contraintes)

Un optimum ou extremum est soit un maximum soit un minimum, c'est-à-dire la valeur la plus haute ou la plus faible que prend la fonction sur son ensemble de définition ou tout sous-ensemble de son ensemble de définition.

Définition 1.8
Soit f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que

— f est bornée dans $\mathscr{D}$ s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que
$$\forall \mathbf{x} \in \mathscr{D},\ |f(\mathbf{x})| \leq M;$$

— f admet un maximum (resp. minimum) *global* (ou absolu) en $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ si
$$\forall \mathbf{x} \in \mathscr{D},\ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)\text{)};$$

— f admet un maximum (resp. minimum) *local* (ou relatif) en $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ s'il existe une boule de rayon non nul $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0, r)$ telle que
$$\forall \mathbf{x} \in \mathscr{D} \cap \mathscr{B}(\mathbf{x}_0, r),\ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)\text{)}.$$

Théorème 1.9 (de FERMAT : condition nécessaire du premier ordre)
Soit $\mathscr{D}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ un point contenu dans $\mathscr{D}$ et $f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en ce point. Si f présente un extrémum local alors
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

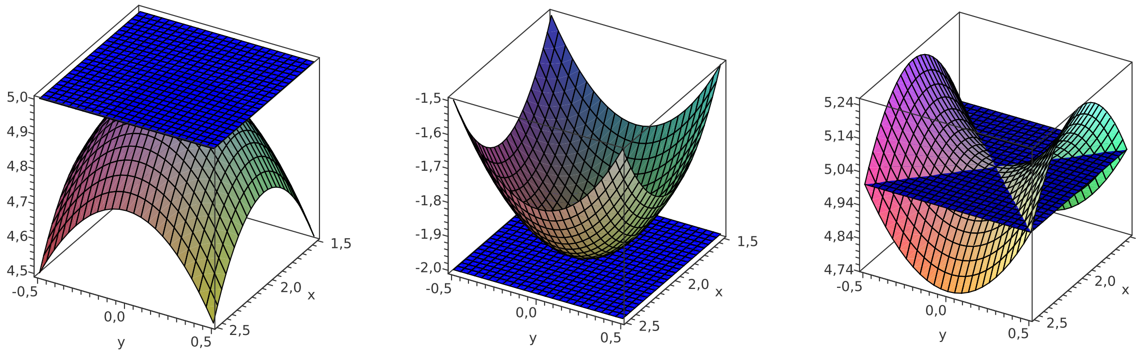
Définition 1.10 (Point stationnaire ou critique)
À l'instar des fonctions d'une variable réelle, un point $\mathbf{x}_0$ vérifiant $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ est appelé *point stationnaire* ou *point critique* de f.

Nature d'un point critique : étude directe La condition du premier ordre signifie géométriquement que le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est horizontal. Après avoir déterminé un point stationnaire $\mathbf{x}_0$, on peut alors déterminer sa nature en étudiant le signe de la différence

$$d(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0).$$

Si cette différence est de signe constant pour $\mathbf{h}$ voisin de $\mathbf{0}$, il s'agit d'un extrémum local (un *maximum* si $d < 0$, un *minimum* si $d > 0$). Sinon, il s'agit d'un *point-col* (ou *point-selle*). Mieux, si le signe est constant pour $\mathbf{h}$ quelconque, alors l'extrémum est global.

La figure à gauche illustre le cas d'un *maximum* et la figure au centre le cas d'un *minimum*. La figure à droite illustre le fait que la condition nécessaire d'optimalité n'est pas une condition suffisante ; dans ce cas on dit que f présente un *col* en (x_0, y_0) ou que (x_0, y_0) est un *point-selle* de f. Le mot col vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extremum du paysage. Le mot selle vient de l'exemple d'une selle de cheval.



Exemple

On cherche les extrema de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le disque ouvert centré en $(0,0)$ de rayon 1, représenté par $\mathscr{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Le seul candidat extremum est l'unique point critique $(0,0)$ qu'on trouve en résolvant $\partial_x f(x, y) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = 0$. La définition implique de façon immédiate que f admet un minimum global en $(0,0)$. En effet

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0) \qquad \forall (x, y) \in \mathscr{D}_f.$$

En revanche, la fonction n'admet aucun maximum.

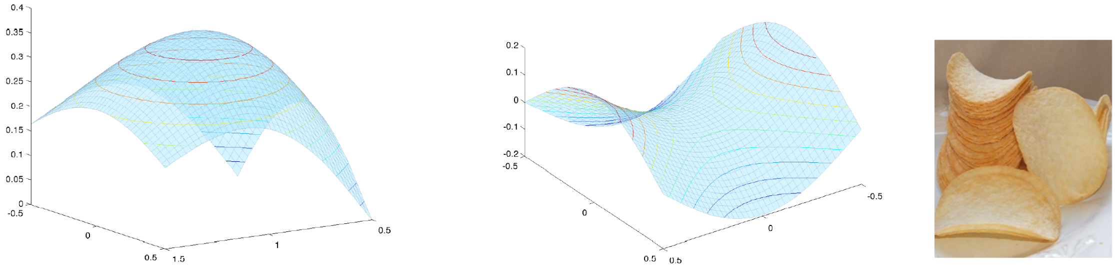
Théorème 1.11 (Condition suffisante d'extrémum local dans un ouvert (cas de 2 variables))
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire ; posons

$$\text{dét}(H_f(x_0, y_0)) \equiv \partial_{xx} f(x_0, y_0) \cdot \partial_{yy} f(x_0, y_0) - \left(\partial_{xy} f(x_0, y_0)\right)^2,$$

le déterminant de la matrice hessienne de f évalué en (x_0, y_0).

- Si $\text{dét}(H_f(x_0, y_0)) > 0$, alors f présente un extrémum relatif en (x_0, y_0) ; il s'agit
  - d'un maximum si $\partial_{xx} f(x_0, y_0) < 0$
  - d'un minimum si $\partial_{xx} f(x_0, y_0) > 0$;
- si $\text{dét}(H_f(x_0, y_0)) < 0$, alors f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0) ; ce n'est pas un extrémum ;
- si $\text{dét}(H_f(x_0, y_0)) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

En résumé, si $\partial_x f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$, la nature du point critique (x_0, y_0) est déterminée par le tableaux suivant :



(a) Point de maximum

(b) Point de selle

$\text{dét}(H_f(x_0,y_0))$	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	Nature de (x_0,y_0)
$+$	$+$	minimum local
$+$	$-$	maximum local
$-$		point-selle
0		on ne peut pas conclure

EXEMPLE

On veut étudier la fonction $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle a pour dérivées partielles $\partial_x f(x,y)=2x-2$ et $\partial_y f(x,y)=2y-4$ qui ne s'annulent qu'en $(1,2)$, seul point où il peut donc y avoir un extremum local. On étudie directement le signe de la différence

$$d(h,k)=f(1+h,2+k)-f(1,2)=h^2+k^2>0.$$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum. En effet, $\partial_{xx}f(1,2)=2>0$, $\partial_{yy}f(1,2)=2$, $\partial_{xy}f(1,2)=0$ donc $\text{dét}(H_f(1,2))=4>0$ et il s'agit bien d'un minimum.

EXEMPLE

Pour déterminer les extrema libres de la fonction $f(x,y)=x^2+y^3-2xy-y$ dans $\mathbb{R}^2$, on constate d'abord que f est un polynôme, donc différentiable dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les seuls candidats extrema locaux sont les points critiques. Toutefois, nous ne disposons d'aucune garantie à priori sur le fait que les éventuels extrema locaux soient globaux.

Recherche des points critiques On a

$$\nabla f=\mathbf{0} \quad\iff\quad \begin{pmatrix}2x-2y\\3y^2-2x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\iff\quad (x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \text{ ou } (x,y)=(1,1).$$

Les deux candidats sont donc $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ et $(1,1)$.

