RI-MB1 - Essential Mathematical skills

Licence SVT - 1ère année

G. Faccanoni

A.A. 2023-2024

UNIVERSITÉ DE TOULON

PLAN

1. Fonctions et transformations de graphes

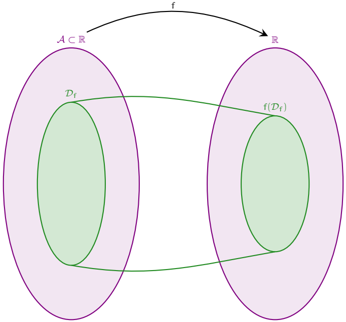
1. Fonctions et transformations de graphes

Fonctions d'une variable réelle

Définition (Fonction)

Une fonction f est un procédé (ou relation) qui à tout nombre réel x d'un ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ associe (au plus) un unique nombre réel noté $f(x)$. On la note :

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{A} \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$



- $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{A}$ est l'ensemble de définition de la fonction f, *i.e.* le plus grand ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien défini
- x est la variable, $f(x)$ l'image de $x \in \mathcal{D}_f$ par la fonction f (pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ il existe un et un seul $f(x)$)
- Attention : ne pas confondre la fonction f et le réel $f(x)$
- La variable x est muette, on pourrait très bien écrire $t \mapsto f(t)$ ou encore $\heartsuit \mapsto f(\heartsuit)$

Fonctions d'une variable réelle

On peut définir une fonction de différentes manières :

Exemple

1. À l'aide d'une expression : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2. À l'aide de plusieurs expressions : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0, \\ \cos(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
3. Par composition d'autres fonctions : $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + x^2$ ainsi $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Fonctions d'une variable réelle

Égalité de fonctions

Deux fonctions f et g coïncident ssi $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$.

Exemple

Considérons les deux fonctions

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x \qquad\qquad x \longmapsto \frac{x^2}{x}$$

On a $g(x) = x = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_g$ mais $f \neq g$ car $\mathcal{D}_f \neq \mathcal{D}_g$.

En effet, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ mais $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

1. Fonctions et transformations de graphes

Graphe d'une fonction

Définition (Graphe d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$, on appelle graphe de f sur $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$, où x appartient à $\mathcal{D}_f$:

$$C_f = \{\, (x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \,\}.$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f.

- f est une fonction ssi toute droite verticale intersecte le graphe de f au plus une fois
- si la droite verticale d'équation $x = \kappa$ intersecte le graphe de f, alors $\kappa \in \mathcal{D}_f$

Graphe d'une fonction
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Graphe d'une relation
NON fonction

Graphe d'une fonction
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$

Graphe d'une fonction

Définition (Graphe d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$, on appelle graphe de f sur $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$, où x appartient à $\mathcal{D}_f$:

$$C_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \}.$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f.

- f est une fonction ssi toute droite verticale intersecte le graphe de f au plus une fois
- si la droite verticale d'équation $x = \kappa$ intersecte le graphe de f, alors $\kappa \in \mathcal{D}_f$

Graphe d'une fonction

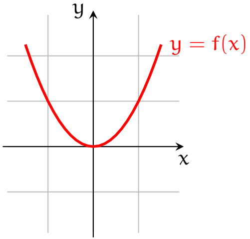
Définition (Graphe d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$, on appelle graphe de f sur $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$, où x appartient à $\mathcal{D}_f$:

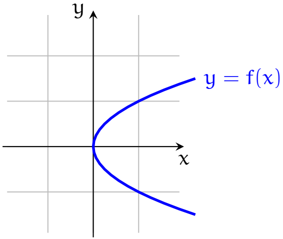
$$C_f = \{\, (x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \,\}.$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f.

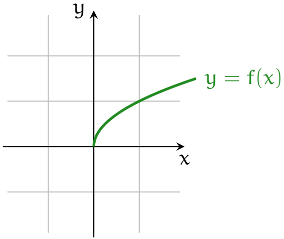
- f est une fonction ssi toute droite verticale intersecte le graphe de f au plus une fois
- si la droite verticale d'équation $x = \kappa$ intersecte le graphe de f, alors $\kappa \in \mathcal{D}_f$



Graphe d'une fonction
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$



Graphe d'une relation
NON fonction



Graphe d'une fonction
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$

Graphe d'une fonction

Parité/Imparité

$\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à l'origine (par exemple : $\mathbb{R}$, $(-a, a)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ...)

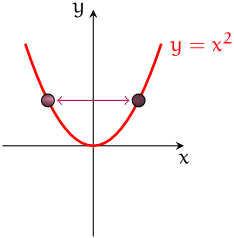
f paire

$$f(x) = f(-x)$$

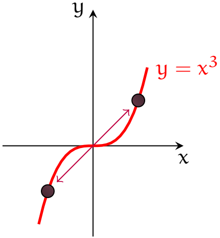
f impaire

$$f(x) = -f(-x)$$

f ni paire ni impaire



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion selon l'axe des y



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion autour de l'origine

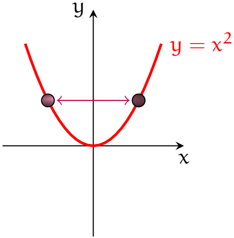
Graphe d'une fonction

Parité/Imparité

$\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à l'origine (par exemple : $\mathbb{R}$, $(-a, a)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ...)

f paire

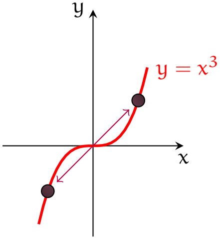
$$f(x) = f(-x)$$



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion selon l'axe des y

f impaire

$$f(x) = -f(-x)$$



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion autour de l'origine

f ni paire ni impaire

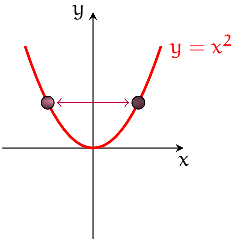
Graphe d'une fonction

Parité/Imparité

$\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à l'origine (par exemple : $\mathbb{R}$, $(-a, a)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ...)

f paire

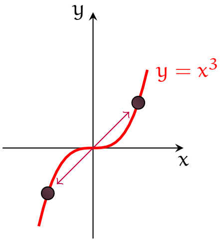
$$f(x) = f(-x)$$



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion selon l'axe des y

f impaire

$$f(x) = -f(-x)$$



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion autour de l'origine

f ni paire ni impaire

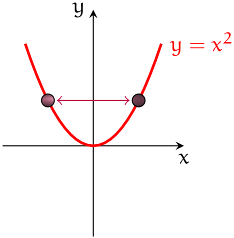
Graphe d'une fonction

Parité/Imparité

$\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à l'origine (par exemple : $\mathbb{R}$, $(-a, a)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ...)

f paire

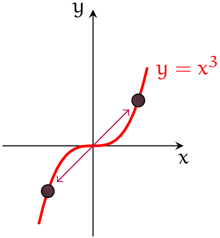
$$f(x) = f(-x)$$



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion selon l'axe des y

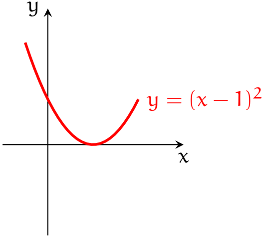
f impaire

$$f(x) = -f(-x)$$



Son graphe coïncide avec lui-même après une réflexion autour de l'origine

f ni paire ni impaire



1. Fonctions et transformations de graphes

Composition de fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{v} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & v(t) \end{array}$$

Composition de fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad v \quad} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & v(t) \end{array}$$

Composition de fonctions

$$\begin{array}{rcccl} f\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad v \qquad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) = t & \longmapsto & v(t) = v(u(x)) = f(x) \end{array}$$

$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$

Composition de fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} t\text{-}\mathbb{R} & \xrightarrow{\quad v \quad} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & v(t) \end{array}$$

Composition de fonctions

$$\begin{array}{rcccl} f\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad v \qquad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) = t & \longmapsto & v(t) = v(u(x)) = f(x) \end{array}$$

$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$

Exemple

Si $u(x) = 1 + x^2$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$ alors $f(x) = v(u(x)) = \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Composition de fonctions

Testez-vous

Compléter le tableau en calculant $f(x) \overset{\text{def}}{=} v(u(x))$ et l'ensemble de définition de u, de v et de f.

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \overset{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f$
x^2		$\frac{1}{x}$			
$\frac{1}{x}$		x^2			
$x+1$		x^2			
x^2		$x+1$			
x^2		$\sqrt{x}$			
$\sqrt{x}$		x^2			

Composition de fonctions

Correction

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$
x^2	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	x^2	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$(x+1)^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2+1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	x^2	$\mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x$	$\mathbb{R}^+$

Composition de fonctions

Correction

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \overset{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$
x^2	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	x^2	$\mathbb{R}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$(x+1)^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2+1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	x^2	$\mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x$	$\mathbb{R}^+$

Composition de fonctions

Correction

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$
x^2	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	x^2	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$(x+1)^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2+1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	x^2	$\mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x$	$\mathbb{R}^+$

Composition de fonctions

Correction

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \overset{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$
x^2	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	x^2	$\mathbb{R}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$(x+1)^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2+1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2} = \|x\|$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	x^2	$\mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x$	$\mathbb{R}^+$

Composition de fonctions

Correction

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$
x^2	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	x^2	$\mathbb{R}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$(x+1)^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2+1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	x^2	$\mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x$	$\mathbb{R}^+$

Composition de fonctions

Correction

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \overset{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$
x^2	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	x^2	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$(x+1)^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2+1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	x^2	$\mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x$	$\mathbb{R}^+$

Composition de fonctions

Correction

$u(x)$	$\mathcal{D}_u$	$v(x)$	$\mathcal{D}_v$	$f(x) \overset{\text{def}}{=} v(u(x))$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_u$
x^2	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	x^2	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_*$
$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$(x+1)^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$x+1$	$\mathbb{R}$	x^2+1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2} = \|x\|$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	x^2	$\mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x$	$\mathbb{R}^+$

1. Fonctions et transformations de graphes

Graphe d'une composition de fonctions

Nous allons voir que

à partir du graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$,

il est possible d'en déduire

le graphe des fonctions composées $x \mapsto u(f(x))$ et $x \mapsto f(u(x))$

si u est l'une des fonctions suivantes :

- $u = t_c : \heartsuit \mapsto \heartsuit + c$ (translation)
- $u = d_c : \heartsuit \mapsto c\heartsuit$ (dilatation/contraction)
- $u = \mathrm{abs} : \heartsuit \mapsto |\heartsuit|$ (valeur absolue)

NB Ceci même si on ne connaît pas l'expression analytique pour f.

Graphe d'une composition de fonctions

À partir du graphe de $x \mapsto f(x)$, nous allons en déduire les graphes des fonctions suivantes :

	transformations verticales $\downarrow$	transformations horizontales $\downarrow$
	$x \mapsto u(f(x))$	$x \mapsto f(u(x))$
$u = t_c : x \mapsto x + c$	$x \mapsto f(x) + c$	$x \mapsto f(x + c)$
$u = d_c : x \mapsto cx$	$x \mapsto cf(x)$	$x \mapsto f(cx)$
$u = \text{abs}: x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto \lvert f(x) \rvert$	$x \mapsto f(\lvert x \rvert)$

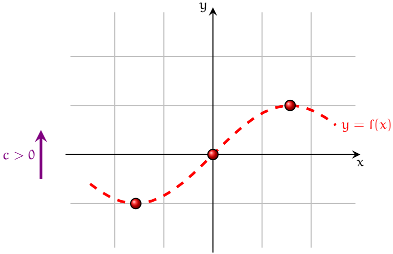
1. Fonctions et transformations de graphes

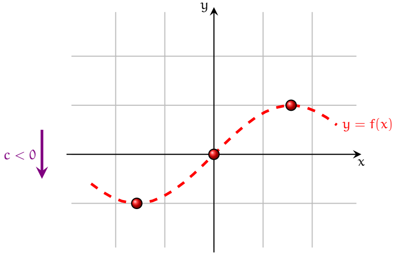
Translation verticale $g(x) = t_c(f(x)) = f(x) + c$

Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f de c unités :

- si $c > 0$, la translation se fait vers le haut
- si $c < 0$, la translation se fait vers le bas

$$
\begin{array}{rccccl}
g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad t_c \qquad} & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(x) = t_c(f(x)) = f(x) + c
\end{array}
$$





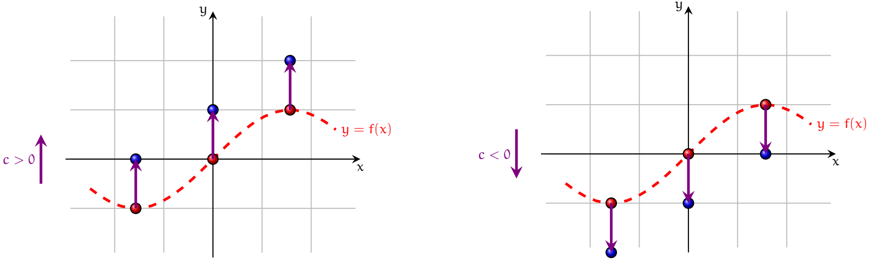
Le point de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en $(a, b + c)$

Translation verticale $g(x) = t_c(f(x)) = f(x) + c$

Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f de c unités :

- si $c > 0$, la translation se fait vers le haut
- si $c < 0$, la translation se fait vers le bas

$$\begin{array}{rcccl} g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} & \xrightarrow{\ t_c\ } & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(x) = t_c(f(x)) = f(x) + c \end{array}$$



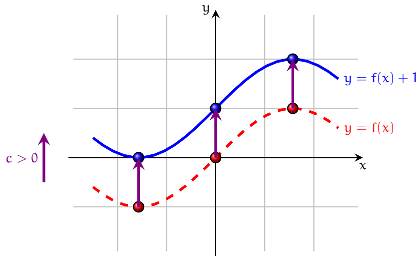
Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $(a, b + c)$

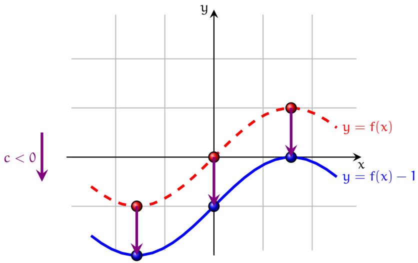
Translation verticale $g(x) = t_c(f(x)) = f(x) + c$

Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f de c unités :

- si $c > 0$, la translation se fait vers le haut
- si $c < 0$, la translation se fait vers le bas

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\qquad t_c \qquad} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \longmapsto g(x) = t_c(f(x)) = f(x) + c \end{aligned}$$





Le point ● de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en ● $(a, b + c)$

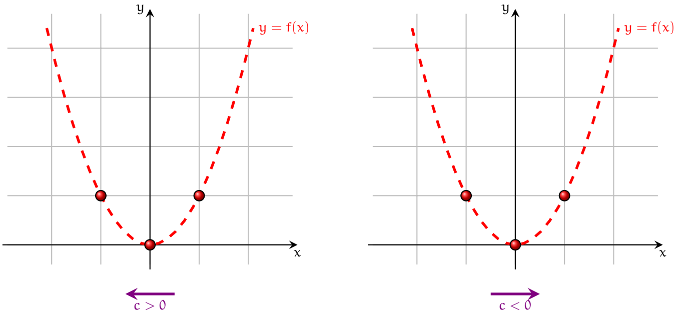
1. Fonctions et transformations de graphes

Translation horizontale $g(x) = f(t_c(x)) = f(x+c)$

Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f de c unités :

- si $c > 0$, la translation se fait vers la gauche
- si $c < 0$, la translation se fait vers la droite

$$
\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad t_c \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \mathbb{R} \\
x &\longmapsto t_c(x) = x + c \longmapsto g(x) = f(t_c(x)) = f(x+c)
\end{aligned}
$$



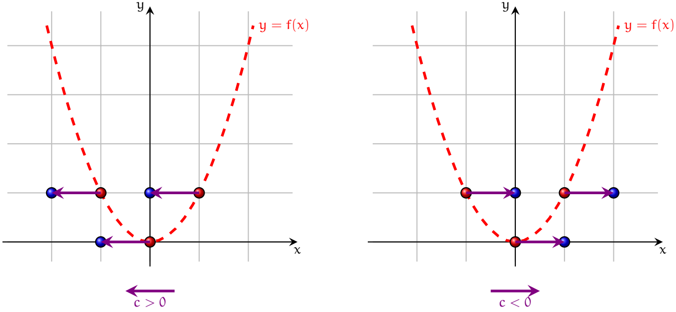
Le point de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en $(a - c, b)$

Translation horizontale $g(x) = f(t_c(x)) = f(x+c)$

Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f de c unités :

- si $c > 0$, la translation se fait vers la gauche
- si $c < 0$, la translation se fait vers la droite

$$g \colon \mathbb{R} \xrightarrow{t_c} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto t_c(x) = x + c \longmapsto g(x) = f(t_c(x)) = f(x+c)$$



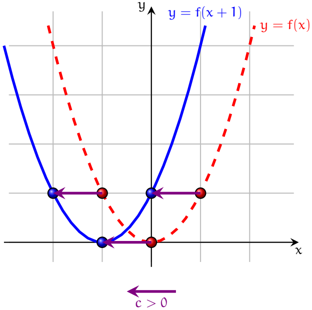
Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $(a - c, b)$

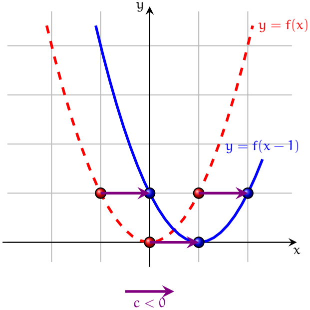
Translation horizontale $g(x) = f(t_c(x)) = f(x+c)$

Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f de c unités :

- si $c > 0$, la translation se fait vers la gauche
- si $c < 0$, la translation se fait vers la droite

$$
\begin{array}{rcccl}
g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad t_c \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & t_c(x) = x + c & \longmapsto & g(x) = f(t_c(x)) = f(x+c)
\end{array}
$$





Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $(a - c, b)$

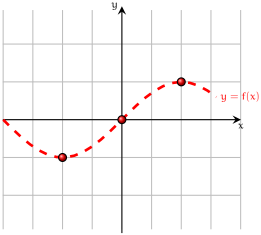
1. Fonctions et transformations de graphes

Dilatation ou contraction verticale $g(x) = d_c(f(x)) = cf(x)$

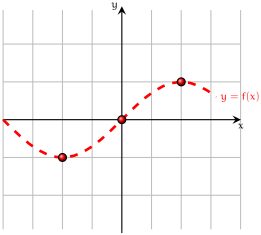
Le graphe de g s'obtient par dilatation/contraction du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe x.

