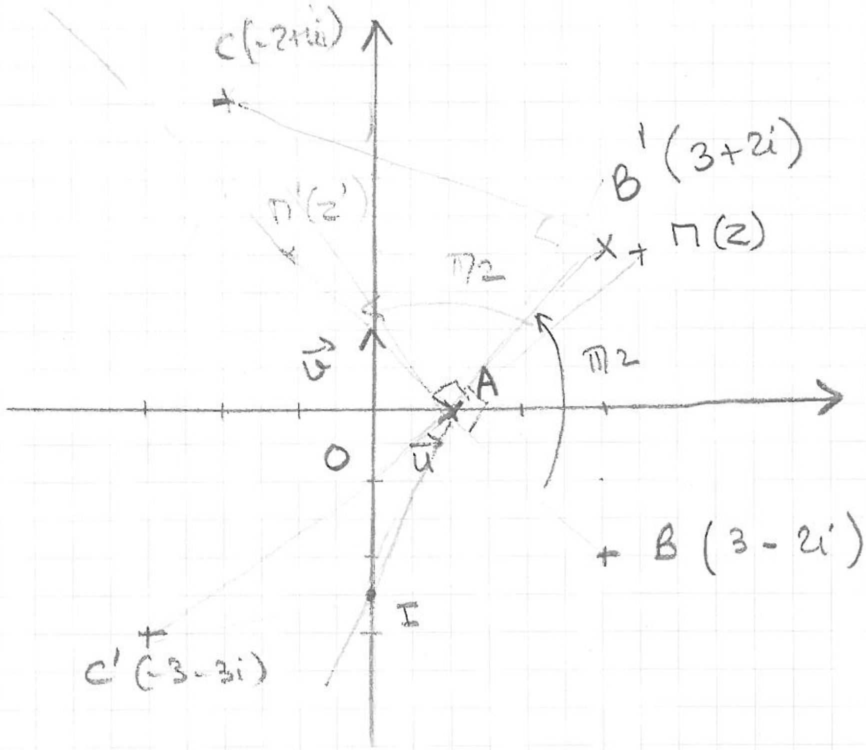
Intercalaire N°......................
Nom :................................
Prénom:................................

Ex I - 1

I-1)



I-2- $M \neq A$ $\quad z \neq 1$

2-a) $$Z = \frac{iz+1-i-1}{z-1} = \frac{(iz-i)(\overline{z-1})}{(z-1)(\overline{z-1})}$$

$$= \frac{i(z-1)(\overline{z-1})}{(z-1)(\overline{z-1})}$$

$$Z = i$$

I-2)b) $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

2-c) $AM' = |z'-1|$ et $AM = |z-1|$

$$|Z| = \left|\frac{z'-1}{z-1}\right| = \frac{|z'-1|}{|z-1|} = \frac{AM'}{AM} = 1 \iff AM' = AM.$$

$$(\vec{AM}, \vec{AM'}) = \arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right) = \arg(Z) = \frac{\pi}{2}$$

2-d) $F : M(z) \longmapsto M'(z')$

$$\begin{cases} AM' = AM \\ (\vec{AM}, \vec{AM'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

F est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$Z_{A'} = Z_A$ (puisque le centre d'une rotation est invariant)

$Z_{B'} = 3+2i$ (voir figure)

$\big(i(3-2i)+1-i = 2i+3 \big)$

I-4) $Z_{C'} = -3-3i \Rightarrow z_C = -3+4i \big)$

$$z'_C = i z_C + 1 - i$$

$$i z_C = -3-3i-1+i$$

$$z_C = \frac{-4-2i}{i} \times \frac{(-i)}{(-i)} = -2+4i$$

I-5a) $$Z_I = \frac{Z_B + Z_{C'}}{2} = \frac{3-2i+3-3i}{2} = -\frac{5i}{2}$$

[AI] est la médiane de ABC' issue de A

5b) $$Z_{\overrightarrow{AI}} = Z_I - Z_A = -\frac{5i}{2} - 1$$

$$Z_{\overrightarrow{CB'}} = Z_{B'} - Z_C = 3+2i + 2-4i = 5-2i$$

5c) $(AI) \perp (CB')$ car

$$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CB'}) = \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{CB'}}}{Z_{\overrightarrow{AI}}}\right) = \arg\left(\frac{5-2i}{-\frac{5i}{2}-1}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{10-4i}{-2-5i} \times \frac{-2+5i}{-2+5i}\right) = \arg\left(\frac{58i}{29}\right)$$

$$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{2}$$

5-d) $\mathcal{D}$ est donc la hauteur de ACB' issue de A
" (AI)

I-6) $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D} = \{A\} \Leftrightarrow \mathcal{D}' = F(\mathcal{D})$

$\mathcal{D}'$ est la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par A.

Intercalaire N°......................

Nom :................................

Prénom:................................