Classification La matrice hessienne de f en un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6y\end{pmatrix}.$$

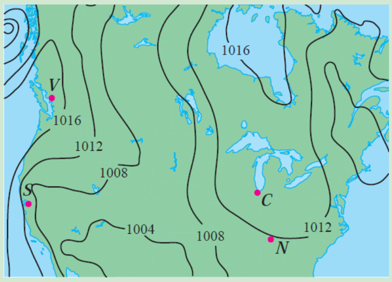
Comme $\text{dét}\left(H_f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right)<0$ et $D(1,1)>0$, alors $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ est un point-selle et f admet en $(1,1)$ un minimum local de valeur $f(1,1)=-1$. Ce minimum n'est cependant pas global puisque, par exemple, $f(0,-2)=-6<f(1,1)=-1$.

1.4 Exercices

Exercice 1.1

Dans la figure ci-contre on a tracé les isobares de l'Amérique du Nord au 12 août 2008. La pression indiquée est mesurée en millibars (mbar).

1. Donner une estimation de la pression
   - à Nashville (point N),
   - à Chicago (point C),
   - à San Francisco (point S)
   - et à Vancouver (point V).
2. Dans quelle ville le vent est le plus fort ?



Correction

1.
   - Au point N la pression est de 1012 mbar environ,
   - au point C la pression est de 1013 mbar environ,
   - au point S la pression est de 1010 mbar environ,
   - au point V la pression est comprise entre 1016 mbar et 1020 mbar ou entre 1012 mbar et 1016 mbar.
2. Le vent est plus fort à San Francisco car les lignes de pression sont le plus rapprochées.

Exercice 1.2

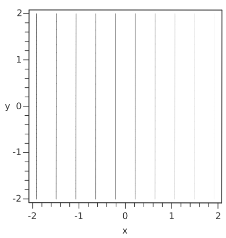
Déterminer les courbes de niveau des fonctions suivantes :

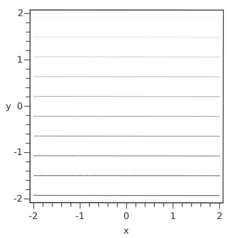
$$f(x,y)=x, \qquad f(x,y)=y+1, \qquad f(x,y)=x+y-1, \qquad f(x,y)=e^{y-x^2}, \qquad f(x,y)=y-\cos(x).$$

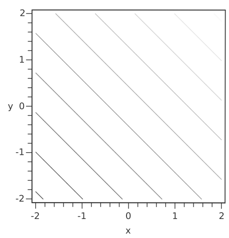
Esquissez ensuite leurs graphes (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveau qui forment une surface dans $\mathbb{R}^3$).

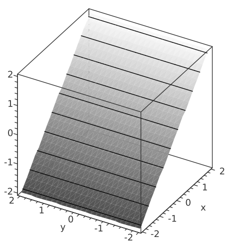
Correction

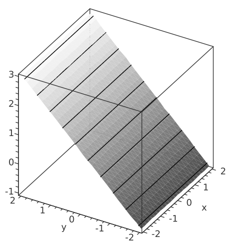
- $f(x,y)=x$:
  $f(x,y)=\kappa$ ssi $x=\kappa$, les courbes de niveau sont des droites verticales et la surface représentative de f est un plan.
- $f(x,y)=y+1$:
  $f(x,y)=\kappa$ ssi $y=\kappa-1$, les courbes de niveau sont des droites horizontales et la surface représentative de f est un plan.
- $f(x,y)=x+y-1$:
  $f(x,y)=\kappa$ ssi $y=-x+(\kappa+1)$, les courbes de niveau sont des droites de pente -1 et la surface représentative de f est un plan.

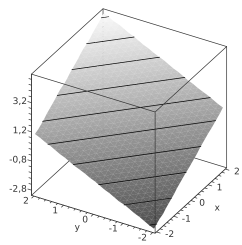




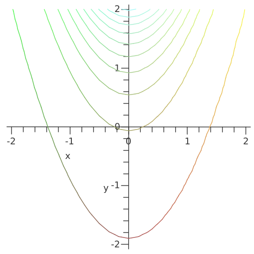


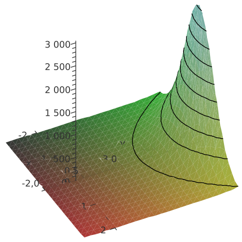




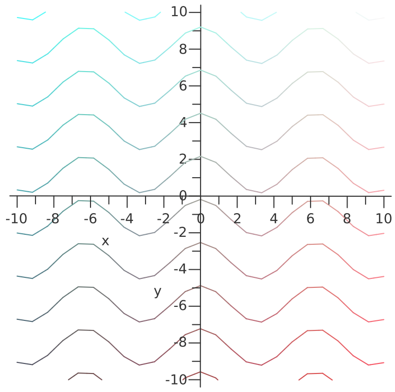


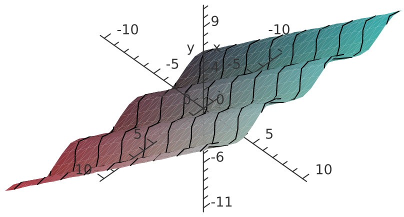
- $f(x,y)=e^{y-x^2}$:
  $f(x,y)=\kappa$ ssi $y=x^2+\ln(\kappa)$, les courbes de niveau sont des paraboles. On observe notamment la croissance exponentielle marquée lorsque les valeurs prises par y sont grandes et celles prises par $|x|$ sont petites.