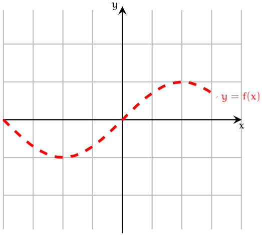
$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\qquad d_c \qquad} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \longmapsto g(x) = d_c(f(x)) = cf(x) \end{aligned}$$



$c > 1$



$0 < c < 1$



$c < 0$

Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $(a, b \times c)$

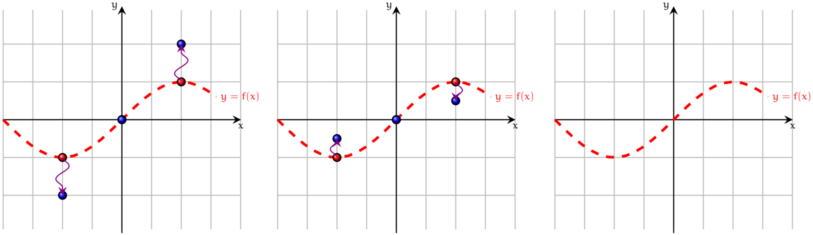
$b = 0 \implies b \times c = 0$: les points qui intersectent l'axe des abscisses ne bougent pas !

Dilatation ou contraction verticale $g(x) = d_c(f(x)) = cf(x)$

Le graphe de g s'obtient par dilatation/contraction du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe x.

$$\begin{array}{rcccl} g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad d_c \quad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(x) = d_c(f(x)) = cf(x) \end{array}$$



$c > 1$ $\qquad$ $0 < c < 1$ $\qquad$ $c < 0$

Le point de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en $(a, b \times c)$

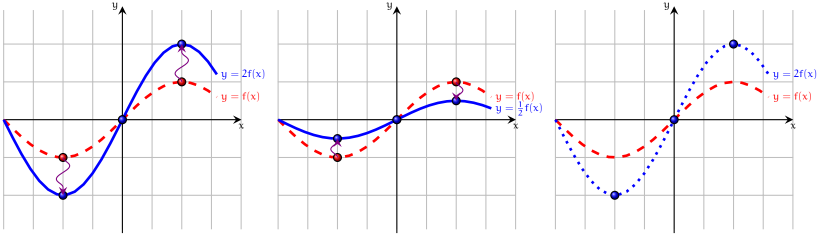
$b = 0 \implies b \times c = 0$: les points qui intersectent l'axe des abscisses ne bougent pas !

Dilatation ou contraction verticale $g(x) = d_c(f(x)) = cf(x)$

Le graphe de g s'obtient par dilatation/contraction du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe x.

$$
\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\qquad d_c \qquad} \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) \longmapsto g(x) = d_c(f(x)) = cf(x)
\end{aligned}
$$



$c > 1$ $\qquad$ $0 < c < 1$ $\qquad$ $c < 0$

Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $(a, b \times c)$

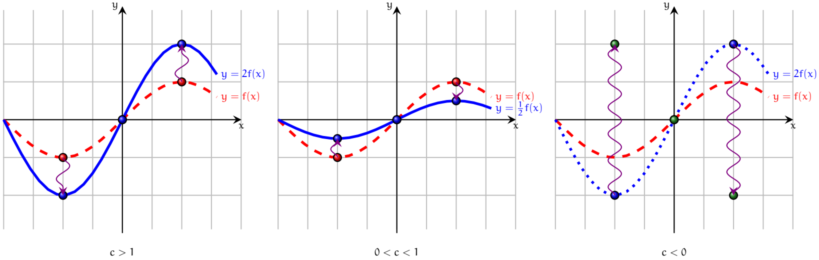
$b = 0 \implies b \times c = 0$: les points qui intersectent l'axe des abscisses ne bougent pas !

Dilatation ou contraction verticale $g(x) = d_c(f(x)) = cf(x)$

Le graphe de g s'obtient par dilatation/contraction du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe x.

$$\begin{array}{rcccl} g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad d_c \qquad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(x) = d_c(f(x)) = cf(x) \end{array}$$



Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $(a, b \times c)$

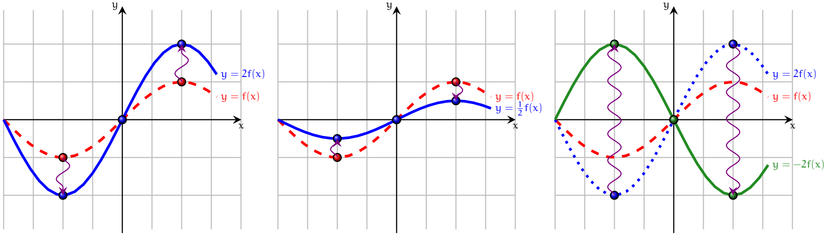
$b = 0 \implies b \times c = 0$: les points qui intersectent l'axe des abscisses ne bougent pas !

Dilatation ou contraction verticale $g(x) = d_c(f(x)) = cf(x)$

Le graphe de g s'obtient par dilatation/contraction du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe x.

$$
\begin{array}{rcccl}
g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad d_c \qquad} & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(x) = d_c(f(x)) = cf(x)
\end{array}
$$



$c > 1$ $\quad$ $0 < c < 1$ $\quad$ $c < 0$

Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $(a, b \times c)$
$b = 0 \implies b \times c = 0$: les points qui intersectent l'axe des abscisses ne bougent pas !

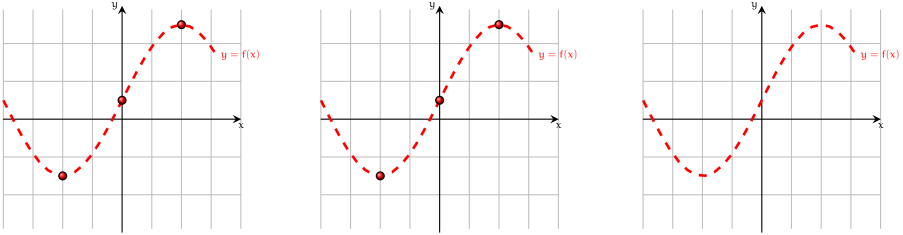
1. Fonctions et transformations de graphes

Dilatation ou contraction horizontale $g(x) = f(d_c(x)) = f(cx)$

Le graphe de g s'obtient par contraction/dilatation du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe y.

$$
\begin{array}{rcccl}
g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad d_c \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & d_c(x) = cx & \longmapsto & g(x) = f(d_c(x)) = f(cx)
\end{array}
$$



$c > 1$ $\qquad$ $0 < c < 1$ $\qquad$ $c < 0$

Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $\left(\frac{a}{c}, b\right)$

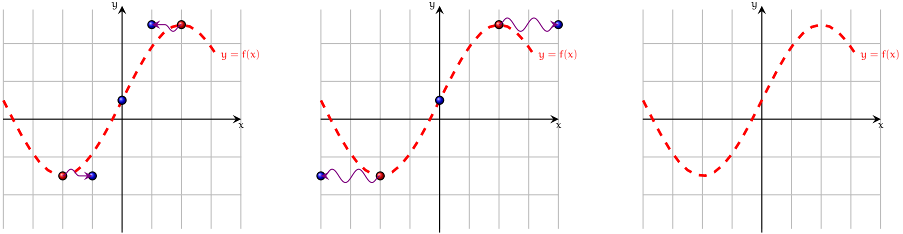
$a = 0 \implies \frac{a}{c} = 0$: l'intersection avec l'axe des ordonnées ne bouge pas !

Dilatation ou contraction horizontale $g(x) = f(d_c(x)) = f(cx)$

Le graphe de g s'obtient par contraction/dilatation du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe y.

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad d_c \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d_c(x) = cx \longmapsto g(x) = f(d_c(x)) = f(cx) \end{aligned}$$



$c > 1$ $0 < c < 1$ $c < 0$

Le point (rouge) de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en (bleu) $\left(\frac{a}{c}, b\right)$

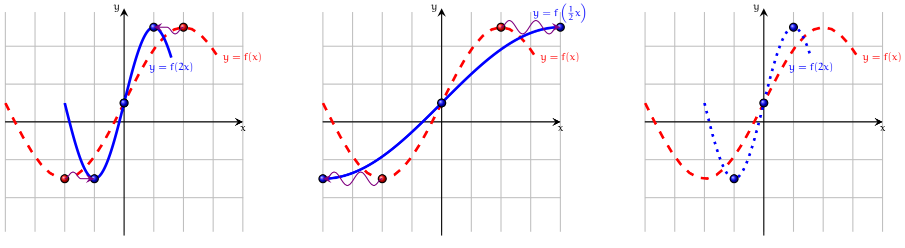
$a = 0 \implies \frac{a}{c} = 0$: l'intersection avec l'axe des ordonnées ne bouge pas !

Dilatation ou contraction horizontale $g(x) = f(d_c(x)) = f(cx)$

Le graphe de g s'obtient par contraction/dilatation du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe y.

$$\begin{array}{rcccl} g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad d_c \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d_c(x) = cx & \longmapsto & g(x) = f(d_c(x)) = f(cx) \end{array}$$



Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $\left(\frac{a}{c}, b\right)$

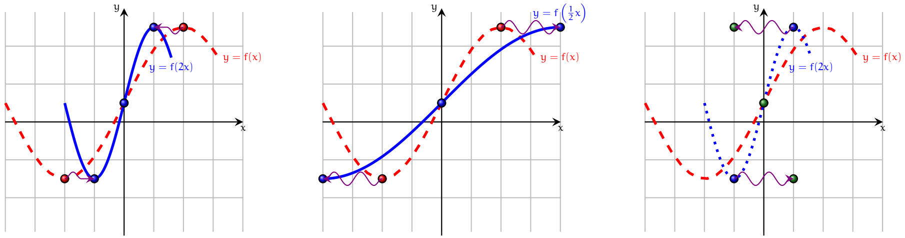
$a = 0 \implies \frac{a}{c} = 0$: l'intersection avec l'axe des ordonnées ne bouge pas !

Dilatation ou contraction horizontale $g(x) = f(d_c(x)) = f(cx)$

Le graphe de g s'obtient par contraction/dilatation du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe y.

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad d_c \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d_c(x) = cx \longmapsto g(x) = f(d_c(x)) = f(cx) \end{aligned}$$



$c > 1$ | $0 < c < 1$ | $c < 0$

Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $\left(\frac{a}{c}, b\right)$

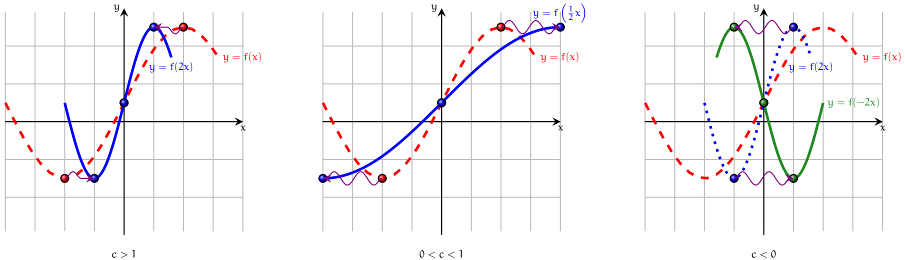
$a = 0 \implies \frac{a}{c} = 0$: l'intersection avec l'axe des ordonnées ne bouge pas !

Dilatation ou contraction horizontale $g(x) = f(d_c(x)) = f(cx)$

Le graphe de g s'obtient par contraction/dilatation du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur c.

- Si $c > 1$, il s'agit d'une contraction,
- si $0 < c < 1$, il s'agit d'une dilatation,
- si $c < 0$, d'abord on dilate/contracte d'un facteur $-c$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe y.

$$
\begin{array}{rcccl}
g\colon \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad d_c \quad} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & d_c(x) = cx & \longmapsto & g(x) = f(d_c(x)) = f(cx)
\end{array}
$$



Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 $\left(\frac{a}{c}, b\right)$

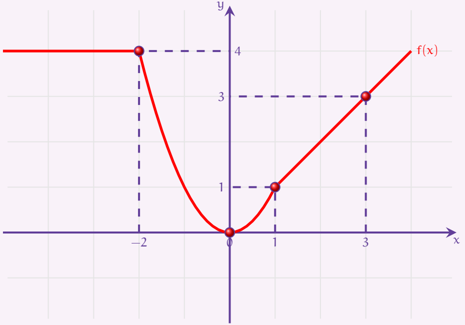
$a = 0 \implies \frac{a}{c} = 0$: l'intersection avec l'axe des ordonnées ne bouge pas !

1. Fonctions et transformations de graphes

Composition de transformations de graphes

Testez-vous

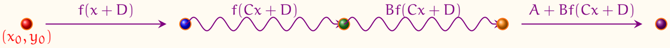
À partir du graphe de f donné, tracer le graphe de $g(x) = -2 + \frac{1}{2}f(2x+1)$.

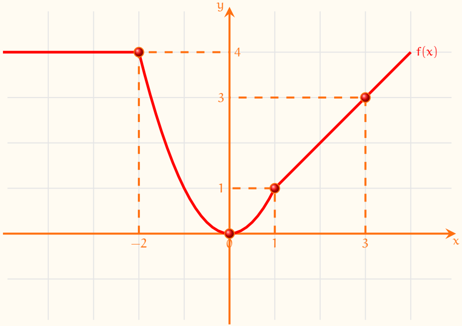


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x+1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :



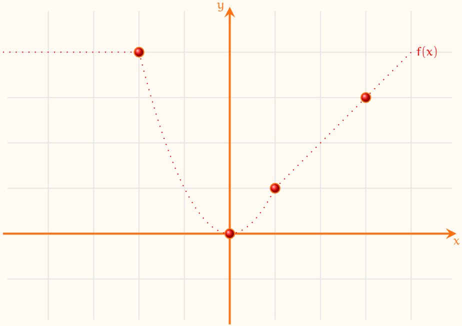


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

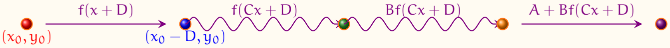
$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} \bullet \xrightarrow{f(Cx+D)} \bullet \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \bullet \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \bullet$$

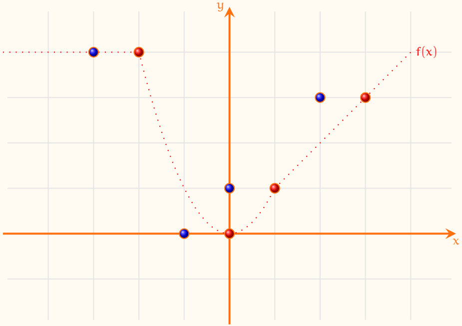


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

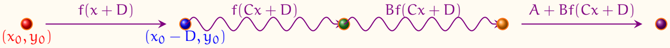


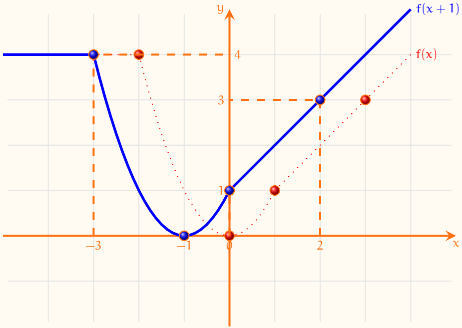


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

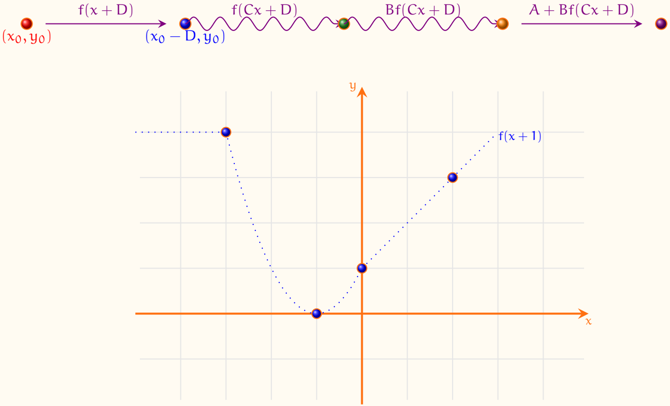




Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

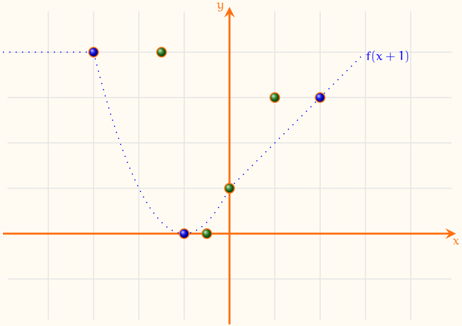


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

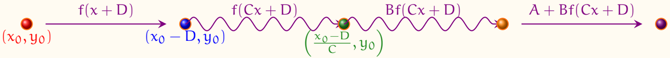
$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\tfrac{x_0 - D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \cdot \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \cdot$$

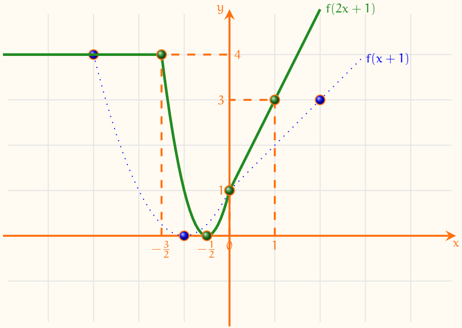


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

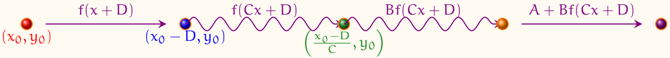


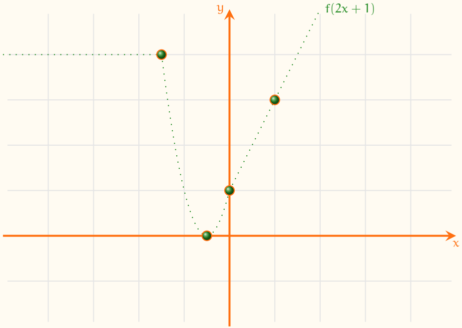


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \frac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

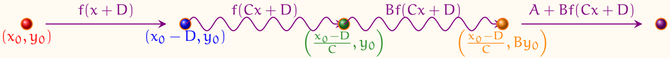


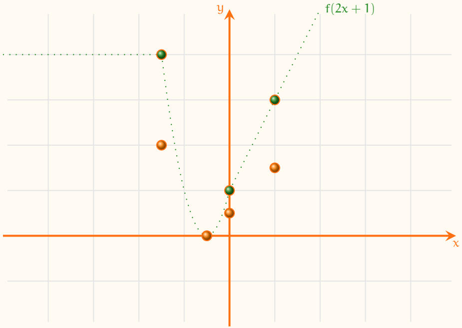


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \frac{1}{2}f(2x+1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :



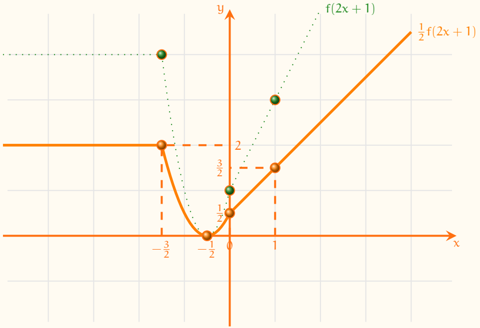


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \frac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \bullet$$