Exercice II. $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$

1.a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

$$f(x) = e^{2x}\underbrace{\left(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}\right)}_{g(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

1.b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

1.c) $\Delta : y = 3$

2.a) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x}$

2.b) $f'(x) = \underbrace{2e^{x}}_{g(x)}\left(e^{x} - 2\right)$

2.c) $f'(x) \geq 0 \iff e^{x} - 2 \geq 0$ car $g(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff e^{x} \geq 2$

$\iff x \geq \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3$

$= e^{\ln 4} - 8 + 3$

$= 4 - 8 + 3$

$f(\ln 2) = -1$

2.d) $x_\Pi = \ln 2$ et $y_\Pi = -1$

II. 3) $C = C_1$ car $\Pi(\ln 2; -1)$ est le minimum de C_1 (mais pas de C_2)

De plus $\ln 2 < 1$.

II-4) $T_0 : y = f(0) + x f'(0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1-4+3 = 0 \\ f'(0) = 2-4 = -2 \end{array}\right\} \text{ Donc } T_0 : y = -2x$$

II-5) $C \cap \Delta = \{E\}$

On résout $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 3$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^{x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x}(e^{x} - 4) = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 0$ ou $e^{x} = 4$

$\Leftrightarrow$ impossible ou $x = \ln 4$

donc $E(\ln 4 ; 3)$

II.6.a) $J = \int_0^{\ln 4} (3 - f(x))\, dx$

$= \int_0^{\ln 4} (-e^{2x} + 4e^{x})\, dx$

$= \left[-\frac{e^{2x}}{2} + 4e^{x} \right]_0^{\ln 4}$

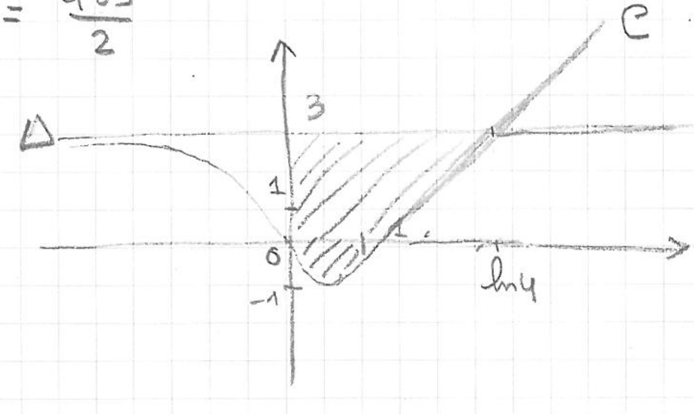
$= -\frac{e^{2\ln 4}}{2} + 4e^{\ln 4} + \frac{1}{2} - 4$

$= -\frac{e^{\ln 16}}{2} + 16^2 - \frac{7}{2}$

$= -\frac{16}{2} + 16^2 - \frac{7}{2}$

$= -\frac{23}{2} + \frac{512}{2}$

$J = \frac{489}{2}$



Intercalaire N°......................
Nom :................................
Prénom:................................

Exercice III.

III. 1.a) $p = P(T \leq 1) = 1 - e^{-1/3}$

1.b) $p(T > t) = 1 - p(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-1/3\, t}) = e^{-\frac{1}{3} t}$

III. 2 a) $p(A) = p(T > 1) = e^{-1/3}$

$p(B) = p(T > 3) = e^{-1}$

2.b) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$(A \cap B) = (T > 1) \cap (T > 3) = (T > 3) = B$

donc $P_A(B) = \dfrac{e^{-1}}{e^{-1/3}} = e^{-1+1/3} = e^{-2/3}$

III - 3)

3.a) $p(T \leq 1) = 1 - e^{-1/3} \simeq 0,2835$

28,35 % poupées seront remboursées

3.b) $P(T \leq t) \leq \dfrac{8}{100}$

$1 - e^{-1/3 t} \leq \dfrac{8}{100}$

$-e^{-1/3 t} \leq \dfrac{8}{100} - 1 = -\dfrac{92}{100}$

$e^{-1/3 t} \geqslant \dfrac{92}{100}$

$-\dfrac{1}{3} t \geqslant \ln\left(\dfrac{92}{100}\right)$

$t \leq -3 \ln\left(\dfrac{92}{100}\right) \simeq 0,2501.$

$t_0 = 3$ mois. (soit le 1/4 d'une année)

III. 4) 4-a- $X =$ nbre de poupées remboursées sur 3.

$p(X=3) = p^3 = (1 - e^{-1/3})^3.$

4-b- $p(X=1) = C_3^1\, p(1-p)^2 = C_3^1 (1 - e^{-1/3})(e^{-1/3})^2 = 3(1 - e^{-1/3}) e^{-2/3}$

$\dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

4-c

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\underbrace{C_3^0(1-p)^3}$	$C_3^1 p^1(1-p)^2$	$C_3^2 p^2(1-p)$	$C_3^3 p^3$
	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

3!