— $f(x, y) = y - \cos(x)$:
$f(x, y) = \kappa$ ssi $y = \cos(x) + \kappa$

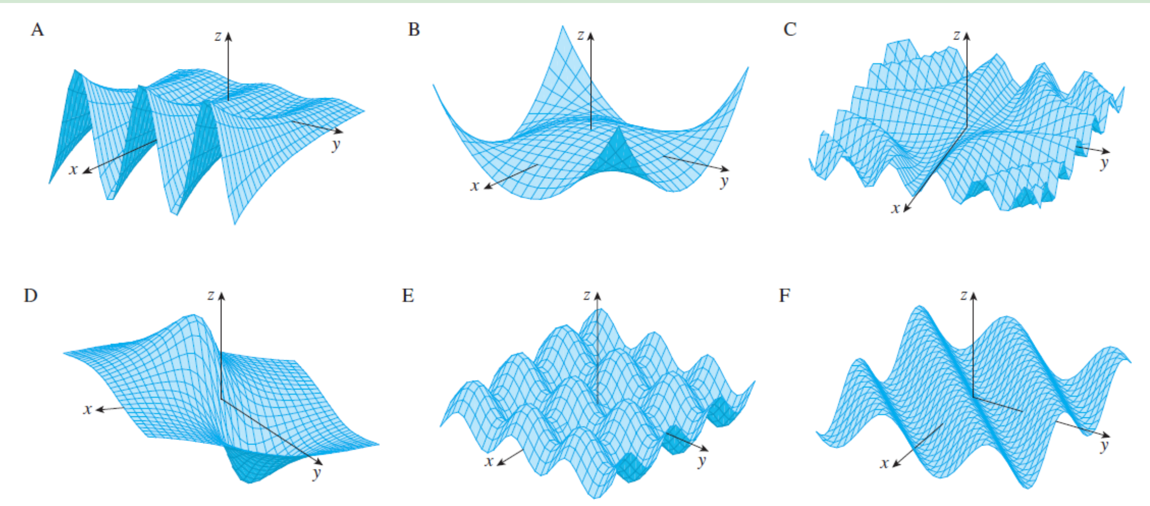


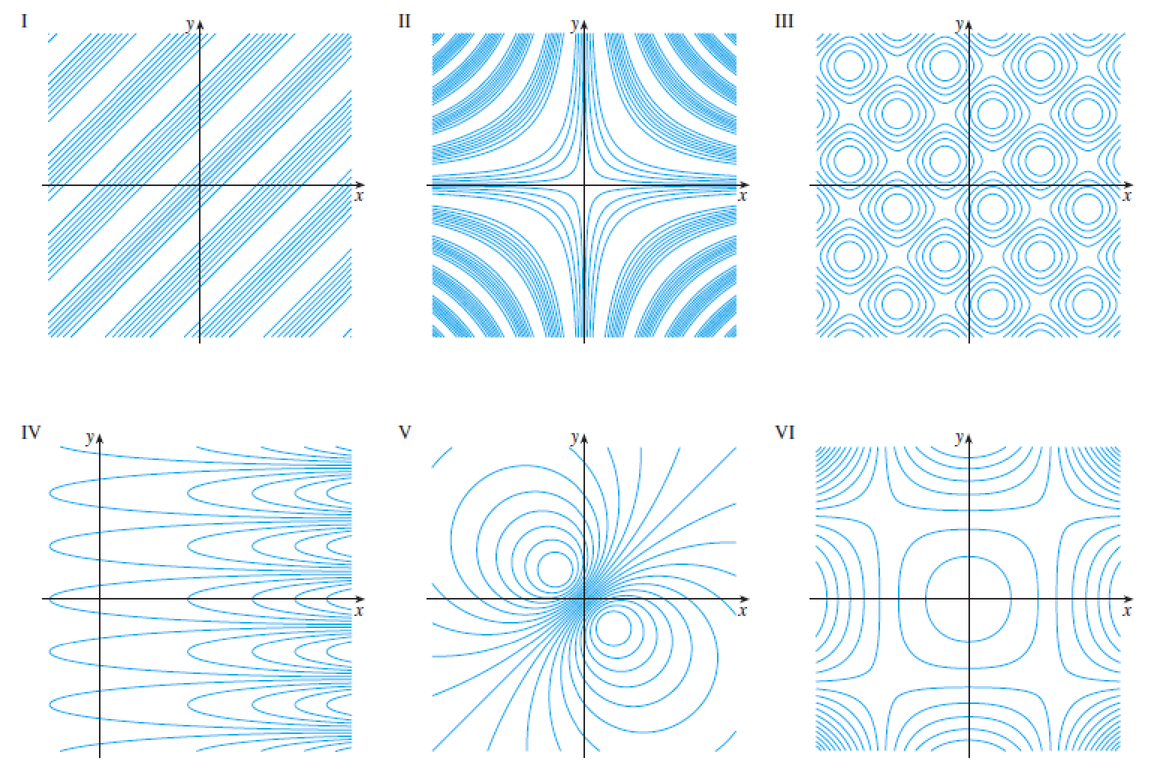


Exercice 1.3

Associer chaque fonction (1-6) à sa surface (A-F) et à ses courbes de niveau (I-VI) :

1. $f(x, y) = \sin(xy)$
2. $f(x, y) = \sin(x - y)$
3. $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$
4. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$
5. $f(x, y) = e^x \cos(y)$
6. $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$

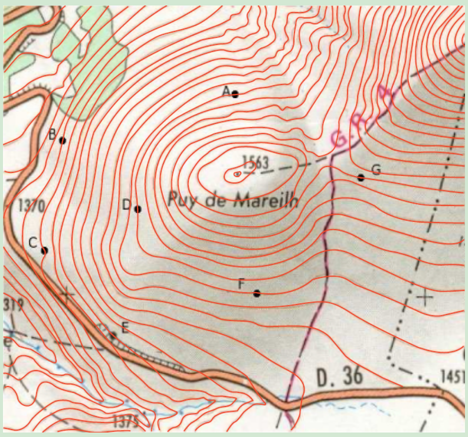




Correction

1. C-II : la fonction est périodique en x et en y ; f ne change pas quand on échange x et y, *i.e.* le graphe est symétrique par rapport au plan d'équation $y = x$; $f(0, y) = f(x, 0) = 0$.
2. F-I : la fonction est périodique en x et en y ; f est constante si $y = x + \kappa$.
3. B-VI : $f(\pm 1, y) = f(x, \pm 1) = 0$; la trace dans le plan xz est $z = 1 - x^2$ et dans le plan yz est $z = 1 - y^2$.
4. D-V : $f(x, x) = 0$; $f(x, y) > 0$ si $x > y$; $f(x, y) < 0$ si $x < y$.
5. A-IV : la fonction est périodique en y ;
6. E-III : la fonction est périodique en x et en y.

Exercice 1.4 (Cartes topographiques du relief)



Sur une *carte topographique*, les courbes de niveau désignent les points de même altitude. On observe sur l'extrait de carte ci-contre de l'institut Géographique National (IGN), des courbes qui donnent une idée du relief (Massif du Sancy). Elles représentent des coupes horizontales successives du terrain à des altitudes qui varient de 10 mètres en 10 mètres. Tous les points de même altitude sont situés sur la même courbe de niveau.

1. Compléter le tableau

Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude		1370					

2. Lorsque les courbes de niveau se resserrent, que peut-on dire du relief?

3. La rivière coule-t-elle d'est en ouest ou vice-versa ?

Correction

1. On a

Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude	1470	1370	1380	1470	1400	1460	1520

2. Les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.
3. La rivière coule de l'est à l'ouest.

Exercice 1.5

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions données :

1. $f(x,y)=y^5-3xy$
2. $f(x,y)=x^2+3xy^2-6y^5$
3. $f(x,y)=x\cos(e^{xy})$
4. $f(x,y)=\frac{x}{y}$
5. $f(x,y)=x^y$
6. $f(x,y,z)=x\cos(xz)+\ln(2-\sin^2(y+z))$
7. $f(x,t)=e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $z(x,y)=(2x+3y)^{10}$
9. $f(x,y)=\frac{ax+by}{cx+dy}$
10. $F(x,y)=\int_y^x \cos(e^t)\,\mathrm{d}t$

Correction

1. $\partial_x f(x,y)=-3y$ et $\partial_y f(x,y)=5y^4-3x$
2. $\partial_x f(x,y)=2x+3y^2$ et $\partial_y f(x,y)=6xy-30y^4$
3. $\partial_x f(x,y)=\cos(e^{xy})-xye^{xy}\sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x,y)=-x^2e^{xy}\sin(e^{xy})$
4. $\partial_x f(x,y)=1/y$ et $\partial_y f(x,y)=-x/y^2$
5. $\partial_x f(x,y)=yx^y/x$ et $\partial_y f(x,y)=\ln(x)x^y$ ⚠ $x^y=e^{y\ln(x)}$ donc $x>0$
6. $\partial_x f(x,y,z)=\cos(xz)-xz\sin(xz)$, $\partial_y f(x,y,z)=\dfrac{-2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$ et $\partial_z f(x,y,z)=-x^2\sin(xz)+\dfrac{-2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$
7. $\partial_x f(x,t)=-\pi e^{-t}\sin(\pi x)$ et $\partial_t f(x,t)=-e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $\partial_x z(x,y)=20(2x+3y)^9$ et $\partial_y z(x,y)=30(2x+3y)^9$
9. $\partial_x f(x,y)=\frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$ et $\partial_y f(x,y)=\frac{(bc-ad)x}{(cx+dy)^2}$
10. $\partial_x F(x,y)=\cos(e^x)$ et $\partial_y F(x,y)=-\cos(e^y)$

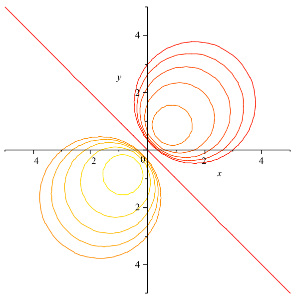
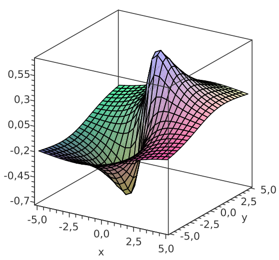
Exercice 1.6

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=\dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

1. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.
2. Calculer ses dérivées partielles premières.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0,0)$.