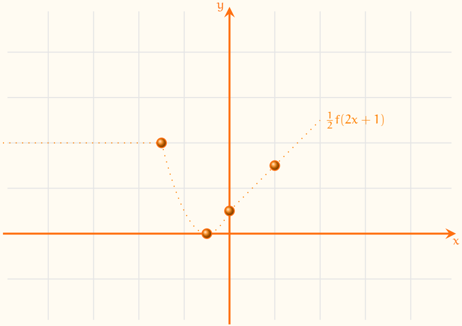


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x+1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)}$$

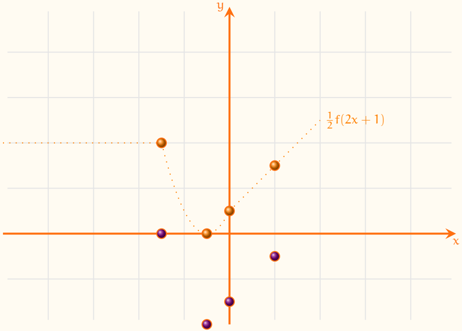


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \frac{1}{2}f(2x+1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

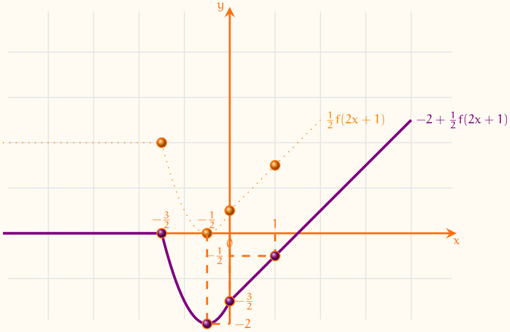


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, By_0 + A\right)$$

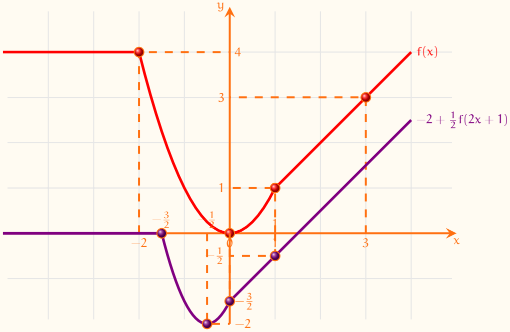


Composition de transformations de graphes

Correction

On a $g(x) = A + Bf(Cx + D) = -2 + \dfrac{1}{2}f(2x + 1)$. Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

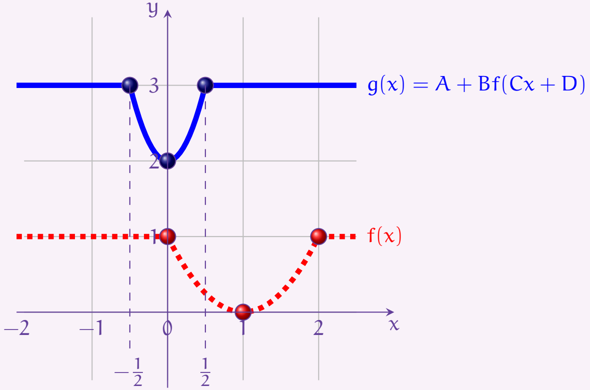
$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, By_0 + A\right)$$



Composition de transformations de graphes

Testez-vous

Trouver les valeurs de A, B, C et D.



Composition de transformations de graphes

Correction

Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_{\text{old}}, y_{\text{old}}) \overset{\text{def}}{=} (x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} (x_{\text{new}}, y_{\text{new}}) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

Le point de coordonnées $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ avec $y_{\text{old}} = f(x_{\text{old}})$
est envoyé en de coordonnées $(x_{\text{new}}, y_{\text{new}}) = \left(\frac{x_{\text{old}}-D}{C}, By_{\text{old}} + A\right)$ avec $y_{\text{new}} = g(x_{\text{new}})$:

$$\begin{cases} x_{\text{old}} = x_{\text{new}}C + D \\ By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A \end{cases}$$

- Le point $(1, 0)$ est envoyé en $(0, 2)$
- Le point $(0, 1)$ est envoyé en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 1 = 0 \times C + D \\ B \times 0 = 2 - A \\ 0 = -\frac{1}{2}C + D \\ B \times 1 = 3 - A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = 1 \\ A = 2 \\ C = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Composition de transformations de graphes

Correction

Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_{old}, y_{old}) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0 - D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} (x_{new}, y_{new}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x_0 - D}{C}, By_0 + A\right)$$

Le point 🔴 de coordonnées (x_{old}, y_{old}) avec $y_{old} = f(x_{old})$
est envoyé en 🔵 de coordonnées $(x_{new}, y_{new}) = \left(\frac{x_{old} - D}{C}, By_{old} + A\right)$ avec $y_{new} = g(x_{new}\ )$:

$$\begin{cases} x_{old} = x_{new} C + D \\ By_{old} = y_{new} - A \end{cases}$$

- Le point $(1, 0)$ est envoyé en $(0, 2)$
- Le point $(0, 1)$ est envoyé en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 1 = 0 \times C + D \\ B \times 0 = 2 - A \\ 0 = -\frac{1}{2} C + D \\ B \times 1 = 3 - A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = 1 \\ A = 2 \\ C = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Composition de transformations de graphes

Correction

Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_{old}, y_{old}) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} (x_{new}, y_{new}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

Le point 🔴 de coordonnées (x_{old}, y_{old}) avec $y_{old} = f(x_{old})$
est envoyé en 🔵 de coordonnées $(x_{new}, y_{new}) = \left(\frac{x_{old}-D}{C}, By_{old} + A\right)$ avec $y_{new} = g(x_{new})$:

$$\begin{cases} x_{old} = x_{new}C + D \\ By_{old} = y_{new} - A \end{cases}$$

- Le point $(1, 0)$ est envoyé en $(0, 2)$
- Le point $(0, 1)$ est envoyé en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 1 = 0 \times C + D \\ B \times 0 = 2 - A \\ 0 = -\frac{1}{2}C + D \\ B \times 1 = 3 - A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = 1 \\ A = 2 \\ C = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Composition de transformations de graphes

Correction

Un point de coordonnée (x_0, y_0) va être déplacé comme suit :

$$(x_{\text{old}}, y_{\text{old}}) \overset{\text{def}}{=} (x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \overset{f(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \overset{Bf(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} (x_{\text{new}}, y_{\text{new}}) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

Le point 🔴 de coordonnées $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ avec $y_{\text{old}} = f(x_{\text{old}})$
est envoyé en 🔵 de coordonnées $(x_{\text{new}}, y_{\text{new}}) = \left(\frac{x_{\text{old}}-D}{C}, By_{\text{old}} + A\right)$ avec $y_{\text{new}} = g(x_{\text{new}})$:

$$\begin{cases} x_{\text{old}} = x_{\text{new}} C + D \\ By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A \end{cases}$$

- Le point $(1, 0)$ est envoyé en $(0, 2)$
- Le point $(0, 1)$ est envoyé en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 1 = 0 \times C + D \\ B \times 0 = 2 - A \\ 0 = -\frac{1}{2}C + D \\ B \times 1 = 3 - A \end{cases} \implies \begin{cases} D = 1 \\ A = 2 \\ C = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

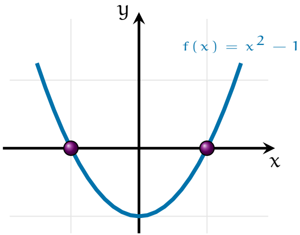
1. Fonctions et transformations de graphes

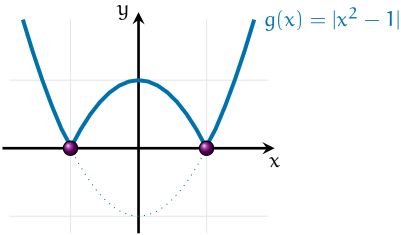
Valeur absolue “en vertical” $g(x) = |f(x)|$

Le graphe de g s'obtient à partir de celui de f comme suit :

- si le graphe de f est au-dessus de l'axe x, le graphe de g coïncide avec celui de f
- si le graphe de f est en-dessous de l'axe x, le graphe de g est le symétrique par rapport à l'axe x de celui de f

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\qquad \text{abs} \qquad} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \longmapsto g(x) = \text{abs}(f(x)) = |f(x)| \end{aligned}$$





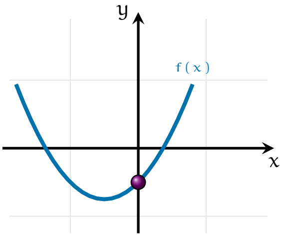
1. Fonctions et transformations de graphes

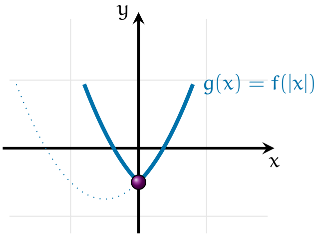
Valeur absolue "en horizontale" $g(x) = f(|x|)$

Le graphe de g s'obtient à partir de celui de f comme suit :

- si $x \geq 0$, le graphe de g coïncide avec celui de f
- si $x < 0$, le graphe de g est le symétrique par rapport à l'axe x de celui pour $x \geq 0$

$$g\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{abs}} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \text{abs}(x) \longmapsto g(x) = f(\text{abs}(x)) = f(|x|)$$





1. Fonctions et transformations de graphes

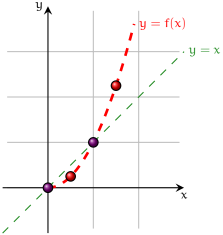
Graphe relation inverse

Tracer le graphe d'une fonction $f\colon x \mapsto f(x)$ revient à tracer y en fonction de x.

Représenter la relation [1] inverse, notée f^{-1}, revient à échanger les axes des coordonnées x et y :

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Géométriquement, cela consiste à effectuer la symétrie selon la diagonale d'équation $y = x$:



Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 (b, a)

$a = b \implies$ 🔴=🔵 : les intersections avec la bissectrice ne bougent pas !

1. On parle de relation car en générale elle n'est pas une fonction

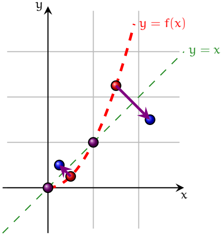
Graphe relation inverse

Tracer le graphe d'une fonction $f\colon x \mapsto f(x)$ revient à tracer y en fonction de x.

Représenter la relation [1] inverse, notée f^{-1}, revient à échanger les axes des coordonnées x et y :

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Géométriquement, cela consiste à effectuer la symétrie selon la diagonale d'équation $y = x$:



Le point 🔴 de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en 🔵 (b, a)

$a = b \implies$ 🔴=🔵 : les intersections avec la bissectrice ne bougent pas !

1. On parle de relation car en générale elle n'est pas une fonction

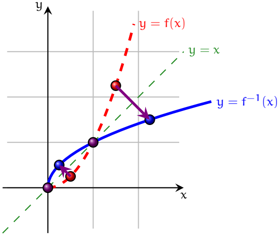
Graphe relation inverse

Tracer le graphe d'une fonction $f\colon x \mapsto f(x)$ revient à tracer y en fonction de x.

Représenter la relation [1] inverse, notée f^{-1}, revient à échanger les axes des coordonnées x et y :

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Géométriquement, cela consiste à effectuer la symétrie selon la diagonale d'équation $y = x$:



Le point de coordonnées (a, b) avec $b = f(a)$ est envoyé en (b, a)

$a = b \implies$ = : les intersections avec la bissectrice ne bougent pas !

1. On parle de relation car en générale elle n'est pas une fonction

Pour réviser, s'entraîner et se tester

Pour réviser, s'entraîner et se tester

- OMB+ :
  - chapitre "XII Logique et ensembles", section "Fonctions"
  - chapitre "VI Fonctions élémentaires", section "Transformations de fonctions"

2. Fonctions usuelles et propriétés

2. Fonctions usuelles et propriétés

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

In "real life"

La mesure d'une même température peut s'exprimer dans plusieurs unités.

En Europe, nous sommes habitués au degré Celsius (°C), alors qu'aux États-Unis l'usage est plutôt le degré Farenheit (°F).

Quelle formule permet la conversion d'une valeur numérique de la température en (°C) vers l'unité (°F) ?

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f\colon x \mapsto ax + b$ est la fonction affine de pente (ou coefficient directeur) a et d'ordonnée à l'origine b.
- Si $b = 0$ c'est une fonction linéaire (le graphe passe par $(0, 0)$).
- Si $a = 0$ c'est une fonction constante.
- Les droites verticales (d'équation $x = \kappa$) ne sont pas des fonctions $x \mapsto f(x)$

Ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

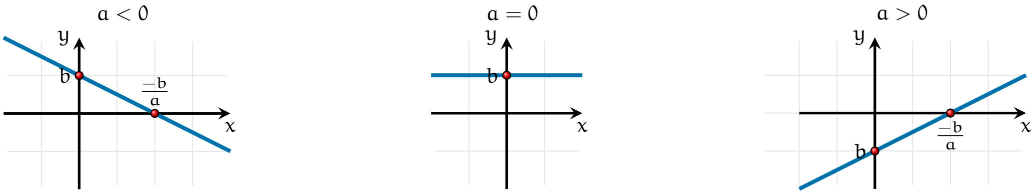
Considérons deux droites de pentes a_1 et a_2 respectivement.

- Elle sont parallèles ssi $a_1 = a_2$
- Elle sont orthogonales ssi $a_1 a_2 = -1$

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f\colon x \mapsto ax + b$ est la fonction affine de pente (ou coefficient directeur) a et d'ordonnée à l'origine b.
- Si $b = 0$ c'est une fonction linéaire (le graphe passe par $(0, 0)$).
- Si $a = 0$ c'est une fonction constante.
- Les droites verticales (d'équation $x = \kappa$) ne sont pas des fonctions $x \mapsto f(x)$



Ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

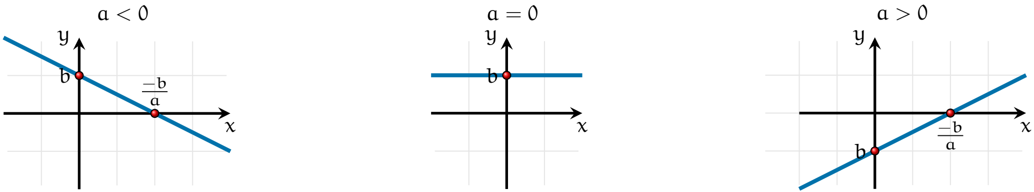
Considérons deux droites de pentes a_1 et a_2 respectivement.

- Elle sont parallèles ssi $a_1 = a_2$
- Elle sont orthogonales ssi $a_1 a_2 = -1$

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f\colon x \mapsto ax + b$ est la fonction affine de pente (ou coefficient directeur) a et d'ordonnée à l'origine b.
- Si $b = 0$ c'est une fonction linéaire (le graphe passe par $(0,0)$).
- Si $a = 0$ c'est une fonction constante.
- Les droites verticales (d'équation $x = \kappa$) ne sont pas des fonctions $x \mapsto f(x)$



Ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Considérons deux droites de pentes a_1 et a_2 respectivement.

- Elle sont parallèles ssi $a_1 = a_2$
- Elle sont orthogonales ssi $a_1 a_2 = -1$

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Droite par deux points

Si le graphe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ passe par deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 \neq x_2$, alors

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

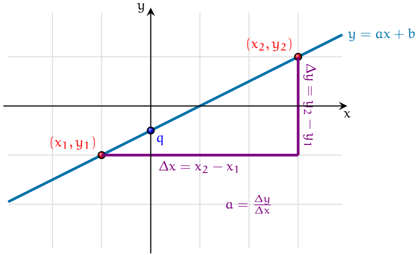
donc

$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$$

ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1) + y_1 \\ &= a(x - x_2) + y_2 \end{aligned}}$$



Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Droite par deux points

Si le graphe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ passe par deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 \neq x_2$, alors

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

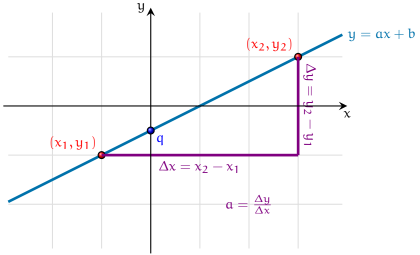
donc

$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$$

ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1) + y_1 \\ &= a(x - x_2) + y_2 \end{aligned}}$$



Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Testez-vous

Une température de $0\,°C$ correspond à $32\,°F$ tandis que $100\,°C$ correspondent à $212\,°F$.

La formule permettant la conversion d'une valeur numérique de la température en (°C) vers l'unité (°F) est affine.

1. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa.
2. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ?
3. Que vaut $5\,°C$ en degré Fahrenheit ?
4. Que vaut le zéro absolu ($-273.15\,°C$) en degré Fahrenheit ? (ne pas utiliser de calculatrice)

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212

2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F :

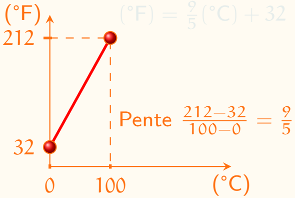
$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212



2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F :

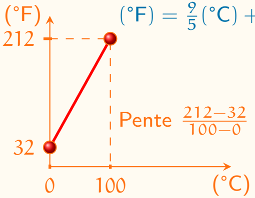
$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212



$(°F) = \frac{9}{5}(°C) + 32$

Pente $\frac{212-32}{100-0} = \frac{9}{5}$

$(°C) = \frac{(°F)-32}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}(°F) - \frac{160}{9}$

2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F :

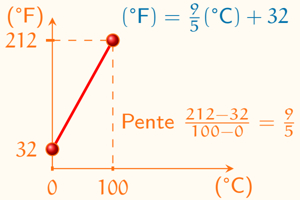
$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

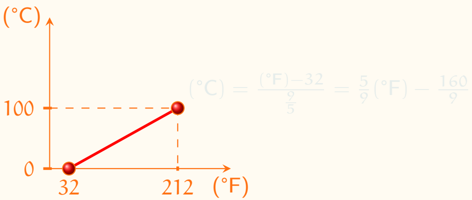
Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212





2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F :

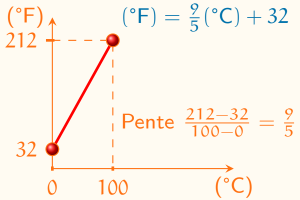
$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

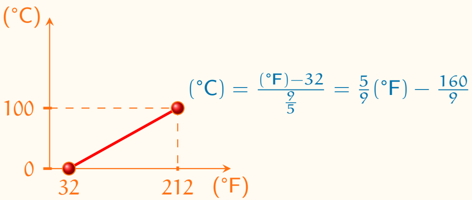
Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212





2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F :

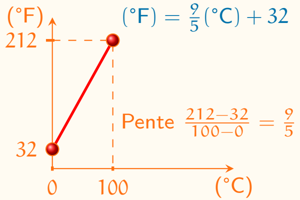
$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

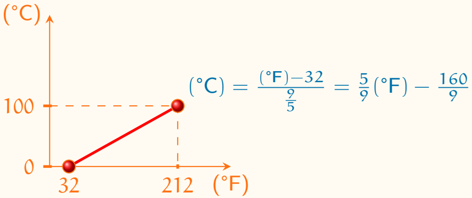
Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212





2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F :

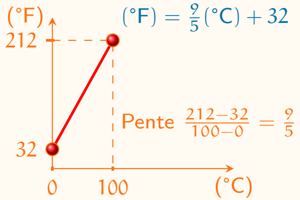
$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

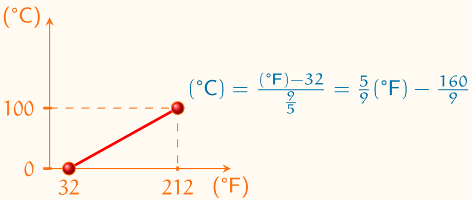
Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212





2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. -273.15 °C correspondent à -459.67 °F :

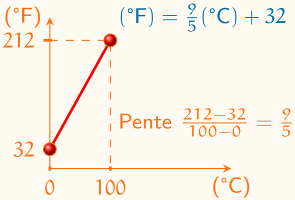
$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

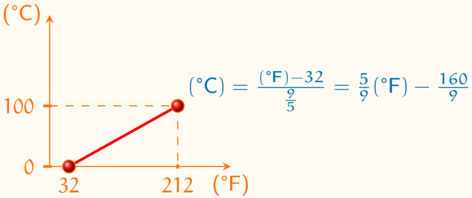
Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Correction

1. Données du problème :

(°C)	0	100
(°F)	32	212





2. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius.