4-d) $E(X) = 0\times(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 6p^2(1-p) + 3p^3$

$= 3p(1-2p+p^2) + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$

$= 3p - \cancel{6p^2} + \cancel{3p^3} + \cancel{6p^2} - \cancel{6p^3} + \cancel{3p^3}$

$E(X) = 3p$

Intercalaire N°......................
Nom :.................................
Prénom:...............................

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ex IV (1)

Exercice IV

IV. 1. a.

$\vec{n_1} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \times (-1) + 1 \times (2) + (-2) \times (-1)$

$= -4 + 2 + 2 = 0$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{n_1}$ sont donc orthogonaux.

$\vec{n_1} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 1 + 1 \times 2 + (-2) \times 3$

$= 4 + 2 - 6 = 0$

idem.

Le vecteur $\vec{n_1}$ est donc un vecteur normal au perpendiculaire plan (ABC)

1.b) Soit $M \in (ABC)$, soit $M(x, y, z)$

$\vec{AM} \perp \vec{n_1}$ d'après 1-a)

$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 4(x-1) + y - 2(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + y - 2z - 6 = 0$ c'est l'équation du plan (ABC).

IV-2 $P : 1x - 2y + 1z = 0$.

2-a) $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

2-b) $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times 1$

$= 4 - 2 - 2 = 0$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont perpendiculaires, et ce sont les vecteurs normaux respectivement aux plans (ABC) et P

Donc les plans (ABC) et P sont perpendiculaires.

$P : x - 2y + z = 0$

2-c) $A(1; 0; -1)$ $1 - 0 - 1 = 0$ Donc $A \in P$

$B(0; 2; -2)$ $0 - 4 - 2 \neq 0$ Donc $B \notin P$.

$C(2,2,2)$ $\quad 2-4+2=0$ donc $C \in P$. Ex IV 2

2-d) $D_1 = (AC)$

$\vec{U} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ par exemple.

IV - 3).

$N \in D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 1+\alpha \\ y_N = \alpha \\ z_N = 2-\alpha \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$N \in P \Leftrightarrow x_N - 2y_N + z_N = 0$

$1+\alpha - 2\alpha + 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

Donc $\begin{cases} x_N = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ y_N = \frac{3}{2} \\ z_N = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $N \left(\frac{5}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{1}{2} \right)$

IV - 4 $K(3,2,0) \in \mathcal{D}_2$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$\begin{cases} 3 = 1+\alpha \\ 2 = \alpha \\ 0 = 2-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2$

donc $K \in \mathcal{D}_2$.

IV - 5 - a $\vec{KL}$ est normal à P ssi $\vec{KL}$ est colinéaire à $\vec{n_2}$ (vecteur normal à P)

$\vec{KL} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $\vec{u'} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$ ou $\begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ yz' - y'z = 0 \\ zx' - z'x = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} (1/3)(-2) - 1 \times (-2/3) = 0 \\ (-2/3)(1) - 1/3 \times (-2) = 0 \\ (1/3)(1) - 1/3 \times 1 = 0 \end{array}\right\}$ ok

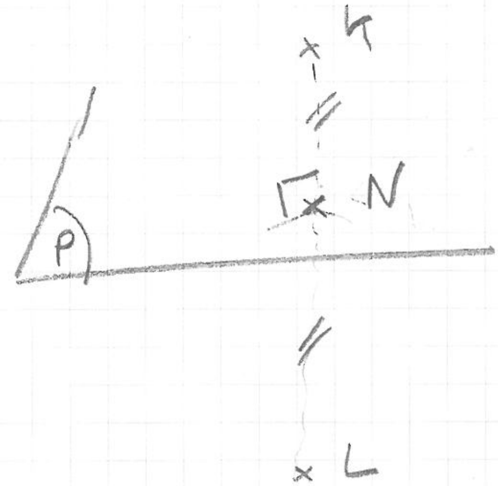
Donc $\vec{KL}$ est normal à P.

Intercalaire N°......................
Nom :..................................
Prénom:.................................

Ex IV (3)

$(KL) \perp P$

5-b) K et L sont symétriques par rapport au plan P $\iff d(K,P) = d(L,P) \iff KN = LN$



$$\overrightarrow{KN} = \left(\frac{5}{2} - 3 \; ; \; \frac{3}{2} - 2 \; ; \; \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} \; ; \; -\frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{2}\right)$$

$$KN = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{LN} = \left(\frac{5}{2} - \frac{10}{3} \; ; \; \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \; ; \; \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{-5}{6} \; ; \; \frac{1}{6} \; ; \; \frac{1}{6}\right)$$

$$LN = \sqrt{\left(\frac{-5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{36}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$LN = KN$ Donc K et L sont symétriques par rapport à P.

5-c) $H = N = (5/2 \; ; \; 3/2 \; ; \; 1/2)$

IV-6- $\vec{n_1}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$
$\vec{n_2}$ " $\mathcal{D}_2$

et on a vu que $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ Donc $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$.