Correction

1. Les courbes de niveau de f sont les courbes d'équation $f(x,y)=k$, *i.e.* la droite d'équation $y=-x$ pour $k=0$ et les courbes d'équation $x^2+y^2-\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}y+1=0$ pour $0<k^2<1/2$ qui sont des cercles de centre $\left(\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}\right)$ et rayon $\sqrt{\frac{1}{2k^2}-1}$.

2. Les deux dérivées premières partielles de f sont
$$\partial_x f(x,y) = \frac{1-x^2-2xy+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{1+x^2-2xy-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}.$$
3. L'équation du plan tangent à f en $(0,0)$ est
$$z = f(0,0) + x\partial_x(0,0) + y\partial_y(0,0) = x + y.$$

Exercice 1.7

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que
$$f(a,b)=0, \qquad \partial_x f(a,b)=0, \qquad \partial_y f(a,b)=0, \qquad \partial_{xx} f(a,b)=1, \qquad \partial_{yy} f(a,b)=2, \qquad \partial_{xy} f(a,b)=3.$$
Le point (a,b) est-il un point critique ? Si oui, de quelle nature ?

Correction
Il est un point critique et plus particulièrement il s'agit d'un point-selle car $\text{dét}(H_f(a,b)) < 0$.

Exercice 1.8

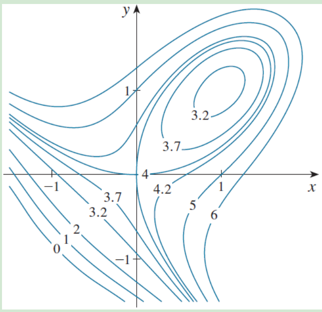
On suppose que $(1,1)$ est un point critique d'une fonction f dont les dérivées secondes sont continues. Dans chaque cas, que peut-on dire au sujet de f ?

1. $\partial_{xx} f(1,1)=4$, $\partial_{xy} f(1,1)=1$, $\partial_{yy} f(1,1)=2$;
2. $\partial_{xx} f(1,1)=4$, $\partial_{xy} f(1,1)=3$, $\partial_{yy} f(1,1)=2$.

Correction
1. D'abord on calcule $\text{dét}(H_f(1,1)) = \partial_{xx} f(1,1)\partial_{yy} f(1,1) - (\partial_{xy} f(1,1))^2 = 7$. Comme $\text{dét}(H_f(1,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) > 0$, f a un minimum local en $(1,1)$.
2. D'abord on calcule $\text{dét}(H_f(1,1)) = \partial_{xx} f(1,1)\partial_{yy} f(1,1) - (\partial_{xy} f(1,1))^2 = -1$. Comme $\text{dét}(H_f(1,1)) < 0$, f a un point-selle en $(1,1)$.

Exercice 1.9

À partir de la carte des courbes de niveau de la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et préciser pour chacun de ces points s'il s'agit d'un point-selle ou d'un maximum ou d'un minimum local.



Vérifier ensuite le raisonnement sachant que
$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

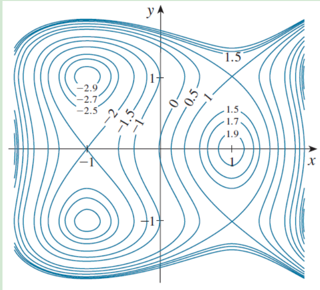
Correction
Dans la figure, le point $(1,1)$ est entouré par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f augmentent. Ainsi on pourrait s'attendre à un minimum local en ou à proximité de $(1,1)$.
Les courbes de niveau proches du point $(0,0)$ ressemblent à des hyperboles, et si nous nous éloignons de l'origine, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, donc nous nous attendons à trouver un point selle.
Vérifions cette analyse :

Points critiques : $\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 3y$, $\partial_y f(x,y) = 3y^2 - 3x$. On a un point critique si les deux dérivées partielles s'annulent en même temps ; on trouve deux points critiques : $(1,1)$ et $(0,0)$.

Études des points critiques : les dérivées secondes sont $\partial_{xx} f(x,y) = 6x$, $\partial_{xy} f(x,y) = -3$, $\partial_{yy} f(x,y) = 6y$, ainsi $\text{dét}(H_f(x,y)) = \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2 = 36xy - 9$. Comme $\text{dét}(H_f(1,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) > 0$, f a un minimum local en $(1,1)$. Comme $\text{dét}(H_f(0,0)) < 0$, f a un point-selle en $(0,0)$.

Exercice 1.10

À partir de la carte des courbes de niveau de la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et préciser pour chacun de ces points s'il s'agit d'un point-selle ou d'un maximum ou d'un minimum local.



Vérifier ensuite le raisonnement sachant que

$$f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4.$$

Correction

Dans la figure, les points $(-1,-1)$ et $(-1,1)$ sont entourés par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f augmentent. Ainsi on pourrait s'attendre à des minima locaux en ou à proximité de $(-1,\pm 1)$.
De la même manière, le point $(1,0)$ est entouré par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f diminuent. Ainsi on pourrait s'attendre à un maximum local en ou à proximité de $(1,0)$.
Les courbes de niveau proche des points $(-1,0)$, $(1,1)$ et $(1,-1)$ ressemblent à des hyperboles, et si nous nous éloignons de ces points, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, donc nous nous attendons à trouver des points de selle.
Vérifions cette analyse :

$$\nabla f = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \\ -4y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

donc les points critiques sont $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Les dérivées secondes sont $\partial_{xx} f(x,y) = -6x$, $\partial_{xy} f(x,y) = 0$, $\partial_{yy} f(x,y) = 12y^2 - 4$, ainsi $\text{dét}(H_f(x,y)) = \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2 = -72xy^2 + 24x$.

Point critique (x_0, y_0)	$\text{dét}(H_f(x_0,y_0))$	$\partial_{xx} f(x_0,y_0)$	Conclusion
$(1,0)$	$24 > 0$	$-6 < 0$	f a un maximum local en $(1,0)$
$(1,1)$	$-48 < 0$		f a un point-selle en $(1,1)$
$(1,-1)$	$-48 < 0$	$-6 < 0$	f a un point-selle en $(1,-1)$
$(-1,0)$	$-24 < 0$		f a un point-selle en $(-1,0)$
$(-1,1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1,1)$
$(-1,-1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1,-1)$

Exercice 1.11

Une montagne a la forme de la surface $z(x,y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x + 6y + 4$ (l'unité de mesure est de 100 mètres). Si le niveau de la mer correspond à $z = 0$, quelle est la hauteur de la montagne ?

Correction

Il s'agit d'évaluer $z(x,y)$ dans le point de maximum. Cherchons d'abord les points critiques :

$$\nabla z(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - 4x - 8 \\ 2x - 2y + 6 \end{pmatrix}$$

et $\nabla z(x,y) = \mathbf{0}$ ssi $(x,y) = (-1,2)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\partial_{xx} f(x,y) = -4 < 0, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = -2, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 2,$$

et $\partial_{xx} f(-1,2)\partial_{yy} f(-1,2) - (\partial_{xy} f(-1,2))^2 = 4 > 0$ donc $(-1,2)$ est un maximum. Comme $z(-1,2) = 14$, la montagne est haute 1400 mètre.

Exercice 1.12

Si f est une fonction continue d'une seule variable réelle et si f admet deux maxima sur un intervalle alors il existe un minimum compris entre les deux maxima. Le but de cet exercice est de montrer que ce résultat ne s'étend pas en deux dimensions.

Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 4y^2e^x - 2y^4 - e^{4x}$. Montrer que cette fonctions admet deux maxima mais aucun autre point critique.