3. 5 °C correspondent à $\frac{9}{5}5 + 32 = 41$ °F

4. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F :

$$\frac{9}{5} \times (-273.15) + 32 = 2 \times (-273.15) + \frac{273.15}{5} + 32 = -546.30 + 54.63 + 32 = -546.30 + 86.63 = -459.67$$

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Grandeurs proportionnelles : $b = 0$

Fonction linéaire : fonction affine avec l'ordonnée à l'origine nulle :

$$f \colon x \mapsto ax$$

Deux grandeurs sont (directement) proportionnelles quand il existe un unique coefficient multiplicateur qui permet d'obtenir une des grandeurs en multipliant l'autre par ce nombre, *i.e.* il existe un coefficient unique (noté ici a) qui permet de multiplier une des grandeur (notée ici x) pour obtenir l'autre grandeur (notée ici y) :

$$y = ax$$

Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$

Grandeurs proportionnelles : $b = 0$

Exemple

Le pouce est une unité du système impérial britanique sont symbole est " ou in. Cette unité est souvent utilisé pour mesurer la diagonale des écrans des téléphones, tablettes et ordinateurs. On sait que 1" $= 2.54\,\text{cm}$.

"	0	1	2	3	5	8	10	20	30	50	100
cm	0	2.54	5.08	7.62	12.7	20.32	25.4	50.8	76.2	127	254

Ces deux grandeurs sont proportionnelles puisqu'il existe un coefficient multiplicateur unique : $a = 2.54$ qui permet d'obtenir la mesure en centimètres en multipliant la mesure en pouces.

Exemple

Les mesures en Celsius et en Fahrenheit ne sont pas proportionnelles : on ne passe pas des Celsius au Kelvin ou au Fahrenheit en multipliant par un nombre constant.

2. Fonctions usuelles et propriétés

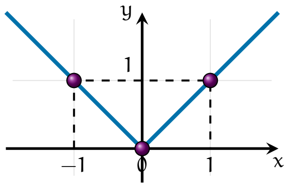
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

La fonction valeur absolue de x est définie par

$$\text{abs}\colon x \mapsto \text{abs}(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x| = \max\{\, x, -x \,\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple

- $\text{abs}(5) = |+5| = 5$
- $\text{abs}(-3) = |-3| = 3$



Ensemble de définition $\mathcal{D}_{\text{abs}} = \mathbb{R}$

Rappels

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|a| = 0$ ssi $a = 0$
2. $|a| = |-a| \geq 0$
3. $|ab| = |a|\,|b|$
4. $|a| = |b|$ ssi $(a = b$ ou $a = -b)$
5. $\sqrt{a^2} = |a|$
6. $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalités triangulaires)

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Exemple

Tracer le graphe de

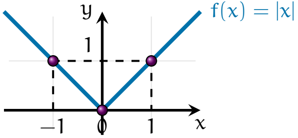
$$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

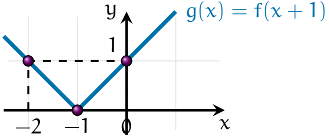
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Exemple

Tracer le graphe de

$$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x < -1 \end{cases}$$



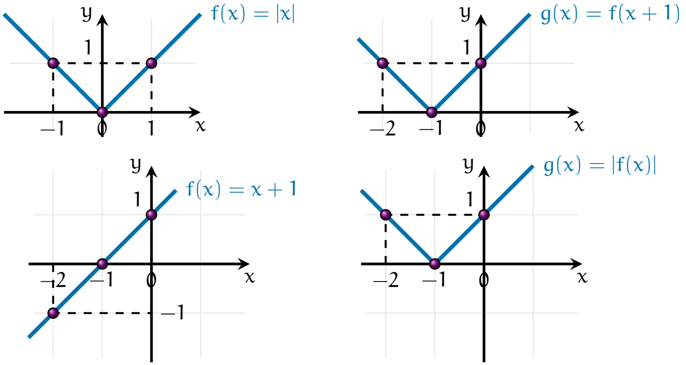


La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Exemple

Tracer le graphe de

$$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

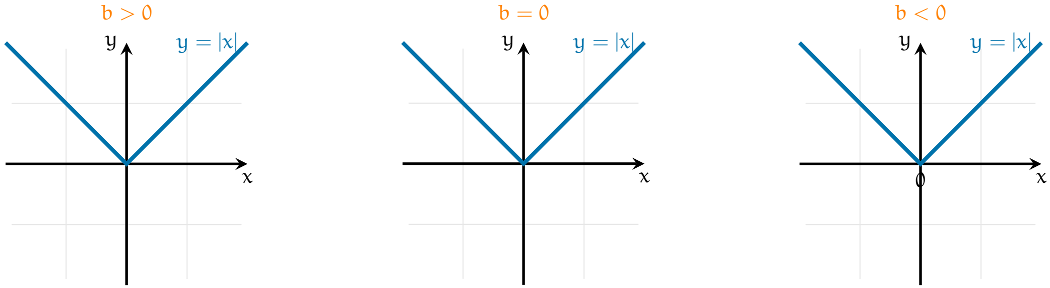


La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

Résoudre $|x| = b$ avec $b \in \mathbb{R}$.

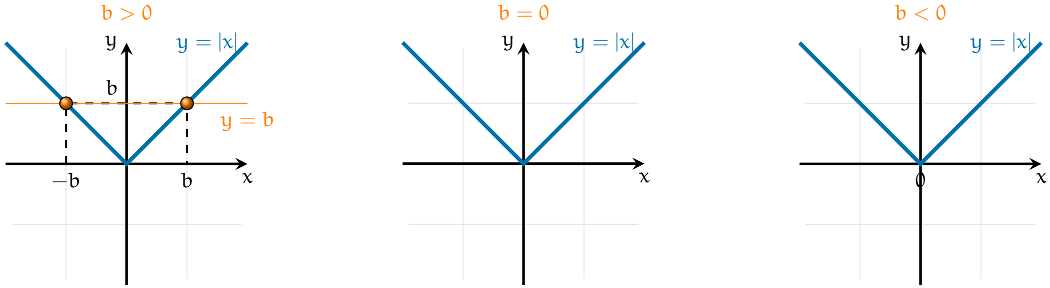


La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

Résoudre $|x| = b$ avec $b \in \mathbb{R}$.



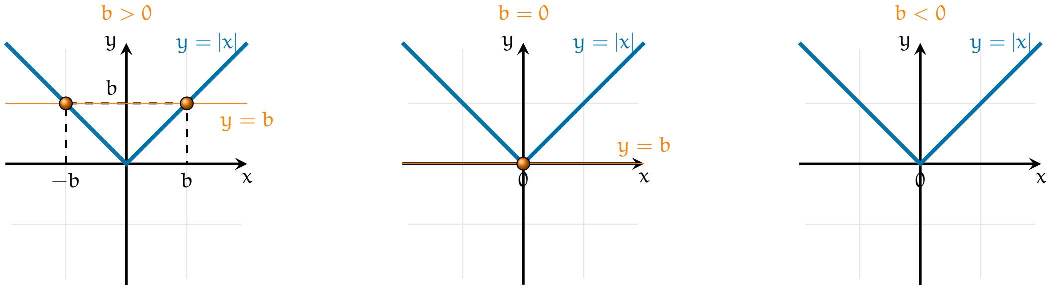
$x = -b$ et $x = b$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

Résoudre $|x| = b$ avec $b \in \mathbb{R}$.



$x = -b$ et $x = b$

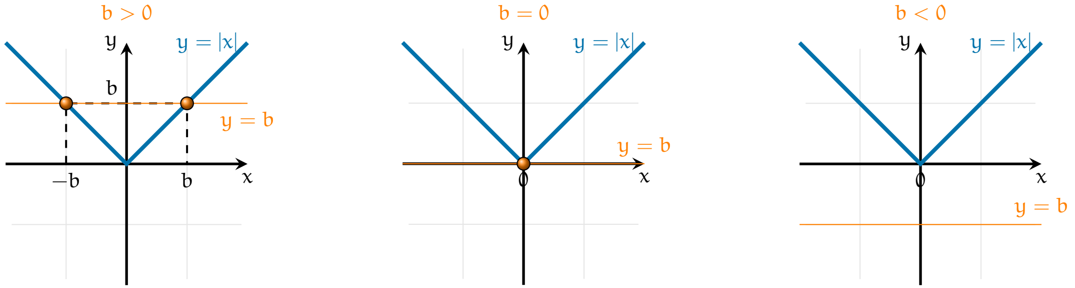
$x = 0$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

Résoudre $|x| = b$ avec $b \in \mathbb{R}$.



$x = -b$ et $x = b$

$x = 0$

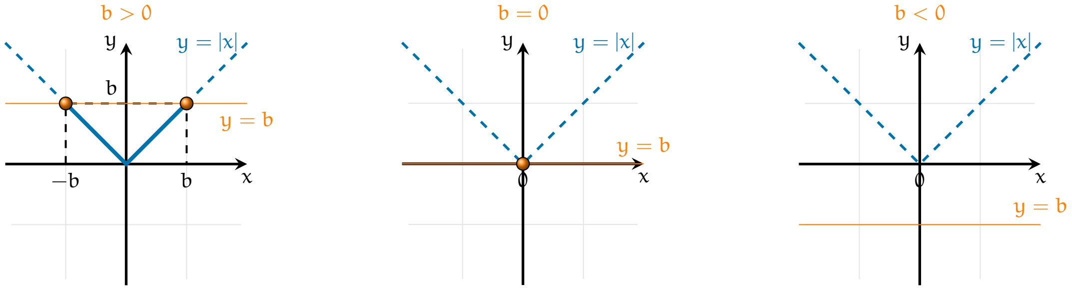
Aucune solution

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

Résoudre $|x| \leq b$ avec $b \in \mathbb{R}$.



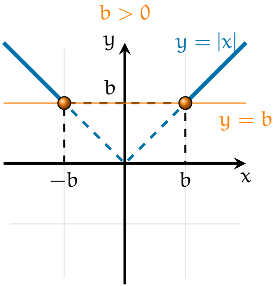
$-b \leq x \leq b$ $\qquad$ $x = 0$ $\qquad$ Aucune solution

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

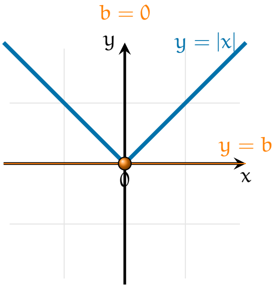
Équations et inégalités

Exemple

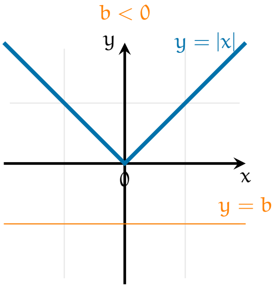
Résoudre $|x| \geq b$ avec $b \in \mathbb{R}$.



$x \leq -b$ ou $x \geq b$



$x \in \mathbb{R}$



$x \in \mathbb{R}$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Testez-vous

$$|x-1| \leq \frac{3}{2}$$

Testez-vous

$$|x^2-1| \leq 1$$

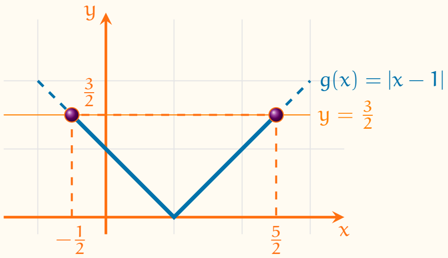
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Testez-vous

$$|x-1| \leq \frac{3}{2}$$

Correction



$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

Testez-vous

$$|x^2-1| \leq 1$$

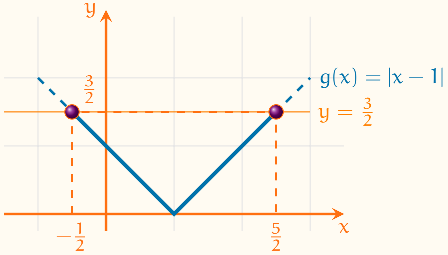
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Testez-vous

$$|x-1| \leq \frac{3}{2}$$

Correction

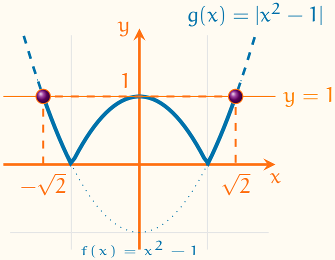


$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

Testez-vous

$$|x^2-1| \leq 1$$

Correction



$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

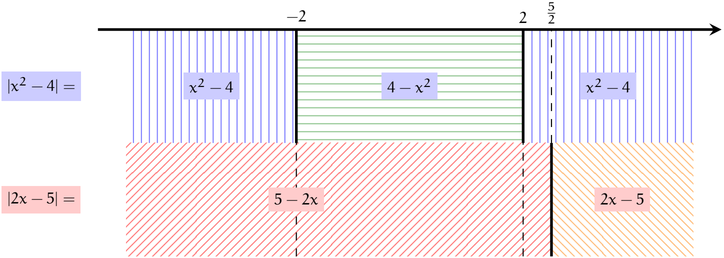
$$|x^2 - 4| = |2x - 5|$$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

$$|x^2 - 4| = |2x - 5|$$



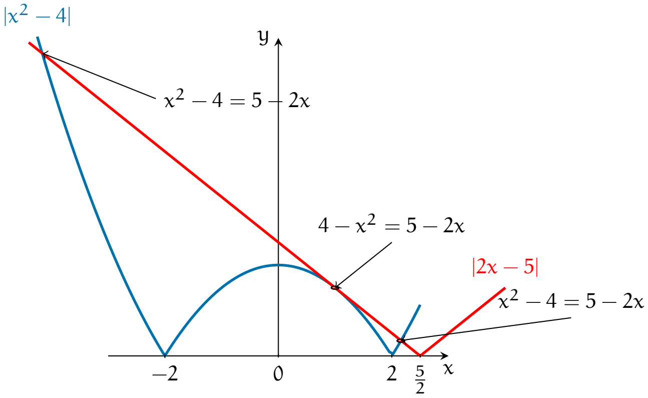
$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 - 4 = 5 - 2x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -2 < x \leq 2 \\ 4 - x^2 = 5 - 2x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 < x \leq \frac{5}{2} \\ x^2 - 4 = 5 - 2x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x^2 - 4 = 2x - 5 \end{cases}$$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Équations et inégalités

Exemple

$$|x^2 - 4| = |2x - 5|$$



La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Testez-vous

$$|2x - 4| \leq |x + 2|$$

Testez-vous

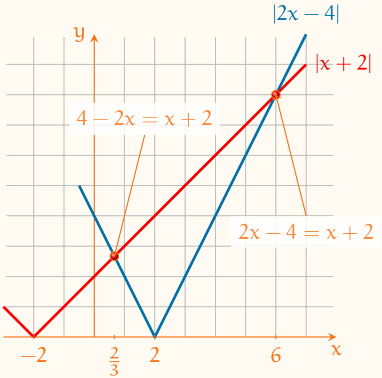
$$|x + 3| \leq 5$$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Testez-vous

$$|2x-4| \leq |x+2|$$

Correction



Testez-vous

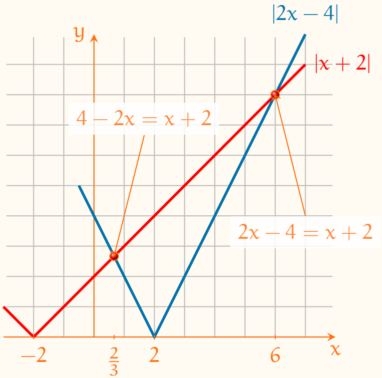
$$|x+3| \leq 5$$

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Testez-vous

$$|2x-4| \leq |x+2|$$

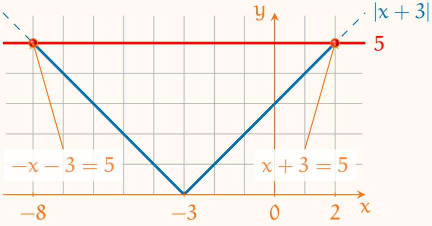
Correction



Testez-vous

$$|x+3| \leq 5$$

Correction



$$-8 \leq x \leq 2$$

2. Fonctions usuelles et propriétés

Les fonctions puissances entières

In "real life"

Lorsqu'on lance un objet en l'air, hormis le cas où il a été lancé rigoureusement à la verticale vers le haut, sa trajectoire est une courbe que l'on peut assimiler à une parabole.
Par exemple, le tir d'un projectile décrit une trajectoire quasi-parabolique.