Correction

— f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4y^2e^x - 4e^{4x} = 0\\ 8ye^x - 8y^3 = 0\end{cases} \iff \begin{cases} 4e^x(y^2 - e^{3x}) = 0\\ 8y(e^x - y^2) = 0\end{cases} \begin{matrix}\nearrow\\ \searrow\end{matrix} \begin{matrix}\begin{cases} y = 0\\ -4e^{4x} = 0\end{cases}\\ \begin{cases} e^x = y^2\\ y^2 = e^{3x} = y^6\end{cases} \iff (x,y) = (0,\pm 1).\end{matrix}$$

On a deux points critiques : $(0,1)$ et $(0,-1)$.

— Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2e^x - 16e^{4x} & 8ye^x\\ 8ye^x & 8e^x - 24y^2\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 32e^x\left((e^x - 3y^2)(y^2 - 4e^{3x}) - 2y^2e^x\right).$$

$\det\left(H_f(0,\pm1)\right) = 128 > 0$ et $\partial_{xx}f(0,\pm1,) = -12 < 0$ donc les points $(0,\pm1)$ sont des maxima.

Exercice 1.13

Déterminer et établir la nature des points critiques des fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$
2. $f(x,y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$
4. $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3$
6. $f(x,y) = xy(1-x-y)$
7. $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$
8. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
9. $f(x,y) = e^x\cos(y)$
10. $f(x,y) = y\cos(x)$
11. $f(x,y) = y^2 + xy\ln(x)$
12. $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$
13. $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} - x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$
14. $f(x,y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2$
15. $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}$
16. $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2-y^2)}$
17. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
18. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$
19. $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$
20. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$
21. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
22. $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$
23. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
24. $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$
25. $f(x,y) = x^2 - \cos(y)$
26. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
27. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6(x^2 - y^2)$
28. $f(x,y) = (x^2 + y^2 - y^3)e^{-y}$

Correction

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$

   — f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

   — Recherche de points critiques :

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = 0\\ x + 2y + 1 = 0\end{cases} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

   On a un unique point critique : $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

   — Nature du point critique :

   $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 3.$$

   $\text{dét}\left(H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) > 0$ et $\partial_{xx}f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) > 0$ donc $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ est un minimum.

2. $f(x,y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

   — f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y-2-2x=0 \\ x-2-2y=0 \end{cases} \iff (x,y)=(-2,-2).$$

On a un unique point critique : $(-2,-2)$.

— Nature du point critique :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 3.$$

$\text{dét}(H_f(-2,-2)) > 0$ et $\partial_{xx} f(-2,-2) < 0$ donc $(-2,-2)$ est un maximum.

3. $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$
   — f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   — Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1-2xy+y^2=0 \\ -1-x^2+2xy=0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(-1,-1),(1,1)\}.$$

On a deux points critiques : $(-1,-1)$ et $(1,1)$.

— Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}-2y & -2x+2y\\ -2x+2y & 2x\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = -4xy-4(y-x)^2.$$

$\text{dét}(H_f(-1,-1)) < 0$ donc $(-1,-1)$ est un point-selle ;
$\text{dét}(H_f(1,1)) < 0$ donc $(1,1)$ est un point-selle.

4. $f(x,y) = y^3+3x^2y-6x^2-6y^2+2$
   — f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   — Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6xy-12x=0 \\ 3y^2+3x^2-12y=0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(0,4),(2,2),(-2,2)\}.$$

On a quatre points critiques : $(0,0)$, $(0,4)$, $(2,2)$ et $(-2,2)$.

— Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}6y-12 & 6x\\ 6x & 6y-12\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = (6y-12)^2-36x^2 = 36\Big((y-2)^2-x^2\Big).$$

$\text{dét}(H_f(0,0)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) < 0$ donc $(0,0)$ est un maximum ;
$\text{dét}(H_f(0,4)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,4) > 0$ donc $(0,4)$ est un minimum ;
$\text{dét}(H_f(2,2)) < 0$ donc $(2,2)$ est un point-selle ;
$\text{dét}(H_f(-2,2)) < 0$ donc $(-2,2)$ est un point-selle.

5. $f(x,y) = x^3+y^3-3xy+3$.
   — f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   — Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3(x^2-y)=0 \\ 3(y^2-x)=0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

— Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 36xy-9.$$

$\text{dét}(H_f(0,0)) = -9 < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
$\text{dét}(H_f(1,1)) = 27 > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) = 6 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum.

6. $f(x,y) = xy(1-x-y)$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y-2xy-y^2=0\\ x-x^2-2xy=0\end{cases} \iff (x,y) \in \left\{(0,0),(1,0),(0,1),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

   On a quatre points critiques : $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
   - Nature des points critiques :

   $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}-2y & 1-2x-2y\\ 1-2x-2y & -2x\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 4xy-(1-2x-2y)^2$$

   $\text{dét}(H_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}(H_f(1,0)) < 0$ donc $(1,0)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}(H_f(0,1)) < 0$ donc $(0,1)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}\left(H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right) > 0$ et $\partial_{xx} f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) < 0$ donc $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) < 0$ est un maximum.
7. $f(x,y) = x^3-12xy+8y^3$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x^2-12y=0\\ -12x+24y^2=0\end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(2,1)\}.$$

   On a deux points critiques : $(0,0)$, et $(2,1)$.
   - Nature des points critiques :

   $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}6x & -12\\ -12 & 48y\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 144(2xy-1)$$

   $\text{dét}(H_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}(H_f(2,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(2,1) > 0$ donc $(2,1)$ est un minimum.
8. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\kappa) \mid \kappa \in \mathbb{R}\} \setminus \{(\kappa,0) \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$.
   - Recherche de points critiques :

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y-\frac{1}{x^2}=0\\ x-\frac{1}{y^2}=0\end{cases} \iff (x,y) = (1,1).$$

   On a un unique point critique : $(1,1)$.
   - Nature du point critique :

   $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{2}{x^3} & 1\\ 1 & \frac{2}{y^3}\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = \frac{4}{(xy)^3}-1$$

   $\text{dét}(H_f(1,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) > 0$ donc $(1,1)$ est un minimum.
9. $f(x,y) = e^x\cos(y)$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} e^x\cos(y)=0\\ -e^x\sin(y)=0\end{cases} \iff \nexists(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Cette fonction n'admet aucun point critique.
10. $f(x,y) = y\cos(x)$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-y\sin(x)=0\\ \cos(x)=0\end{cases} \iff (x,y)=\left(\frac{\pi}{2}+\kappa\pi,0\right),\quad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

On a une infinité de points critiques alignés sur la droite d'équation $y=0$ et qui ont ordonnée $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ avec $\kappa\in\mathbb{Z}$.

— Nature des points critiques :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}-y\cos(x) & -\sin(x)\\ -\sin(x) & 0\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=-\sin^2(x)$$

dét$\left(H_f\left(\frac{\pi}{2}+\kappa\pi,0\right)\right)<0$ donc ils sont tous des points-selle.

11. $f(x,y)=y^2+xy\ln(x)$
 - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\right\}$.
 - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}y(\ln(x)+1)=0\\ 2y+x\ln(x)=0\end{cases} \iff (x,y)\in\left\{(1,0);\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)\right\}$$

 On a deux points critiques : $(1,0)$ et $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)$.
 - Nature des points critiques :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{y}{x} & 1+\ln(x)\\ 1+\ln(x) & 2\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=2\frac{y}{x}-(1+\ln(x))^2$$

 dét$(H_f(1,0))<0$ donc $(1,0)$ est un point-selle ;
 dét$\left(H_f\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)\right)>0$ et $\partial_{xx}f\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)>0$ donc $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)$ est un minimum.

12. $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+x^2+\frac{y^3}{3}-4y$
 - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
 - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}xy+2x=0\\ \frac{x^2}{2}+y^2-4=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,-2),(0,2)\}.$$

 On a deux points critiques : $(0,-2)$ et $(0,2)$.
 - Nature des points critiques :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}y+2 & x\\ x & 2y\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=2y(y+2)-x$$

 dét$(H_f(0,2))>0$ et $\partial_{xx}f(0,2)=4>0$ donc $(0,2)$ est un minimum pour f ;
 comme dét$(H_f(0,-2))=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

13. $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}-x^2+\frac{y^3}{3}-4y$
 - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
 - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}xy-2x=0\\ \frac{x^2}{2}+y^2-4=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,-2),(0,2)\}.$$

 On a deux points critiques : $(0,-2)$ et $(0,2)$.
 - Nature des points critiques :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}y-2 & x\\ x & 2y\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=2y(y-2)-x$$

dét$(H_f(0,-2))>0$ et $\partial_{xx}f(0,-2)<0$ donc $(0,-2)$ est un maximum pour f ;
comme dét$(H_f(0,2))=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

14. $f(x,y)=\frac{xy^2}{2}+\frac{x^3}{3}-4x+y^2$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\frac{y^2}{2}+x^2-4=0\\ xy+2y=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(-2,0),(2,0)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,-2)$ et $(0,2)$.
    - Nature des points critiques :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2x & y\\ y & x+2\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=2x(x+2)-y$$

dét$(H_f(2,0))>0$ et $\partial_{xx}f(2,0)=4>0$ donc $(2,0)$ est un minimum pour f ;
comme dét$(H_f(-2,0))=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

15. $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{(-x^2-y^2)}$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x(1-x^2+y^2)e^{(-x^2-y^2)}=0\\ 2y(-1-x^2+y^2)e^{(-x^2-y^2)}=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}.$$

On a 5 points critiques : $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.
    - Nature des points critiques :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y)&=2e^{(-x^2-y^2)}(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2),\\ \partial_{xy}f(x,y)&=4xy(x^2-y^2)e^{(-x^2-y^2)},\\ \partial_{yy}f(x,y)&=2e^{(-x^2-y^2)}(-1-x^2+5y^2+2x^2y^2-2y^4).\end{aligned}$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{xy}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2$$

On a alors

(x_0,y_0)	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0,y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0,y_0)$	dét$(H_f(x_0,y_0))$	
$(0,0)$	2	0	-2	-4	c'est un point-selle
$(1,0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(-1,0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(0,1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(0,-1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum

16. $f(x,y)=(y^2-x^2)e^{(-x^2-y^2)}$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x(-1+x^2-y^2)e^{(-x^2-y^2)}=0\\ 2y(1+x^2-y^2)e^{(-x^2-y^2)}=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}.$$

On a 5 points critiques : $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

— Nature des points critiques :

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2),\\
\partial_{xy} f(x,y) &= -4xy(x^2-y^2)e^{(x^2-y^2)},\\
\partial_{yy} f(x,y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(-1-x^2+5y^2+2x^2y^2-2y^4).
\end{aligned}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}\partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y)\\ \partial_{xy} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y)\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2$$

On a alors

(x_0,y_0)	$\partial_{xx} f(x_0,y_0)$	$\partial_{xy} f(x_0,y_0)$	$\partial_{yy} f(x_0,y_0)$	$\text{dét}(H_f(x_0,y_0))$	
$(0,0)$	-2	0	2	-4	c'est un point-selle
$(1,0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(-1,0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(0,1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(0,-1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum

17. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme la restriction $f(x,0) = x^4 - 2x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x,y) = 0$.
    - Recherche de points critiques :

    $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4(x^3-x+y)=0\\ 4(y^3+x-y)=0\end{cases} \iff (x,y) \in \left\{(0,0), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})\right\}.$$

    On a 3 points critiques :[1] $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ (on note que $f(x,y) = f(-x,-y)$).
    - Nature des points critiques :

    $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}12x^2-4 & 4\\ 4 & 12y^2-4\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 16\Big((3x^2-1)(3y^2-1)-1\Big).$$

    $\text{dét}(H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2})) = 384 > 0$ et $\partial_{xx} f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 20 > 0$ donc $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum pour f ;
    $\text{dét}(H_f(-\sqrt{2},\sqrt{2})) = 384 > 0$ et $\partial_{xx} f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 20 > 0$ donc $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ est un minimum pour f ;
    comme $\text{dét}(H_f(0,0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne.
    Pour connaître la nature du point $(0,0)$ on étudie le signe de $d(h,k) = f(h,k) - f(0,0)$ pour h et k voisins de 0 :

    $$d(h,k) = h^4 + k^4 - 2(h-k)^2;$$

    comme $d(h,0) = (h^2-2)h^2 < 0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h,h) = 2h^4 > 0$, alors $(0,0)$ est un point-selle.
    Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

    $$f(x,y) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 - 8 \geq 8 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

    Comme $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -8$, les points $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont des minima globaux.
18. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme la restriction $f(x,0) = x^4 - 4x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x,y) = 0$.
    - Recherche de points critiques :

    $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4(x^3-2x+2y)=0\\ 4(y^3+2x-2y)=0\end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0), (2,-2), (-2,2)\}.$$

1. $\begin{cases} 4x^3-4x+4y=0\\ 4y^3+4x-4y=0\end{cases} \implies \begin{cases} x^3+y^3=0\\ y^3+x-y=0\end{cases} \implies \begin{cases} x=-y\\ (y^2-2)y=0\end{cases}$

On a 3 points critiques :[2] $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$ (on note que $f(x,y)=f(-x,-y)$).

— Nature des points critiques :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-8 & 8\\ 8 & 12y^2-8\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=48\Big(3x^2y^2-2(x^2+y^2)\Big).$$

— $\text{dét}(H_f(2,-2))=1536>0$ et $\partial_{xx}f(2,-2)=40>0$ donc $(2,-2)$ est un minimum local pour f ;

— $\text{dét}(H_f(-2,2))=1536>0$ et $\partial_{xx}f(-2,2)=40>0$ donc $(-2,2)$ est un minimum local pour f ;

— comme $\text{dét}(H_f(0,0))=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne. Pour connaître la nature du point $(0,0)$ on étudie le signe de $d(h,k)=f(h,k)-f(0,0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h,k)=h^4+k^4-4(h-k)^2;$$

comme $d(h,0)=(h^2-4)h^2<0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h,h)=2h^4>0$, alors $(0,0)$ est un point-selle.

Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x,y)=(x^2-4)^2+(y^2-4)^2+4(x+y)^2-32\geq -32\qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Comme $f(2,-2)=f(-2,2)=-32$, les points $(2,-2)$ et $(-2,2)$ sont des minima globaux.

19. $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+xyz-z+y$

— f est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}$; comme la restriction $f(0,0,z)=-z$ tend vers $\pm\infty$ pour z qui tend vers $\mp\infty$, il n'y a pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x,y,z)=0$.

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+yz=0\\ xz+1=0\\ xy-1=0\end{cases}\iff (x,y,z)=(1,1,-1).$$

Il n'y a qu'un point critique : $(1,1,-1)$.

— Nature du point critique : on étudie le signe de $\Delta f(h,k,l)\equiv f(1+h,1+k,-1+l)$ pour h, k et l voisins de 0 (les termes de degré 1 en h, k et l doivent disparaître) :

$$\Delta f(h,k,l)=\frac{h^2+1+2h}{2}+(1+h)(1+k)(-1+l)-(-1+l)+(1+k)-\frac{3}{2}=\frac{h^2}{2}+hkl+hl-hk+kl.$$

Il ne reste que transformer Δf si on pense qu'il s'agit d'un extrémum ou fournir des restrictions qui se contredisent si on pense que ce n'est pas un extrémum. Comme les deux restrictions à deux courbes continues passant par l'origine $\Delta f(h,0,h)=\frac{3}{2}h^2>0$ et $\Delta f(h,h,0)=-\frac{1}{2}h^2<0$ donnent des signes différents, on conclut que ce n'est pas un extrémum.

20. $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$

— f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x-2=0\\ 4y=0\end{cases}\iff (x,y)=(1,0).$$

On a un seul point critique : $(1,0)$.

— Nature du point critique :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=8.$$

$\text{dét}(H_f(1,0))=8>0$ et $\partial_{xx}f(1,0)=2>0$ donc $(1,0)$ est un minimum pour f.

21. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$

— f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

2. $\begin{cases}4x^3-8x+8y=0\\ 4y^3+8x-8y=0\end{cases}\implies\begin{cases}x^3-2(x-y)=0\\ y^3+2(x-y)=0\end{cases}\implies\begin{cases}x^3+y^3=0\\ y^3+2x-2y=0\end{cases}\implies\begin{cases}x=-y\\ (y^2-4)y=0\end{cases}\implies\begin{cases}x=-y\\ y=0 \text{ ou } y=2 \text{ ou } y=-2\end{cases}$

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x+y-2=0\\ x+2y-1=0\end{cases} \iff (x,y)=(1,0).$$

On a un seul point critique : $(1,0)$.

— Nature du point critique :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y))=7.$$

$\text{dét}(H_f(1,0))=8>0$ et $\partial_{xx}f(1,0)=2>0$ donc $(1,0)$ est un minimum pour f.

22. $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$

— f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}3x^2y^2(6-x-y)-x^3y^2=0\\ 2x^3y(6-x-y)-x^3y^2=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(3,2),(t,0),(0,t)\mid t\in\mathbb{R}\}.$$

On a une infinité de points critiques : les points $(t,0)$ et $(0,t)$ pour $t\in_R$ sont des points critiques ainsi que le point $(3,2)$.

— Nature des points critiques :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y)&=6xy^2(6-x-y)-6x^2y^2,\\ \partial_{xy}f(x,y)&=6x^2y(6-x-y)-3x^2y^2-2x^3y,\\ \partial_{yy}f(x,y)&=2x^3(6-x-y)-4x^3y.\end{aligned}$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y)&\partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{xy}f(x,y)&\partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y))=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2$$

$\text{dét}(H_f(3,2))>0$ et $\partial_{xx}f(3,2)<0$ donc $(3,2)$ est un maximum pour f.

$\text{dét}(H_f(t,0))=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur l'axe d'équation $y=0$. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h,k)=f(t+h,0+k)-f(t,0)=(t+h)^3k^2(6-t-h-k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(t,0)$ pour $t<0$ ou $t>6$ sont des maxima, les points $(t,0)$ pour $0<t<6$ sont des minima et les points $(0,0)$ et $(6,0)$ sont des points-selle.

$\text{dét}(H_f(0,t))=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur les axes. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h,k)=f(0+h,t+k)-f(0,t)=h^3(t+k)^2(6-t-h-k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(0,t)$ sont des points-selle pour tout $t\in\mathbb{R}$.

23. $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$

— f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

— Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}(x^2-2y^2+2x)e^{x-y}=0\\ (-x^2+2y^2-4y)e^{x-y}=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,0),(-4,-2)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,0)$ et $(-4,-2)$.

— Nature des points critiques :

$$\partial_{xx}f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2), \qquad \partial_{xy}f(x,y)=e^{x-y}(-x^2+2y^2-2x-4y), \qquad \partial_{yy}f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4);$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y)&\partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{xy}f(x,y)&\partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y))=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2.$$

On en déduit que

(x_0,y_0)	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0,y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0,y_0)$	$\text{dét}(H_f(x_0,y_0))$	
$(-4,-2)$	$-6e^{-2}$	$8e^{-2}$	$-12e^{-2}$	$8e^{-4}$	maximum
$(0,0)$	2	0	-4	-8	point-selle

24. $f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\mid xy=0\}$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{8}{x^2}=0\\1-\frac{x}{y^2}=0\end{cases}\iff(x,y)=(4,2).$$

    On a un unique point critique : $(4,2)$.
    - Nature du point critique :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{16}{x^3}&-\frac{1}{y^2}\\-\frac{1}{y^2}&\frac{2x}{y^3}\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=\frac{1}{y^3}\left(\frac{16}{x^2}-\frac{1}{y}\right).$$

    $\text{dét}(H_f(4,2))>0$ et $\partial_{xx}f(4,2)>0$ donc $(4,2)$ est un minimum pour f.

25. $f(x,y)=x^2-\cos(y)$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x=0\\\sin(y)=0\end{cases}\iff\iff(x,y)\in\{(0,\kappa\pi)\mid\kappa\in\mathbb{Z}\}.$$

    On a une infinité de points critiques qui s'écrivent $(0,\kappa\pi)$ avec $\kappa\in\mathbb{Z}$.
    - Nature du point critique :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&\cos(y)\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=2\cos(y).$$

    $\text{dét}(H_f(0,\kappa\pi))=(-1)^\kappa$ et $\partial_{xx}f(0,\kappa\pi)>0$ pour tout$\kappa\in\mathbb{Z}$ donc $(0,\kappa\pi)$ est un minimum si κ est pair et un point-selle si κ est impair.

26. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
    On peut remarquer que si on passe aux coordonnées polaire on obtient $w(r)\equiv f(r\cos(\vartheta),r\sin(\vartheta))=r^2e^{-r^2}$, autrement-dit on obtient une fonction de la seule variable $r>0$ et on a $w'(r)=2r(1-r^2)e^{-r^2}$ qui s'annule pour $r=1$ et dont l'étude des variations montre qu'il s'agit d'un minimum. Il faut étudier séparément le cas $(x=0,y=0)$ car il n'est pas pris en compte lorsqu'on passe aux coordonnées polaire. Si on n'a pas remarqué cette symétrie, on étudie la fonction comme dans les cas précédents :
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}=0\\2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}=0\end{cases}$$

    On a une infinité de points critiques : le point $(0,0)$ et les points (x,y) qui appartiennent au cercle $x^2+y^2=1$.
    - Nature du point critique : comme $f(x,y)\geq 0$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)=0$ ssi $(x,y)\neq(0,0)$ ou (x,y) est tel que $x^2+y^2-1=0$, on en déduit qu'ils sont des minima (le calcul des dérivées secondes porte à des calculs très longues et inutiles dans ce cas).

27. $f(x,y)=x^3+y^2-6(x^2-y^2)$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}3x(x-4)=0\\3y(y+4)=0\end{cases}\iff(x,y)\in\{(0,0),(0,-4),(4,0),(4,-4)\}.$$

    On a quatre points critiques : $(0,0)$, $(0,-4)$, $(4,0)$ et $(4,-4)$.
    - Nature des points critiques :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}6(x-2)&0\\0&6(y+2)\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(H_f(x,y))=36(x-2)(y+2).$$

dét$(H_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle;
dét$(H_f(0,-4)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,-4) < 0$ donc $(0,-4)$ est un maximum;
dét$(H_f(4,0)) > 0$ et $\partial_{xx} f(4,0) > 0$ donc $(4,0)$ est un minimum;
dét$(H_f(4,-4)) < 0$ $(4,-4)$ est un point-selle.

28. $f(x,y) = (x^2+y^2-y^3)e^{-y}$
   — f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   — Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2xe^{-y} = 0 \\ (-x^2+2y-4y^2+y^3)e^{-y} = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{(0,0),(0,2-\sqrt{2}),(0,2+\sqrt{2})\right\}.$$

   On a quatre trois critiques : $(0,0)$, $(0,2-\sqrt{2})$ et $(0,2+\sqrt{2})$.
   — Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (2+x^2-10y+7y^2-y^3)e^{-y} \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = \left(4-2x^2-20y+14y^2-2y^3\right)e^{-2y}.$$

   dét$(H_f(0,0)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) > 0$ donc $(0,0)$ est un minimum;
   dét$(H_f(0,2-\sqrt{2})) < 0$ donc $(0,2-\sqrt{2})$ est un point-selle;
   dét$(H_f(0,2+\sqrt{2})) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,2+\sqrt{2}) > 0$ donc $(0,2+\sqrt{2})$ est un minimum.