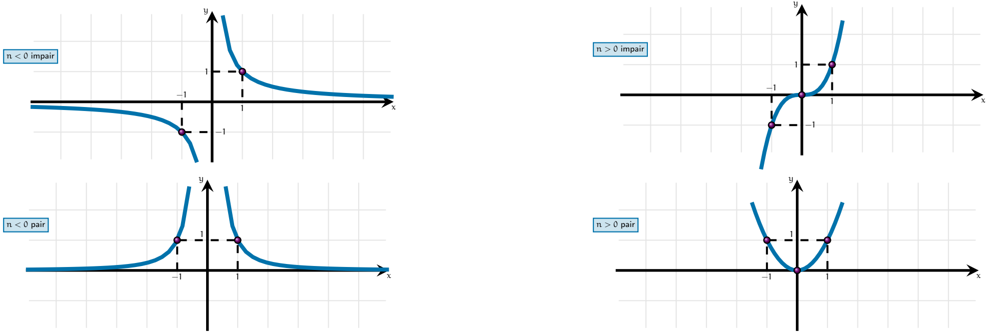
Les fonctions puissances entières

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction “puissance n” est définie par

$$f\colon x \mapsto x^n.$$

Ensemble de définition

$$\mathcal{D}_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geq 0, \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0. \end{cases}$$



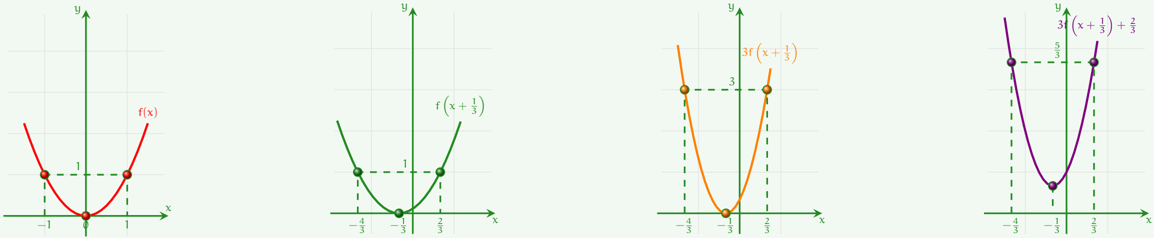
Les fonctions puissances entières

$n = 2$: Paraboles

$$g(x) = ax^2 + bx + c = a(x+\mathcal{B})^2 + \mathcal{C} \qquad \text{avec} \begin{cases} \mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \frac{b}{2a}, \\ \mathcal{C} \overset{\text{def}}{=} -\frac{b^2-4ac}{4a} = c - \frac{b^2}{4a} \end{cases}$$

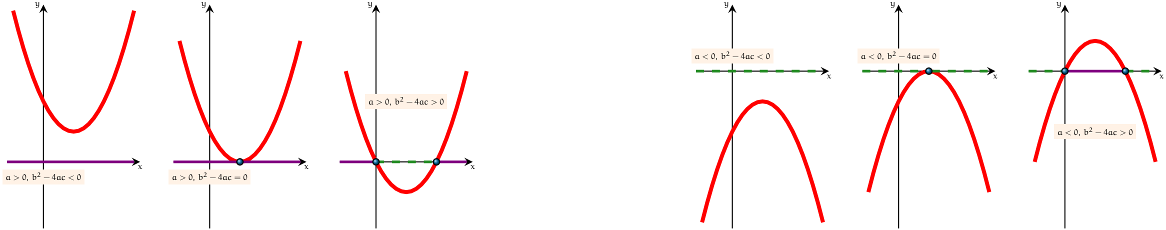
$$\begin{array}{cccccccccc} g : \mathbb{R} & \xrightarrow{t_{\mathcal{B}}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_a} & \mathbb{R} & \xrightarrow{t_{\mathcal{C}}} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \mathcal{B} & \longmapsto & (x+\mathcal{B})^2 & \longmapsto & a\,(x+\mathcal{B})^2 & \longmapsto & \mathcal{C} + a\,(x+\mathcal{B})^2 \end{array}$$

Exemple $\left(f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right)$



Rappels

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } x_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



- les cercles bleu représentent les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- en violet on a les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c > 0$;
- en vert pointillé les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$.

Les fonctions puissances entières

$n = 2$: Paraboles

Rappels

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } \begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 \cdot x_2 = c/a \end{cases}$$

Testez-vous

Sans utiliser la formule du discriminant, calculer les solutions de

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$
2. $x^2 - x - 2 = 0$
3. $x^2 + x - 2 = 0$
4. $x^2 + 3x + 2 = 0$

Correction

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$
3. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$
4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = -2$

Les fonctions puissances entières

$n = 2$: Paraboles

Rappels

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } \begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 \cdot x_2 = c/a \end{cases}$$

Testez-vous

Sans utiliser la formule du discriminant, calculer les solutions de

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$
2. $x^2 - x - 2 = 0$
3. $x^2 + x - 2 = 0$
4. $x^2 + 3x + 2 = 0$

Correction

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$
3. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$
4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = -2$

Les fonctions puissances entières

$n = -1$: Hyperboles

$$\boxed{g(x) = \frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)\frac{1}{x+d} = a + (b-ad)f(x+d) \qquad \text{avec } f(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} g: \mathbb{R} & \xrightarrow{t_d} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_{b-ad}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{t_a} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + d & \longmapsto & f(x+d) & \longmapsto & (b-ad)f(x+d) & \longmapsto & a + (b-ad)f(x+d) \end{array}$$

Exemple ($f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x+3}{x+1} = 1 + 2\frac{1}{x+1}$)

Les fonctions puissances entières

$n = -1$: Hyperboles

$$\boxed{g(x) = \frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)\frac{1}{x+d} = a + (b-ad)f(x+d) \qquad \text{avec } f(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} g: \mathbb{R} & \xrightarrow{t_d} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_{b-ad}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{t_a} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + d & \longmapsto & f(x+d) & \longmapsto & (b-ad)f(x+d) & \longmapsto & a + (b-ad)f(x+d) \end{array}$$

Exemple $\left(f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{x+3}{x+1} = 1 + 2\frac{1}{x+1}\right)$

$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $x \mapsto f(x+1)$ $\qquad$ $x \mapsto 2f(x+1)$ $\qquad$ $x \mapsto 1 + 2f(x+1)$

Les fonctions puissances entières

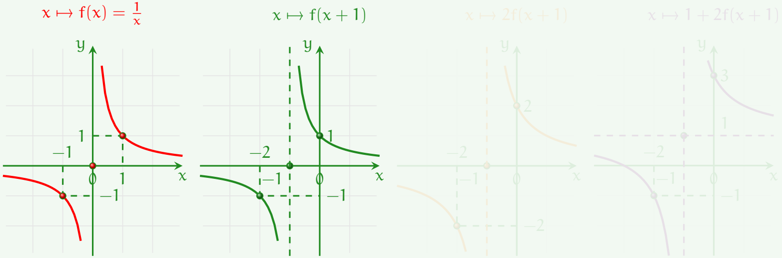
$n = -1$: Hyperboles

$$\boxed{g(x) = \frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)\frac{1}{x+d} = a + (b-ad)f(x+d) \qquad \text{avec } f(x) = \frac{1}{x}}$$

$$g : \mathbb{R} \xrightarrow{t_d} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{d_{b-ad}} \mathbb{R} \xrightarrow{t_a} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x + d \longmapsto f(x+d) \longmapsto (b-ad)f(x+d) \longmapsto a + (b-ad)f(x+d)$$

Exemple $\left(f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{x+3}{x+1} = 1 + 2\frac{1}{x+1}\right)$



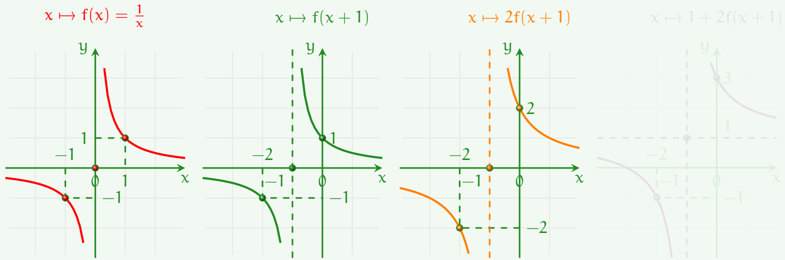
Les fonctions puissances entières

$n = -1$: Hyperboles

$$\boxed{g(x) = \frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)\frac{1}{x+d} = a + (b-ad)f(x+d) \qquad \text{avec } f(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} g: \mathbb{R} & \xrightarrow{t_d} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_{b-ad}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{t_a} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+d & \longmapsto & f(x+d) & \longmapsto & (b-ad)f(x+d) & \longmapsto & a+(b-ad)f(x+d) \end{array}$$

Exemple $\left(f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{x+3}{x+1} = 1 + 2\frac{1}{x+1}\right)$



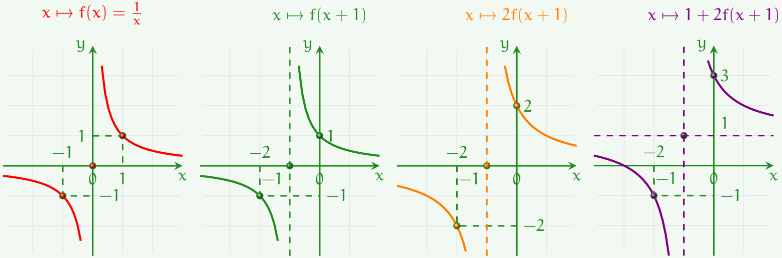
Les fonctions puissances entières

$n = -1$: Hyperboles

$$\boxed{g(x) = \frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)\frac{1}{x+d} = a + (b-ad)f(x+d) \qquad \text{avec } f(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} g: \mathbb{R} & \xrightarrow{t_d} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_{b-ad}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{t_a} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+d & \longmapsto & f(x+d) & \longmapsto & (b-ad)f(x+d) & \longmapsto & a+(b-ad)f(x+d) \end{array}$$

Exemple $\left(f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{x+3}{x+1} = 1 + 2\frac{1}{x+1}\right)$



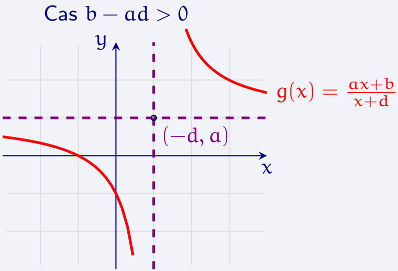
Les fonctions puissances entières

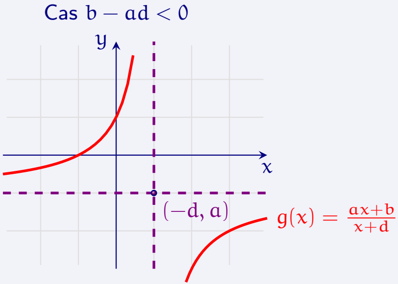
$n = -1$: Hyperboles

Rappels

$$g(x) = \frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)f(x+d)$$

Hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-d, a)$.





Les fonctions puissances entières

Loi de Wien

Testez-vous

En étudiant le rayonnement de corps de nombreux objets à différentes températures, Wilhelm Wien a remarqué que $\lambda_{\max}$, la longueur d'onde correspondante au maximum de rayonnement, est inversement proportionnelle à T, la température du corps noir :

$$\lambda_{\max}(T) = \frac{\sigma_W}{T}$$

où $\sigma_W = 2.898 \times 10^{-3}$ m K est une constante.
Calculer $\lambda_{\max}$ pour les objets suivants :

- Étoile de type O : $T = 50\,000$ K
- Soleil : $T = 6000$ K
- Terre : $T = 300$ K
- Nuage moléculaire : $T = 20$ K
- Fond cosmologique : $T = 3$ K

Correction

- Étoile de type O : $\lambda_{\max} = \frac{2.898}{5} 10^{-7}$m
- Soleil : $\lambda_{\max} = \frac{2.898}{5} 10^{-6}$m
- Terre : $\lambda_{\max} = \frac{2.898}{3} 10^{-5}$m
- Nuage moléculaire : $\lambda_{\max} = \frac{2.898}{2} 10^{-4}$m
- Fond cosmologique : $\lambda_{\max} = \frac{2.898}{3} 10^{-3}$m

Les fonctions puissances entières

Loi de Wien

Testez-vous

En étudiant le rayonnement de corps de nombreux objets à différentes températures, Wilhelm Wien a remarqué que λ_{max}, la longueur d'onde correspondante au maximum de rayonnement, est inversement proportionnelle à T, la température du corps noir :

$$\lambda_{max}(T) = \frac{\sigma_W}{T}$$

où $\sigma_W = 2.898 \times 10^{-3}$ m K est une constante.
Calculer λ_{max} pour les objets suivants :

- Étoile de type O : $T = 50\,000$ K
- Soleil : $T = 6000$ K
- Terre : $T = 300$ K
- Nuage moléculaire : $T = 20$ K
- Fond cosmologique : $T = 3$ K

Correction

- Étoile de type O : $\lambda_{max} = \frac{2.898}{5} 10^{-7}$m
- Soleil : $\lambda_{max} = \frac{2.898}{5} 10^{-6}$m
- Terre : $\lambda_{max} = \frac{2.898}{3} 10^{-5}$m
- Nuage moléculaire : $\lambda_{max} = \frac{2.898}{2} 10^{-4}$m
- Fond cosmologique : $\lambda_{max} = \frac{2.898}{3} 10^{-3}$m

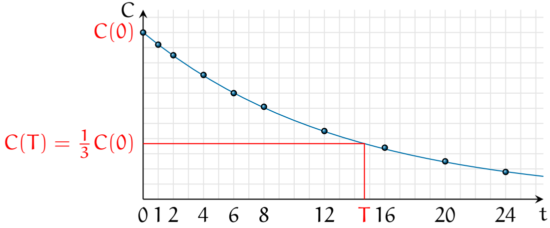
2. Fonctions usuelles et propriétés

Les fonctions exp et ln

In "real life"

On injecte un médicament à un malade (ici une dose de 200 mL). Un dosage de concentration est effectué à divers instants (l'instant $t = 0$ correspond à la fin de l'injection). On désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. Après l'injection, la concentration suit les valeurs données dans le tableau ci-dessous (t en heures et C en mg/ml). Si la concentration C suit la loi exponentielle $C(t) = 11e^{-\gamma t}$, avec $\gamma = 75 \times 10^{-3}$, après combien de temps la concentration n'est plus qu'un tiers que celle à l'instant t_0 ?

t [h]	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
C $[\mathrm{mg\,mL^{-1}}]$	11	10.2	9.5	8.2	7.0	6.1	4.5	3.4	2.5	1.8



$$C(T) = \frac{1}{3}C(0)$$
ssi
$$T = \frac{1}{\gamma}\ln(3) \simeq 14.65\,\mathrm{h}$$

On peut même montrer que $C(t_0 + T) = \frac{1}{3}C(t_0)$ pour tout t_0

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle $\exp(x)$ est définie par

$$f\colon x \mapsto \exp(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Ensemble de définition

$$\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$$

Le nombre d'Euler est le réel noté e et déterminé par

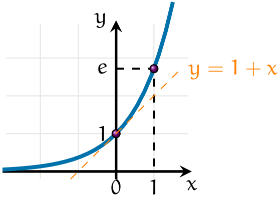
$$e \overset{\text{def}}{=} \exp(1) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,4$$

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e$
- $\exp(x) > 0$
- $\exp(x) \geq 1 + x$

Propriétés

$\exp(x) = e^x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *donc*

1. $\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y)$
2. $(\exp(x))^n = (e^x)^n = e^{nx} = \exp(nx)$



Donc $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ et $\dfrac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$

La fonction exponentielle

Rappels : propriétés des puissances

Rappels

$$a^0 = 1, \quad a^{-c} = \frac{1}{a^c}, \quad \underbrace{a^b \cdot a^c}_{\text{Même base}} = a^{b+c}, \quad \underbrace{a^c \cdot b^c}_{\text{Même puissance}} = (ab)^c, \quad \underbrace{\left(a^b\right)^c}_{\text{Puissance de puissance}} = a^{bc}.$$

On en déduit que $\dfrac{a^b}{a^c} = a^b \cdot \dfrac{1}{a^c} = a^b \cdot a^{-c} = a^{b-c}$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \left(a \cdot \dfrac{1}{b}\right)^c = a^c \cdot \dfrac{1}{b^c} = \dfrac{a^c}{b^c}$.

Rappels

$$c^{a/b} = \sqrt[b]{c^a}$$

2. Fonctions usuelles et propriétés

La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien

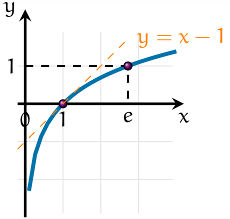
$$f\colon x \mapsto \ln(x)$$

est la fonction inverse de la fonction exp, *i.e.*

$$y = \ln(x) \iff x = \exp(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Ensemble de définition

$$\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$$



- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(x) \leq x - 1$

Propriétés

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln(x^n) = n\ln(|x|)$

Par conséquent $\ln(1/x) = -\ln(x)$ et $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x+\ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit :
   $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3\times 2 + 2\times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit :
   $y = \exp(3\ln(2x)+c) = \exp(\ln((2x)^3)+c) = \exp(\ln((2x)^3)) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit :
   $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3 \times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x + \ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit :
   $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3 \times 2 + 2 \times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit :
   $y = \exp(3\ln(2x) + c) = \exp(\ln((2x)^3) + c) = \exp(\ln((2x)^3) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit :
   $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3 \times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x+\ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit : $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3\times 2 + 2\times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit : $y = \exp(3\ln(2x)+c) = \exp(\ln((2x)^3)+c) = \exp(\ln((2x)^3)) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit : $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3\times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x + \ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit :
   $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3 \times 2 + 2 \times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit :
   $y = \exp(3\ln(2x) + c) = \exp(\ln((2x)^3) + c) = \exp(\ln((2x)^3)) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit :
   $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3 \times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x + \ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit :
   $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3 \times 2 + 2 \times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit :
   $y = \exp(3\ln(2x) + c) = \exp(\ln((2x)^3) + c) = \exp(\ln((2x)^3) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit :
   $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3 \times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x + \ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit :
   $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3 \times 2 + 2 \times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit :
   $y = \exp(3\ln(2x) + c) = \exp(\ln((2x)^3) + c) = \exp(\ln((2x)^3) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit :
   $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3 \times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x + \ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit :
   $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3 \times 2 + 2 \times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit :
   $y = \exp(3\ln(2x) + c) = \exp(\ln((2x)^3) + c) = \exp(\ln((2x)^3) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit :
   $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3 \times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T - T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Exemple

1. $\exp(3\ln(2)) = \exp(\ln(2^3)) = 2^3 = 8$
2. $\exp(x + \ln(2)) = e^x e^{\ln(2)} = 2e^x$
3. $\exp(\ln(x) - 2\ln(y)) = \frac{\exp(\ln(x))}{\exp(2\ln(y))} = \frac{x}{\exp(\ln(y^2))} = \frac{x}{y^2}$
4. Si $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 5$, on peut calculer $\ln(x^3y^2)$ comme suit :
   $\ln(x^3y^2) = \ln(x^3) + \ln(y^2) = 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3 \times 2 + 2 \times 5 = 16$
5. Si $\ln(y) = 3\ln(2x) + c$, on peut calculer y comme suit :
   $y = \exp(3\ln(2x) + c) = \exp(\ln((2x)^3) + c) = \exp(\ln((2x)^3) \times e^c = (2x)^3 \times e^c$
6. Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$, on peut calculer e^{x+2y} comme suit :
   $e^{x+2y} = e^x \times (e^y)^2 = e^{\ln(3)} \times (e^{\ln(4)})^2 = 3 \times 4^2 = 48$
7. Si $T = T_0 + T_1 e^{-kt}$ alors $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1}\right)$
8. Si $y = a^x$ alors $\ln(y) = x\ln(a)$ donc $y = \exp(x\ln(a))$

La fonction logarithme népérien

Testez-vous

Si $\ln(s) = 2$ et $\ln(t) = 3$, calculer

1. $\ln(st)$
2. $\ln(st^2)$
3. $\ln(\sqrt{st})$
4. $\ln\left(\frac{s}{t}\right)$
5. $\ln\left(\frac{s}{t^3}\right)$

Testez-vous

Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(5)$, calculer

1. $e^x + e^y$
2. e^{x+y}
3. e^{2x}

La fonction logarithme népérien

Testez-vous

Si $\ln(s) = 2$ et $\ln(t) = 3$, calculer

1. $\ln(st)$
2. $\ln(st^2)$
3. $\ln(\sqrt{st})$
4. $\ln\left(\frac{s}{t}\right)$
5. $\ln\left(\frac{s}{t^3}\right)$

Correction

1. $\ln(s) + \ln(t) = 5$
2. $\ln(s) + 2\ln(t) = 8$
3. $\ln((st)^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(st) = \frac{5}{2}$
4. $\ln(s \times t^{-1}) = \ln(s) - \ln(t) = -1$
5. $\ln(s \times t^{-3}) = \ln(s) - 3\ln(t) = -7$

Testez-vous

Si $x = \ln(3)$ et $y = \ln(5)$, calculer

1. $e^x + e^y$
2. e^{x+y}
3. e^{2x}

Correction

1. $e^x + e^y = 3 + 5 = 8$
2. $e^{x+y} = e^x e^y = e^{\ln(3)} e^{\ln(5)} = 3 \times 5 = 15$
   mais aussi
   $e^{x+y} = e^{\ln(3)+\ln(5)} = e^{\ln(3\times 5)} = e^{\ln(15)} = 15$
3. $e^{2x} = (e^x)^2 = 3^2 = 9$

La fonction logarithme népérien

Testez-vous

L'équation d'Arrhenius décrit la relation entre la température T et la constante de réaction C d'une réaction chimique :

$$C = A\exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right).$$

Ici E_a est l'énergie d'activation, $R \simeq 8.31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol}$ est la constante des gaz parfaits et A est le préfacteur exponentiel.

1. Exprimer T en fonction des autres paramètres
2. Évaluer la valeur de T lorsque $E_a = 52\mathrm{kJ\,mol^{-1}}$, $A = 1$ et $C = 5.29\times10^{-12}$

Correction

1. $T = \dfrac{E_a}{R\ln\left(\frac{A}{C}\right)}$
2. $T = \dfrac{52\times10^3}{8.31\ln\left(\frac{1}{5.29\times10^{-12}}\right)} = \dfrac{\frac{52\times10^3}{8.31}}{12\ln(10)-\ln(5.29)} \simeq 241\mathrm{K} = -32.15°\mathrm{C}$

La fonction logarithme népérien

Testez-vous

L'équation d'Arrhenius décrit la relation entre la température T et la constante de réaction C d'une réaction chimique :

$$C = A\exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right).$$

Ici E_a est l'énergie d'activation, $R \simeq 8.31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol}$ est la constante des gaz parfaits et A est le préfacteur exponentiel.

1. Exprimer T en fonction des autres paramètres
2. Évaluer la valeur de T lorsque $E_a = 52\mathrm{kJ\,mol^{-1}}$, $A = 1$ et $C = 5.29 \times 10^{-12}$

Correction

1. $T = \dfrac{E_a}{R\ln\left(\frac{A}{C}\right)}$
2. $T = \dfrac{52 \times 10^3}{8.31\ln\left(\frac{1}{5.29\times10^{-12}}\right)} = \dfrac{\frac{52\times10^3}{8.31}}{12\ln(10) - \ln(5.29)} \simeq 241\mathrm{K} = -32.15°\mathrm{C}$

2. Fonctions usuelles et propriétés

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

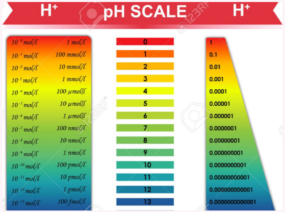
In "real life"

En chimie, on mesure l'acidité d'une solution liquide par son pH. Le pH d'une solution est défini par

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}([\mathrm{H}^+]) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln([\mathrm{H}^+])}{\ln(10)}$$

où $[\mathrm{H}^+]$ désigne la concentration molaire en ions H^+ (supposée faible).

Plus le pH d'une solution est faible, plus sa concentration en ions est élevée et plus la solution est acide ($\mathrm{pH} < 7$ solution acide, $\mathrm{pH} > 7$ solution basique).



In "real life"

En acoustique, on mesure l'intensité d'un son β en décibels (dB) :

$$\beta(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est la puissance acoustique du son (en $\mathrm{W\,m^{-2}}$) et I_0 est la plus faible puissance audible par un humain à une fréquence de 1kHz ($I_0 = 10^{-12}\mathrm{W\,m^{-2}}$) ainsi $\beta(I_0)$ est égale à 0dB. La gamme d'intensité perceptible à l'oreille humaine va de 0dB à 120dB qui correspond au seuil de douleur.

Origine du son	Intensité β (dB)
Limite de perception	0
Bruissement de feuilles	10
Chuchotement	20
Automobile	50
Conversation ordinaire	65
Marteau piqueur à 3m	90
Limite de la douleur	120

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

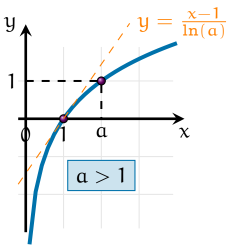
La fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) est définie par

$$f\colon x \mapsto \log_a(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Ensemble de définition

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$$

Le graphe de $\log_a$ s'obtient par dilatation/contraction verticale du graphe de ln d'un facteur $\frac{1}{\ln(a)}$



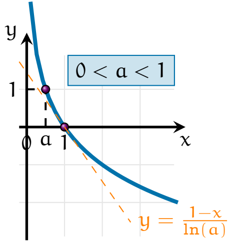
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

Propriétés

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(x^n) = n\log_a(|x|)$

Par conséquent

$$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x) = -\log_{1/a}(x) = -\log_a(1/x)$$



En informatique on utilise plutôt $a = 2$ tandis qu'en SVT, chimie, physique c'est plutôt $a = 10$.

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Testez-vous

Simplifier le plus possible :

1. $2\log_{10}(5) + \log_{10}(8) - \log_{10}(2)$
2. $3^{-\log_3(P)}$
3. $\ln(x^2) + \ln(y) - \ln(x) - \ln(y^2)$
4. $e^{2\ln(x)}$

Correction

1. $\log_{10}\left(\frac{5^2\times 8}{2}\right) = \log_{10}(100) = 2$
2. $3^{\log_3(P^{-1})} = P^{-1} = \frac{1}{P}$
3. $\ln\left(\frac{x^2y}{xy^2}\right) = \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
4. $e^{\ln(x^2)} = x^2$

Testez-vous

Calculer t en utilisant ln :

1. $5^t = 7$
2. $2 = (1.02)^t$
3. $7 \times 3^t = 5 \times 2^t$
4. $Q = Q_0 a^{nt}$
5. $3y = 1 + 2e^{4t}$

Correction

1. $t = \log_5(7) = \ln(7)/\ln(5)$
2. $t = \log_{1.02}(2) = \ln(2)/\ln(1.02)$
3. $\ln(7\times 3^t) = \ln(5\times 2^t) \implies \ln(7) + t\ln(3) = \ln(5) + t\ln(2)$ donc $t = \frac{\ln(5)-\ln(7)}{\ln(3)-\ln(2)} = \frac{\ln(5/7)}{\ln(3/2)}$
4. $(a^n)^t = \frac{Q}{Q_0} \implies t = \log_{a^n}\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right)/\ln(a^n) = \frac{\ln(Q)-\ln(Q_0)}{n\ln(a)}$
5. $t = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3y-1}{2}\right)$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Testez-vous

Simplifier le plus possible :

1. $2\log_{10}(5) + \log_{10}(8) - \log_{10}(2)$
2. $3^{-\log_3(P)}$
3. $\ln(x^2) + \ln(y) - \ln(x) - \ln(y^2)$
4. $e^{2\ln(x)}$

Correction

1. $\log_{10}\left(\frac{5^2\times 8}{2}\right) = \log_{10}(100) = 2$
2. $3^{\log_3(P^{-1})} = P^{-1} = \frac{1}{P}$
3. $\ln\left(\frac{x^2y}{xy^2}\right) = \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
4. $e^{\ln(x^2)} = x^2$

Testez-vous

Calculer t en utilisant ln :

1. $5^t = 7$
2. $2 = (1.02)^t$
3. $7 \times 3^t = 5 \times 2^t$
4. $Q = Q_0 a^{nt}$
5. $3y = 1 + 2e^{4t}$

Correction

1. $t = \log_5(7) = \ln(7)/\ln(5)$
2. $t = \log_{1.02}(2) = \ln(2)/\ln(1.02)$
3. $\ln(7\times 3^t) = \ln(5\times 2^t) \implies \ln(7) + t\ln(3) = \ln(5) + t\ln(2)$ donc $t = \frac{\ln(5)-\ln(7)}{\ln(3)-\ln(2)} = \frac{\ln(5/7)}{\ln(3/2)}$
4. $(a^n)^t = \frac{Q}{Q_0} \implies t = \log_{a^n}\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right)/\ln(a^n) = \frac{\ln(Q)-\ln(Q_0)}{n\ln(a)}$
5. $t = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3y-1}{2}\right)$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

(In)égalités logarithmiques

Soient $a > 0$, $a \neq 1$ et $b > 0$. Le logarithme de base a de b est la puissance à donner à a pour obtenir b :

$$\log_a(b) = c \iff a^c = b$$

On peut toujours se ramener au cas où l'inconnue n'apparaît qu'en argument du logarithme car $\log_x(a) = \frac{\ln a}{\ln(x)}$.

Rappels

Équation	Solution
$\log_a f(x) = c$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f(\log_a g(x)) = c$	Il faut $g(x) > 0$ On pose $t := \log_a g(x)$

On peut toujours se ramener à des inégalités de base plus grande que 1 car $\log_a(x) = -\log_{1/a} x$.

Rappels

Inéquation	Solution pour $a > 1$
$\log_a f(x) > c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$f(x) > g(x) > 0$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Exemple : mesure du pH

Testez-vous

Le pH d'une solution est défini par

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}([\mathrm{H}^+])$$

où $[\mathrm{H}^+]$ désigne la concentration molaire en ions H^+ (supposée faible).

1. Calculer (sans utiliser la calculatrice !) le pH d'une solution contenant une concentration d'ions hydrogènes donnée par les valeurs suivantes (en mol/L) :

$[\mathrm{H}^+]$	10^{-2}	10^{-3}	5×10^{-1}	0.0712
pH				

2. Nous disposons d'une solution de pH donnée. Quelle doit être la nouvelle concentration en ions d'hydrogènes pour augmenter cette valeur initiale du pH de 25% ?

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Exemple : mesure du pH

Correction

1. On pose $x = [H^+]$ et $y = \mathrm{pH}$, ainsi $y = -\log_{10}(x)$.

x	$y = -\log_{10}(x)$
10^{-2}	$-(-2) = 2$
10^{-3}	$-(-3) = 3$
5×10^{-1}	$-\left(\log_{10}(5) + \log_{10}(10^{-1})\right) = -\log_{10}(5) + 1 \approx 0.3$
$0.0712 = 7.12 \times 10^{-2}$	$-\left(\log_{10}(7.12) + \log_{10}(10^{-2})\right) = -\log_{10}(7.12) + 2 \approx 1.2$

En effet, $\log_{10}(5) > \log_{10}(1) = 0$ et $\log_{10}(5) < \log_{10}(10) = 1$, on prendra ≈ 0.7.
De même, $\log_{10}(7.12) > \log_{10}(5) \approx 0.7$ et $\log_{10}(7.12) < \log_{10}(10) = 1$, on prendra ≈ 0.8.

2. $y_{\text{new}} = y_{\text{old}} + 25\% y_{\text{old}} = \frac{125}{100} y_{\text{old}} = 1.25 y_{\text{old}}$ donc

$$\begin{aligned} -\log_{10}(x_{\text{new}}) = -1.25 \log_{10}(x_{\text{old}}) &\iff \log_{10}(x_{\text{new}}) - \log_{10}(x_{\text{old}}^{1.25}) = 0 \\ &\iff \log_{10}\left(\frac{x_{\text{new}}}{x_{\text{old}}^{1.25}}\right) = 0 \\ &\iff x_{\text{new}} = x_{\text{old}}^{1.25} \end{aligned}$$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Exemple : puissance sonore

En acoustique, on mesure l'intensité d'un son β en décibels (dB) :

$$\beta(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est la puissance acoustique du son (en $\mathrm{W\,m^{-2}}$) et I_0 est la plus faible puissance audible par un humain à une fréquence de 1 kHz ($I_0 = 10^{-12}\mathrm{W\,m^{-2}}$) ainsi $\beta(I_0)$ est égale à 0dB.

Testez-vous

Calculer l'intensité β de chaque son de puissance I :

$I(\mathrm{W\,m^{-2}})$	β (dB)
10^2	
1.0	
10^{-4}	
3.2×10^{-5}	

Correction

$I(\mathrm{W\,m^{-2}})$	β (dB)
10^2	140
1.0	120
10^{-4}	80
3.2×10^{-5}	$70 + 10\log_{10}(3.2) \approx 75$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Exemple : puissance sonore

En acoustique, on mesure l'intensité d'un son β en décibels (dB) :

$$\beta(I) = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est la puissance acoustique du son (en $\mathrm{W\,m^{-2}}$) et I_0 est la plus faible puissance audible par un humain à une fréquence de 1 kHz ($I_0 = 10^{-12}\mathrm{W\,m^{-2}}$) ainsi $\beta(I_0)$ est égale à 0dB.

Testez-vous

Calculer l'intensité β de chaque son de puissance I :

$I(\mathrm{W\,m^{-2}})$	β (dB)
10^2	
1.0	
10^{-4}	
3.2×10^{-5}	

Correction

$I(\mathrm{W\,m^{-2}})$	β (dB)
10^2	140
1.0	120
10^{-4}	80
3.2×10^{-5}	$70+10\log_{10}(3.2)\approx 75$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Exemple : puissance sonore

En acoustique, on mesure l'intensité d'un son β en décibels (dB) :

$$\beta(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est la puissance acoustique du son (en $\mathrm{W\,m^{-2}}$) et I_0 est la plus faible puissance audible par un humain à une fréquence de 1 kHz ($I_0 = 10^{-12}\mathrm{W\,m^{-2}}$) ainsi $\beta(I_0)$ est égale à 0dB.

Testez-vous

Calculer l'intensité β de chaque son de puissance I :

$I(\mathrm{W\,m^{-2}})$	β (dB)
10^2	
1.0	
10^{-4}	
3.2×10^{-5}	

Correction

$I(\mathrm{W\,m^{-2}})$	β (dB)
10^2	140
1.0	120
10^{-4}	80
3.2×10^{-5}	$70 + 10\log_{10}(3.2) \approx 75$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Exemple : puissance sonore

Testez-vous

Supposons que la puissance d'une écho soit égale à $\frac{2}{3}$ de la puissance du son original. Si chaque écho génère une autre écho, combien d'écho peut-on entendre à partir d'un son initial d'intensité 120dB sachant qu'en moyenne un homme n'entend que si l'intensité est supérieure à 10dB ?

Correction

La puissance initiale I a une intensité de 120dB donc $120 = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$. La puissance de la n-ième écho est $e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n I$ et son intensité

$$\begin{aligned}\beta(e_n) &= 10\log_{10}\left(\frac{e_n}{I_0}\right) = 10\log_{10}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{I}{I_0}\right)\\ &= 10\log_{10}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10n\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + 120\end{aligned}$$

On cherche n tel que $\beta(e_n) \geq 10$:

$$\beta(e_n) \geq 10 \iff \underbrace{n\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)}_{<0} \geq \frac{-110}{10} \iff n \leq -\frac{11}{\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 62.4$$

La fonction logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$

Exemple : puissance sonore

Testez-vous

Supposons que la puissance d'une écho soit égale à $\frac{2}{3}$ de la puissance du son original. Si chaque écho génère une autre écho, combien d'écho peut-on entendre à partir d'un son initial d'intensité 120dB sachant qu'en moyenne un homme n'entend que si l'intensité est supérieure à 10dB ?

Correction

La puissance initiale I a une intensité de 120dB donc $120 = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$. La puissance de la n-ième écho est $e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n I$ et son intensité

$$\begin{aligned}\beta(e_n) &= 10\log_{10}\left(\frac{e_n}{I_0}\right) = 10\log_{10}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{I}{I_0}\right)\\ &= 10\log_{10}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10n\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + 120\end{aligned}$$

On cherche n tel que $\beta(e_n) \geq 10$:

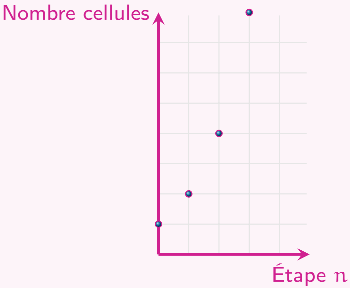
$$\beta(e_n) \geq 10 \iff n\underbrace{\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)}_{<0} \geq \frac{-110}{10} \iff n \leq -\frac{11}{\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 62.4$$

2. Fonctions usuelles et propriétés

La fonction exponentielle de base $a > 0$

In "real life"

Les cellules vivantes se multiplient en se divisant : une cellule se transforme en deux cellules lors d'une division cellulaire. Une boîte de Petri contenant une cellule initiale contiendra, au bout d'une division, deux cellules. Chacune des deux cellules va à nouveau se diviser : après une seconde étape de division, la boîte de Petri contiendra $2 \times 2 = 4$ cellules et ainsi de suite : après n étapes, la boîte contient 2^n cellules. La croissance de ce nombre de cellules est exponentielle.



La fonction exponentielle de base $a > 0$

La fonction exponentielle de base $a > 0$ est définie par

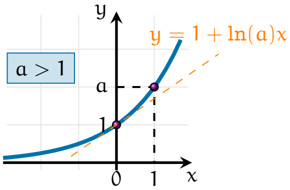
$$f\colon x \mapsto a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x \ln(a)).$$

et est la fonction inverse de la fonction $\log_a$, *i.e.*

$$y = a^x \iff x = \log_a(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

Ensemble de définition

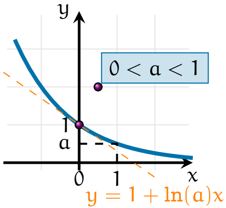
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$



- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^x > 0$

Propriétés

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $(a^x)^n = a^{nx} = (a^n)^x$



Par conséquent

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \text{ et } \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

La fonction exponentielle de base $a > 0$

Exemple

- Si $8 = x^3$ alors $x = 8^{1/3} = 2$
- Si $3 = \log_2(y)$ alors $y = 2^3 = 8$
- Si $2 = \log_{10}(y)$ alors $y = 10^2 = 100$
- Si $y = \log_2(16)$ alors, puisque $16 = 2^4$, $y = 4$

Testez-vous

Sans utiliser la calculatrice, établir qui est plus grand entre 3^{12} et 5^9.