Exercice 1.14

La société d'Adèle produit deux types d'ampoules : E17 et E24. Indiquons par x le nombre de milliers d'ampoules de type E17 produites et supposons que la demande pour ce type de lampes est donnée par $p_1 = 50 - x$, où p_1 est le prix de vente en euros. De même, indiquons par y le nombre de milliers d'ampoules de type E24 produites et supposons que la demande pour ce type est donnée par $p_2 = 60 - 2y$, où p_2 est aussi le prix de vente en euros. Les coûts communs de production de ces ampoules est $C = 2xy$ (en milliers d'euros). Par conséquent, le bénéfice de la société d'Adèle (en milliers d'euros) est une fonction de deux variables x et y. Déterminer le profit maximal d'Adèle.

Correction

La fonction profit en milliers d'euros est $p(x,y) = p_1x + p_2y - C(x,y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy$. Pour maximiser le profit, on cherche d'abord les points stationnaires :

$$\nabla p = \mathbf{0} \quad\iff\quad \begin{pmatrix}50-2x-2y\\60-4y-2x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\iff\quad \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Pour établir la nature de ces points, on étudie la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} &\partial_{xx} p(x,y) = -2, && \partial_{xx} p(20,5) = -2 < 0, \\ &\partial_{xy} p(x,y) = -2, && \partial_{xy} p(20,5) = -2, \\ &\partial_{yy} p(x,y) = -4, && \partial_{yy} p(20,5) = -4, \end{aligned}$$

et dét$(H_f(20,5)) = (-2)(-4) - (-2)^2 = 4 > 0$ donc $(20,5)$ est un point de maximum pour p et le profit maximal vaut $p(20,5) = 650$. La société d'Adèle réalise le profit maximal de 650000 euros lorsqu'elle vend 20000 ampoules E17 à 30 euros l'une et 5000 ampoules E24 à 50 euros l'une.

Exercice 1.15

Vous êtes le directeur financier de la firme SANBON & FILS. Cette entreprise a investi 3000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 mL. L'expert consulté par M. SANBON père a établi que si la firme consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $300 + 6\sqrt{x} - 10y$ pièces. La firme SANBON & FILS fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

Correction

— Revenu de la vente : $y(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$

— Coût de production : $3(300+6\sqrt{x}-10y)$
— Coût de développement et de publicité : $3000+x$
— Profit = (Revenu de la vente) - (Coût de production) - (Coût de développement et de publicité)

Le profit de la firme à maximiser est donc la fonction

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x,y)=(y-3)(300+6\sqrt{x}-10y)-x-3000 \end{aligned}$$

La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y)=\frac{3(y-3)}{\sqrt{x}}-1=0 \\ \partial_y f(x,y)=330+6\sqrt{x}-20y=0 \end{cases} \implies \quad (x_0,y_0)=(164025,138).$$

La hessienne en ce point est définie négative :

$$\begin{cases} \partial_{xx} f(x,y)=-\frac{3(y-3)}{2\sqrt{x^3}} \\ \partial_{xy} f(x,y)=\frac{3}{\sqrt{x}} \\ \partial_{yy} f(x,y)=\frac{30(y-3)}{\sqrt{x^3}}-\frac{3}{\sqrt{x}} \end{cases} \implies \quad \text{dét}(H_f(x_0,y_0))=-\frac{241}{32805}.$$

Comme $\partial_{xx} f(x_0,y_0)=-20$, on a bien un maximum. La firme SANBON & FILS va donc consacrer 164025 euros à la promotion de son nouveau parfum et vendre le flacon de 100 mL à 138 euros. Elle réalisera de la sorte le profit maximal de $f(164025,138)=15225$ euros.

Exercice 1.16 (Une fabrication optimale)

Votre société s'occupe de la fabrication d'une pièce mécanique. Celle-ci dépend de deux paramètres réels x et y (à priori non-contraints) de la façon suivante : le coût unitaire de fabrication d'une pièce est égal à

$$c(x,y)=x^2+2y^2$$

tandis que le taux de pièces défectueuses (compris entre 0 et 1) est égal à

$$t(x,y)=\frac{1}{1+(xy)^2}.$$

On cherche à maximiser la rentabilité totale du processus de fabrication. On prendra pour fonction objectif le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse, qui est égal au coût de fabrication d'une pièce divisé par le taux de pièces non-défectueuses, et on tentera de le simplifier autant que possible.

Correction

La fonction à minimiser s'écrit $f(x,y)=\frac{c(x,y)}{1-t(x,y)}=\frac{x^2+2y^2}{1-\frac{1}{1+(xy)^2}}=\frac{(x^2+2y^2)(1+x^2y^2)}{x^2y^2}=\frac{1}{y^2}+x^2+\frac{2}{x^2}+2y^2$. La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y)=2\frac{x^4-2}{x^3}=0 \\ \partial_y f(x,y)=2\frac{2y^4-1}{y^3}=0 \end{cases} \implies \quad (x_0,y_0)=(\sqrt[4]{2},1/\sqrt[4]{2}).$$

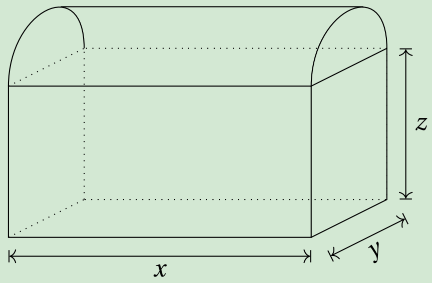
La hessienne en ce point est définie positive :

$$\begin{cases} \partial_{xx} f(x,y)=2\frac{x^4+6}{x^4} \\ \partial_{xy} f(x,y)=0 \\ \partial_{yy} f(x,y)=2\frac{2y^4+3}{y^4} \end{cases} \implies \quad \text{dét}(H_f(x_0,y_0))=4\frac{2+6}{2}\frac{1+3}{1/2}>0.$$

Comme $\partial_{xx} f(x_0,y_0)>0$, on a bien un minimum. En choisissant $(x,y)=(\sqrt[4]{2},1/\sqrt[4]{2})$, le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse est minimale et égal à $4\sqrt{2}$.

Exercice 1.17

Une boîte a la forme d'un parallélépipède surmonté par un demi-cylindre comme dans la figure ci-dessous



On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V égal à C.

1. Écrire $S(x, y, z)$
2. Écrire $V(x, y, z)$
3. Exprimer $z(x, y)$ comme solution de l'équation $V(x, y, z) = C$
4. Écrire $\tilde{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y))$. Calculer et établir la nature des points critiques de $\tilde{S}(x, y)$

Correction

1. $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \pi\frac{y}{2}x = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x + y)z$
2. $V(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 x = xyz + \frac{\pi}{8}xy^2$
3. $V(x, y, z) = C \iff z = \frac{C - \frac{\pi}{8}xy^2}{xy}$ donc $z(x, y) = \frac{C}{xy} - \frac{\pi}{8}y$
4. $\tilde{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y)) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x + y)\left(\frac{C}{xy} - \frac{\pi}{8}y\right) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)xy + \frac{2C}{x} + \frac{2C}{y}$
   - Calcul des points critiques :
   $$\nabla\tilde{S}(x, y) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)y - \frac{2C}{x^2} \\ \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x - \frac{2C}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\tilde{S}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = \left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right)$$
   Il existe un seul point critique qui est $\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}\right)$.
   - Nature des points critiques :
   $$H_{\tilde{S}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4C}{x^3} & 1 + \frac{\pi}{4} \\ 1 + \frac{\pi}{4} & \frac{4C}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(H_{\tilde{S}}(x, y)) = \frac{16C^2}{x^3y^3} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2$$
   donc
   $$H_{\tilde{S}}\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}\right) = \begin{pmatrix} 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) & 1 + \frac{\pi}{4} \\ 1 + \frac{\pi}{4} & 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det\left(H_{\tilde{S}}\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}\right)\right) = 3\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2.$$
   On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $z\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{C}{\left(\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}} - \frac{\pi}{8}\left(\frac{2C}{1+\frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}$