Correction

$$\frac{3^{12}}{5^9} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^3 = \left(\frac{e^{\ln(3^4)}}{e^{\ln(5^3)}}\right)^3 = \left(e^{\ln(3^4)-\ln(5^3)}\right)^3 = \left(e^{\ln(81)-\ln(125)}\right)^3$$

$$= \exp\left(3\left(\underbrace{\ln(81)-\ln(125)}_{<0}\right)\right) < 1 \text{ donc } 3^{12} < 5^9.$$

La fonction exponentielle de base $a > 0$

Exemple

- Si $8 = x^3$ alors $x = 8^{1/3} = 2$
- Si $3 = \log_2(y)$ alors $y = 2^3 = 8$
- Si $2 = \log_{10}(y)$ alors $y = 10^2 = 100$
- Si $y = \log_2(16)$ alors, puisque $16 = 2^4$, $y = 4$

Testez-vous

Sans utiliser la calculatrice, établir qui est plus grand entre 3^{12} et 5^9.

Correction

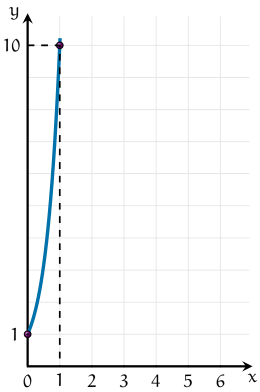
$$\frac{3^{12}}{5^9} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^3 = \left(\frac{e^{\ln(3^4)}}{e^{\ln(5^3)}}\right)^3 = \left(e^{\ln(3^4)-\ln(5^3)}\right)^3 = \left(e^{\ln(81)-\ln(125)}\right)^3$$

$$= \exp\left(3\left(\underbrace{\ln(81)-\ln(125)}_{<0}\right)\right) < 1 \text{ donc } 3^{12} < 5^9.$$

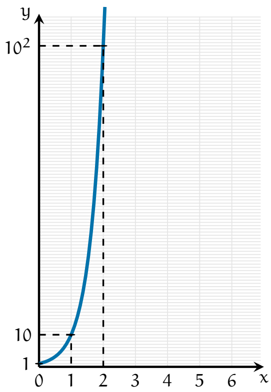
La fonction exponentielle de base $a > 0$

Échelles logarithmiques

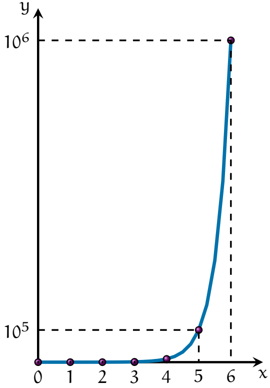
Comment représenter le graphe de la fonction $y = 10^x$ pour $x \in [0, 6]$?



Échelle en y = échelle en x
On ne voit pas toute la fonction !



Échelle en $y = \frac{1}{10}$ échelle en x
On ne voit pas encore toute la fonction !

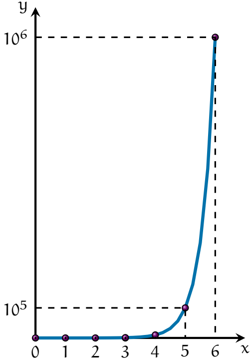


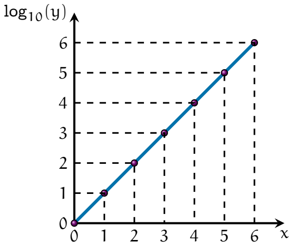
Échelle en $y = \frac{1}{10^6}$ échelle en x
On voit toute la fonction mais pour $x \in [0, 4]$ on a l'impression qu'elle ne varie pas alors qu'elle passe de 1 à 10000.

La fonction exponentielle de base $a > 0$

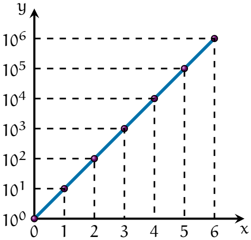
Échelles logarithmiques

Comment représenter le graphe de la fonction $y = 10^x$ pour $x \in [0, 6]$?





$\log_{10}(y) = \log_{10}(10^x) = x$



Échelles `semi-log-y` : non uniforme (mais correspond à une échelle uniforme des $\log_{10}$).

Attention à la lecture d'une échelle logarithmique !

Les graphiques à progression semi-logarithmique ne se lisent pas comme les graphiques à progression uniforme : la pente donne le rythme d'évolution et non la quantité.

Si sur le graphe `semi-log-y` on a une droite d'équation $ax + b$, cela signifie que $\log_{10}(y) = ax + b$ et donc que $y = 10^{ax+b} = c \times 10^{ax}$ avec $c = 10^b$.

La fonction exponentielle de base $a > 0$

Échelles logarithmiques

Testez-vous

La loi de Stefan-Boltzmann du rayonnement du corps noir relie l'émittance (ou exitance) M à la température T du corps noir selon la relation $M = \sigma T^4$, σ étant la constante de Stefan-Boltzmann. Après une prise de données, on veut tracer une représentation linéaire de cette relation. Pour cela, quel graphe faut-il tracer parmi les suivants ?

- M fonction de T^4
- M fonction de $\sqrt[4]{T}$
- M^4 fonction de T
- M fonction de $\log_4(T)$
- 4^M fonction de T

Correction

✓ Si $y = M$ et $x = T^4$ alors $y = M = \sigma T^4 = \sigma x$ qui est affine.

✗ Si $y = M$ et $x = \sqrt[4]{T}$ alors $T = x^4$ ainsi $y = M = \sigma T^4 = \sigma x^{16}$.

✗ Si $y = M^4$ et $x = T$ alors $y = M^4 = (\sigma T^4)^4 = \sigma^4 x^{16}$.

✗ Si $y = M$ et $x = \log_4(T)$ alors $T = 4^x$ ainsi $y = M = \sigma T^4 = \sigma (4^x)^4$.

✗ Si $y = 4^M$ et $x = T$ alors $y = 4^M = 4^{\sigma T^4} = (4^\sigma)^{x^4}$.

La fonction exponentielle de base $a > 0$

Échelles logarithmiques

Testez-vous

La loi de Stefan-Boltzmann du rayonnement du corps noir relie l'émittance (ou exitance) M à la température T du corps noir selon la relation $M = \sigma T^4$, σ étant la constante de Stefan-Boltzmann. Après une prise de données, on veut tracer une représentation linéaire de cette relation. Pour cela, quel graphe faut-il tracer parmi les suivants ?

- M fonction de T^4
- M fonction de $\sqrt[4]{T}$
- M^4 fonction de T
- M fonction de $\log_4(T)$
- 4^M fonction de T

Correction

✓ Si $y = M$ et $x = T^4$ alors $y = M = \sigma T^4 = \sigma x$ qui est affine.

✗ Si $y = M$ et $x = \sqrt[4]{T}$ alors $T = x^4$ ainsi $y = M = \sigma T^4 = \sigma x^{16}$.

✗ Si $y = M^4$ et $x = T$ alors $y = M^4 = (\sigma T^4)^4 = \sigma^4 x^{16}$.

✗ Si $y = M$ et $x = \log_4(T)$ alors $T = 4^x$ ainsi $y = M = \sigma T^4 = \sigma(4^x)^4$.

✗ Si $y = 4^M$ et $x = T$ alors $y = 4^M = 4^{\sigma T^4} = (4^\sigma)^{x^4}$.

2. Fonctions usuelles et propriétés

Les fonctions puissances réelles

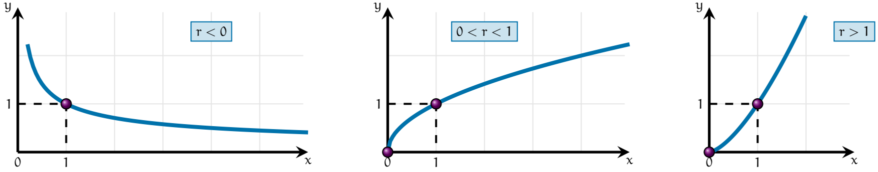
Soit $r \in \mathbb{R}$. La fonction “puissance r” est définie par

$$f\colon x \mapsto x^r = \exp(r\ln(x)).$$

Si $r > 0$ on définit conventionnellement $f(0) = 0$.

Ensemble de définition

$$\mathcal{D}_f = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } r \geq 0, \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } r < 0. \end{cases}$$



Composition

Soit $r \in \mathbb{R}$. La fonction “$g(x)$ puissance $h(x)$” est définie par

$$f\colon x \mapsto (g(x))^{h(x)} = \exp\left(h(x)\ln\left(g(x)\right)\right)$$

Ensemble de définition

$$\mathcal{D}_f = \{\, x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h \mid g(x) > 0 \,\}$$

Les fonctions puissances réelles

(In)égalités irrationnelles

Rappels

Si $n \in \mathbb{N}$ impaire alors

- $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$ ssi $(A(x))^n = B(x)$
- $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$ ssi $(A(x))^n > B(x)$
- $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$ ssi $(A(x))^n < B(x)$

Si $n \in \mathbb{N}$ pair alors

- $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$ ssi $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n = B(x) \end{cases}$
- $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$ ssi $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ (A(x))^n > B(x) \end{cases}$
- $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$ ssi $\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n < B(x) \end{cases}$

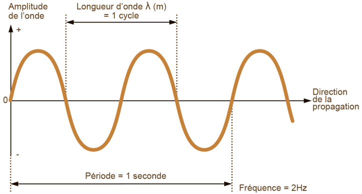
2. Fonctions usuelles et propriétés

Les fonctions trigonométriques

In "real life"

Un séisme est un événement géologique au cours duquel des contraintes plus ou moins fortes déclenchent une rupture au sein d'un matériau rocheux, ce qui conduit à une brusque libération d'énergie. Une partie significative de l'énergie d'un séisme va se dégager sous la forme d'ondes sismiques, qui vont se propager dans toutes les directions de l'espace à l'intérieur du globe terrestre, mais aussi à sa surface.

Ces ondes sont similaires à celles aux rides qui se forment lorsque l'on s'amuse à lancer un galet dans une mare ou un lac : elles naissent en un point, puis s'étalent en surface en créant une multitude de rides, dont la hauteur (l'amplitude) va progressivement en décroissant.

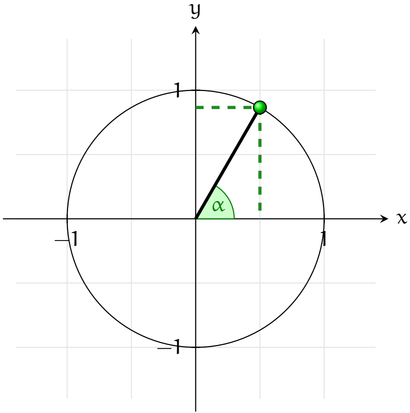


Source : `https://www.seis-insight.eu/fr/public/sismologie-planetaire/les-ondes-sismiques`

Représentation schématique d'une onde sismique. Notion d'amplitude, de période, fréquence, et de direction de propagation.

Les fonctions trigonométriques

Trigonométrie du cercle



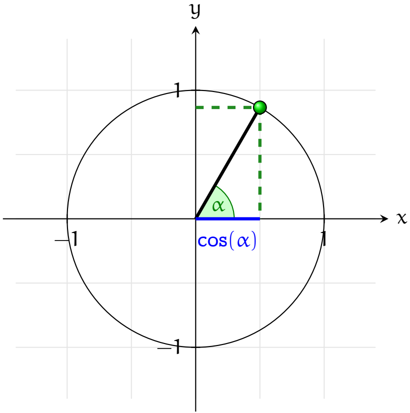
α en radiant :

π radiant $= 180°$,

$\frac{\pi}{3}$ radiant $= 60°$, . . .

Les fonctions trigonométriques

Trigonométrie du cercle



α en radiant :

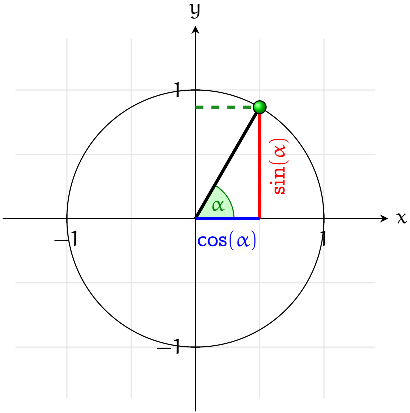
π radiant $= 180°$,

$\frac{\pi}{3}$ radiant $= 60°$, ...

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$

Les fonctions trigonométriques

Trigonométrie du cercle



α en radiant :

π radiant $= 180°$,

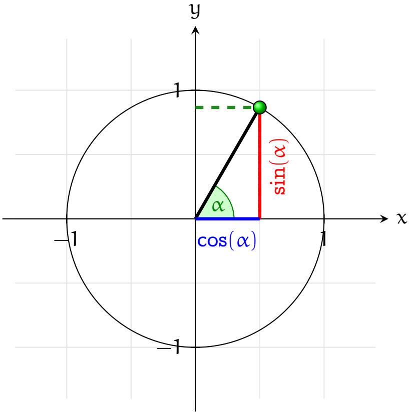
$\frac{\pi}{3}$ radiant $= 60°$, ...

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$

Les fonctions trigonométriques

Trigonométrie du cercle



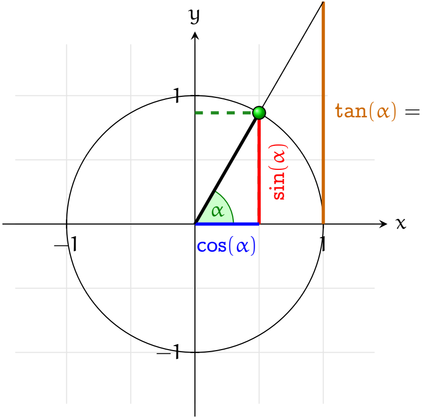
α en radiant :
π radiant $= 180°$,
$\frac{\pi}{3}$ radiant $= 60°$, ...

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Les fonctions trigonométriques

Trigonométrie du cercle



$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

α en radiant :

π radiant $= 180°$,

$\frac{\pi}{3}$ radiant $= 60°$, ...

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$

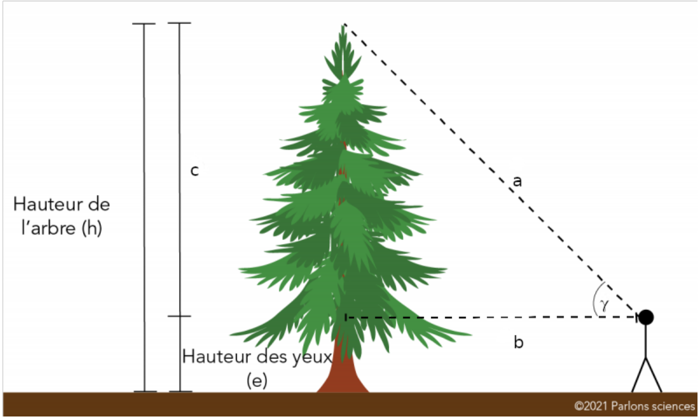
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ et $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Les fonctions trigonométriques

Triangles rectangles

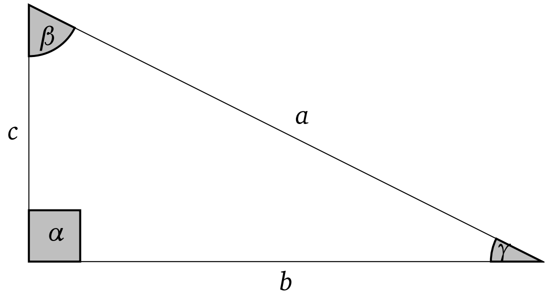


On ne peut mesurer que e, b et γ. Que vaut c ?

Les fonctions trigonométriques

Triangles rectangles

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$



$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$\frac{c}{a} = \cos(\beta) = \sin(\gamma)$$

$$\frac{b}{a} = \cos(\gamma) = \sin(\beta)$$

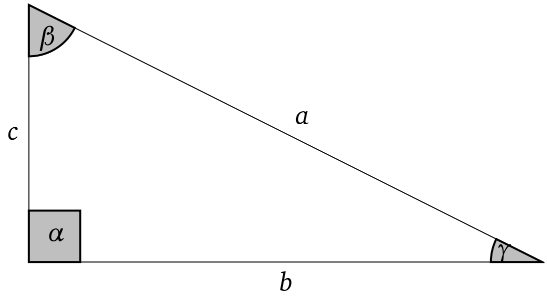
$$\frac{c}{b} = \frac{c}{a}\frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \tan(\gamma)$$

$$= \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{1}{\tan(\beta)}$$

Les fonctions trigonométriques

Triangles rectangles

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$



$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

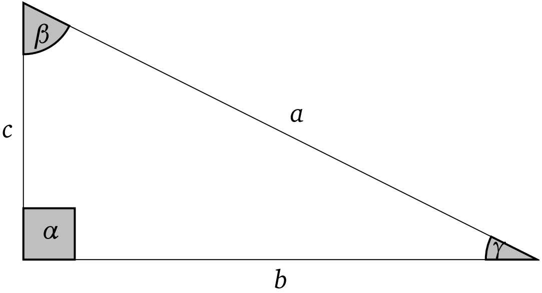
$$\frac{c}{a} = \cos(\beta) = \sin(\gamma)$$
$$\frac{b}{a} = \cos(\gamma) = \sin(\beta)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{a}\frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \tan(\gamma)$$
$$= \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{1}{\tan(\beta)}$$

Les fonctions trigonométriques

Triangles rectangles

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$



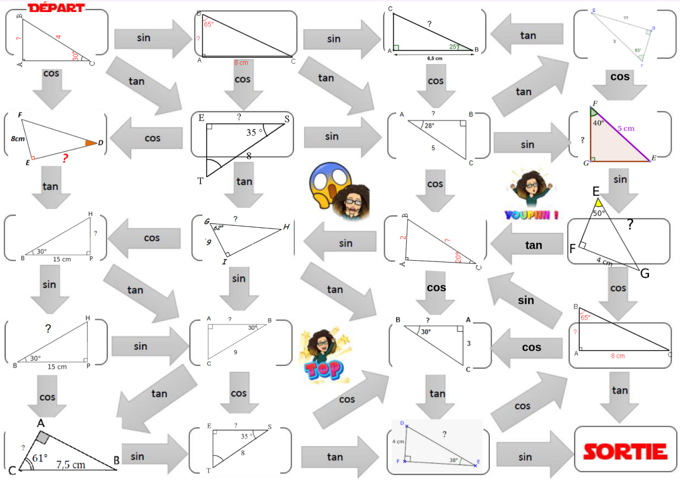
$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$\frac{c}{a} = \cos(\beta) = \sin(\gamma)$$
$$\frac{b}{a} = \cos(\gamma) = \sin(\beta)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{a}\frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \tan(\gamma)$$
$$= \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{1}{\tan(\beta)}$$

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

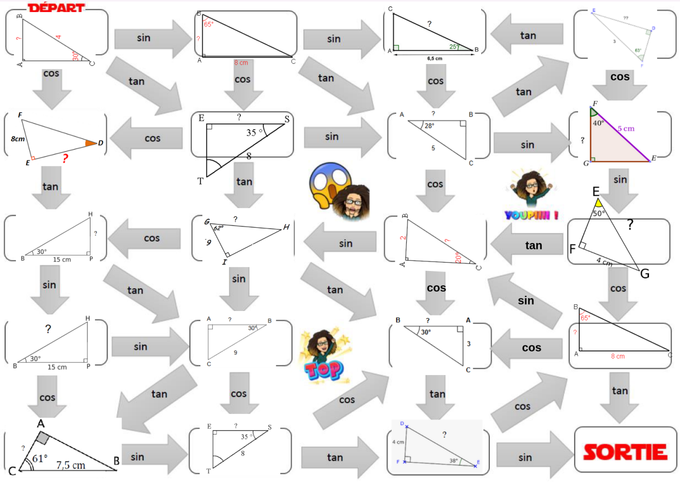


Source : https://sites.google.com/view/riguetmaths/ludifier-son-enseignement?authuser=0

Correction
sin
tan
cos
sin
cos
tan
cos
cos
tan
sin

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous



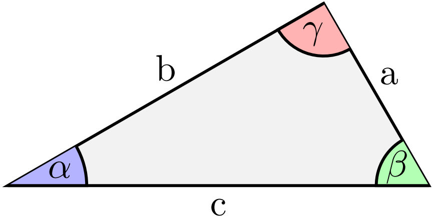
Source : https://sites.google.com/view/riguetmaths/ludifier-son-enseignement?authuser=0

Correction

sin
tan
cos
sin
cos
tan
cos
cos
tan
sin

Les fonctions trigonométriques

Triangles quelconques



Loi des sinus

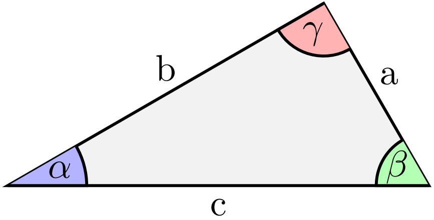
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Loi des cosinus (Carnot)

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{cases}$$

Les fonctions trigonométriques

Triangles quelconques



Loi des sinus

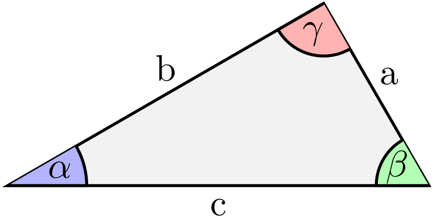
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Loi des cosinus (Carnot)

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{cases}$$

Les fonctions trigonométriques

Triangles quelconques



Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Loi des cosinus (Carnot)

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{cases}$$

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

Simplifier

1. $$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha)$$
2. $$(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha)-\cos(\alpha))^2$$
3. $$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

Correction

1. $$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1-\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = 1$$
2. $$\left[\underbrace{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}_{=1} + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] + \left[\underbrace{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}_{=1} - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] = 2$$
3. $$\frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{|\cos(\alpha)|}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}|\cos(\alpha)|$$

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

Simplifier

1. $$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha)$$
2. $$(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha) - \cos(\alpha))^2$$
3. $$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

Correction

1. $$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = 1$$
2. $$\left[\underbrace{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}_{=1} + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] + \left[\underbrace{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}_{=1} - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] = 2$$
3. $$\frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{|\cos(\alpha)|}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}|\cos(\alpha)|$$

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

Simplifier

1. $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha)$
2. $(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha)-\cos(\alpha))^2$
3. $\dfrac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$

Correction

1. $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} - \dfrac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \dfrac{1-\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \dfrac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = 1$
2. $\left[\underbrace{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}_{=1} + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] + \left[\underbrace{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}_{=1} - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] = 2$
3. $\dfrac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \dfrac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \dfrac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha)}}} = \dfrac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{|\cos(\alpha)|}} = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}|\cos(\alpha)|$

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

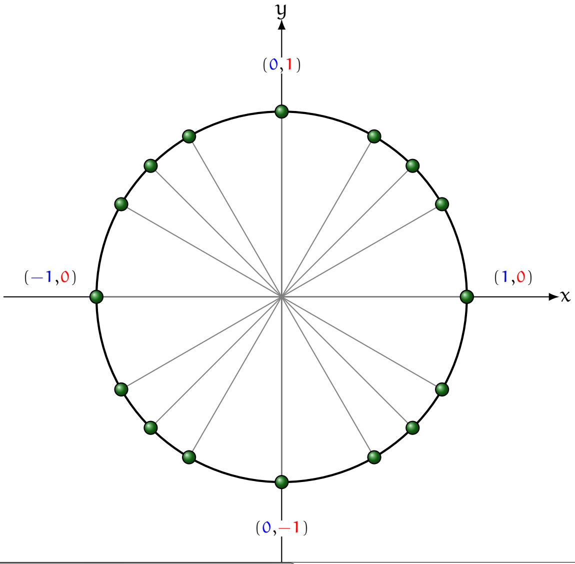
Simplifier

1. $$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha)$$
2. $$(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha) - \cos(\alpha))^2$$
3. $$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

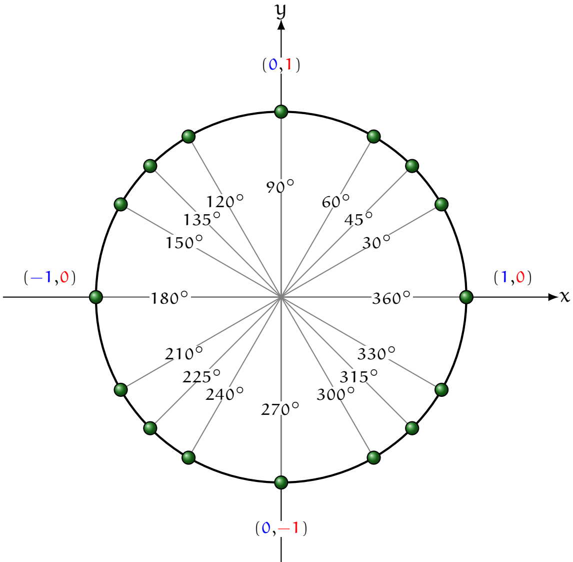
Correction

1. $$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = 1$$
2. $$\left[\underbrace{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}_{=1} + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] + \left[\underbrace{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}_{=1} - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] = 2$$
3. $$\frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha)}}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{|\cos(\alpha)|}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}|\cos(\alpha)|$$

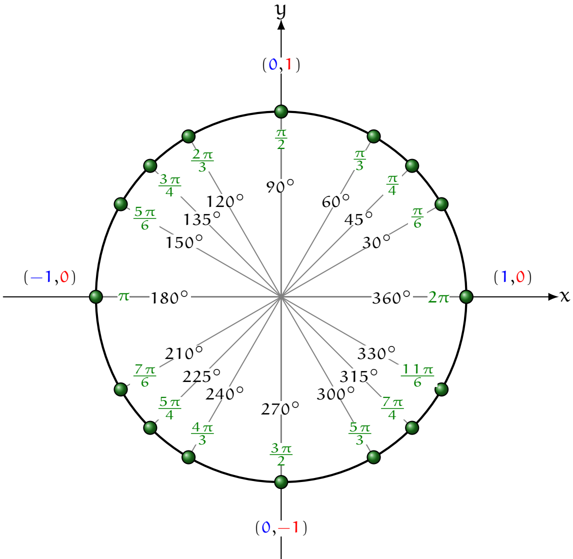
Les fonctions trigonométriques — Valeurs remarquables



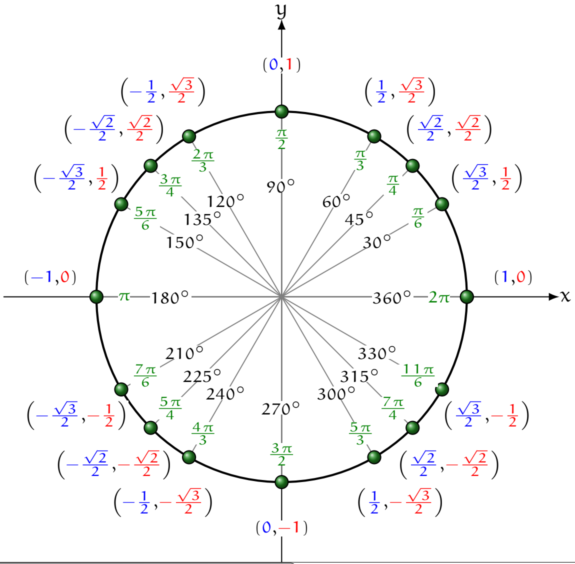
Les fonctions trigonométriques — Valeurs remarquables



Les fonctions trigonométriques — Valeurs remarquables



Les fonctions trigonométriques — Valeurs remarquables



Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

Résoudre pour $\alpha \in [0; 2\pi]$:

1. $\cos^2(\alpha) + 3\sin^2(\alpha) = 2$
2. $2\cos^2(\alpha) = 3\sin(\alpha)$

Correction

1. $\cos^2(\alpha) + 3\sin^2(\alpha) = 2 \iff 1 + 2\sin^2(\alpha) = 2 \iff \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \sin(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$
2. $2(1 - \sin^2(\alpha)) = 3\sin(\alpha) \iff 2\sin^2(\alpha) + 3\underbrace{\sin(\alpha)}_{\overset{\text{def}}{=} x \in [-1;1]} - 2 = 0 \iff 2x^2 + 3x - 2 = 0 \iff \underbrace{x = -2}_{\notin [-1;1]} \text{ ou } x = \frac{1}{2} \iff$

   $\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

Résoudre pour $\alpha \in [0; 2\pi]$:

1. $\cos^2(\alpha) + 3\sin^2(\alpha) = 2$
2. $2\cos^2(\alpha) = 3\sin(\alpha)$

Correction

1. $\cos^2(\alpha) + 3\sin^2(\alpha) = 2 \iff 1 + 2\sin^2(\alpha) = 2 \iff \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \sin(\alpha) = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \iff \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$
2. $2(1 - \sin^2(\alpha)) = 3\sin(\alpha) \iff 2\sin^2(\alpha) + 3\underbrace{\sin(\alpha)}_{\overset{\text{def}}{=} x \in [-1;1]} - 2 = 0 \iff 2x^2 + 3x - 2 = 0 \iff \underbrace{x = -2}_{\notin [-1;1]}$ ou $x = \frac{1}{2} \iff$

   $\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Les fonctions trigonométriques

Testez-vous

Résoudre pour $\alpha \in [0; 2\pi]$:

1. $\cos^2(\alpha) + 3\sin^2(\alpha) = 2$
2. $2\cos^2(\alpha) = 3\sin(\alpha)$

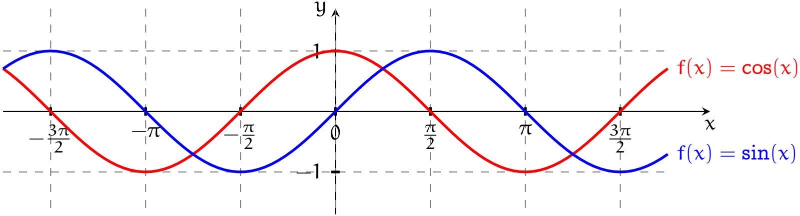
Correction

1. $\cos^2(\alpha) + 3\sin^2(\alpha) = 2 \iff 1 + 2\sin^2(\alpha) = 2 \iff \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \sin(\alpha) = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \iff \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$
2. $2(1 - \sin^2(\alpha)) = 3\sin(\alpha) \iff 2\sin^2(\alpha) + 3\underbrace{\sin(\alpha)}_{\overset{\text{def}}{=} x \in [-1;1]} - 2 = 0 \iff 2x^2 + 3x - 2 = 0 \iff \underbrace{x = -2}_{\notin [-1;1]}$ ou $x = \frac{1}{2} \iff$

   $\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Les fonctions trigonométriques

Sinus et Cosinus



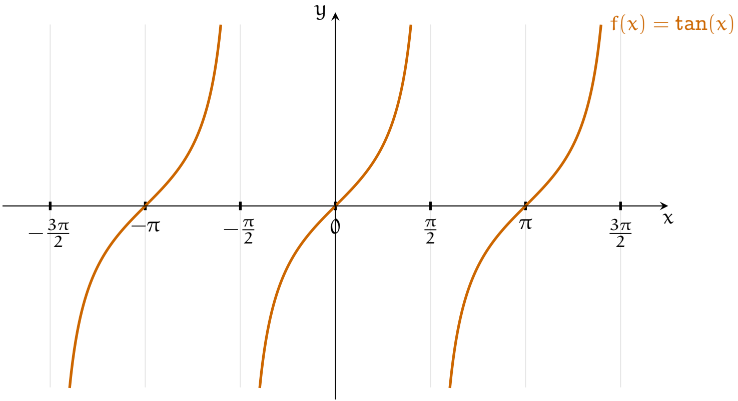
Ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$f(x) \in [-1;1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
Périodiques de période 2π : $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Le graphe de cos s'obtient par translation horizontale du graphe de sin de $\frac{\pi}{2}$ unités :

$$\cos(x) = \sin(t_{\frac{\pi}{2}}(x)) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Les fonctions trigonométriques

Tangente



Ensemble de définition $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \kappa\pi \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$

Périodiques de période π : $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$

Les fonctions trigonométriques

Rappels

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\qquad$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

On en déduit :

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \qquad 2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) \overset{\substack{q+p=2\alpha \\ q-p=2\beta}}{=} \cos(p) + \cos(q) \qquad 2\sin(\alpha)\cos(\beta) \overset{\substack{q+p=2\alpha \\ q-p=2\beta}}{=} \sin(p) + \sin(q)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\pi+\beta) = -\cos(\beta) \qquad \sin(\pi+\beta) = -\sin(\beta)$$

$$\cos(\pi-\beta) = -\cos(\beta) \qquad \sin(\pi-\beta) = \sin(\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin(\beta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos(\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\sin(\beta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \cos(\beta)$$

Les fonctions trigonométriques

arccos, arcsin, arctan

Testez-vous

Tracer le graphe des fonctions inverses de cos, sin et tan sur les intervalles indiqués :

- Fonction arc-cosinus arccos: $x \in [-1;1] \mapsto \arccos(x) \in [0;\pi]$:

$$\left.\begin{array}{c} y = \arccos(x) \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \cos(y) \\ 0 \leq y \leq \pi \end{array}\right.$$

- Fonction arc-sinus arcsin: $x \in [-1;1] \mapsto \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\left.\begin{array}{c} y = \arcsin(x) \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \sin(y) \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

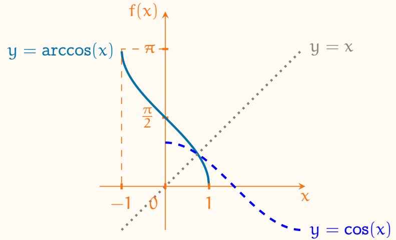
- Fonction arc-tangente arctan: $x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

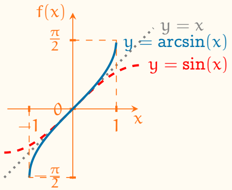
$$\left.\begin{array}{c} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \tan(y) \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

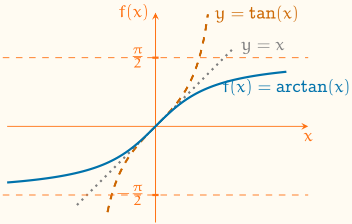
Les fonctions trigonométriques

arccos, arcsin, arctan

Correction





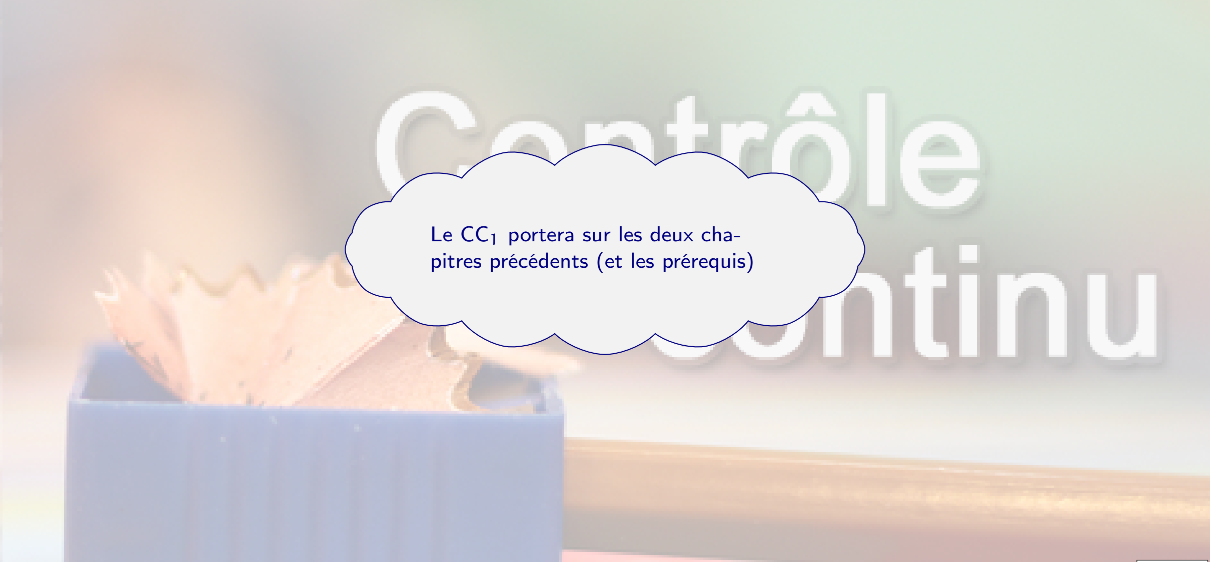


Pour réviser, s'entraîner et se tester

Pour réviser, s'entraîner et se tester

- OMB+ : chapitre "VI Fonctions élémentaires"
- Auto-Math : "Fonctions - TEST 1"

CC_1

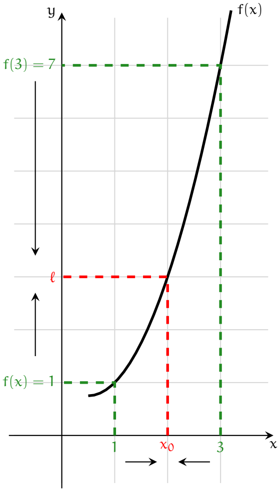


Le CC_1 portera sur les deux chapitres précédents (et les prérequis)

3. Limites

3. Limites

Définition (intuitive) de limite en un point



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0 alors on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 et on écrit

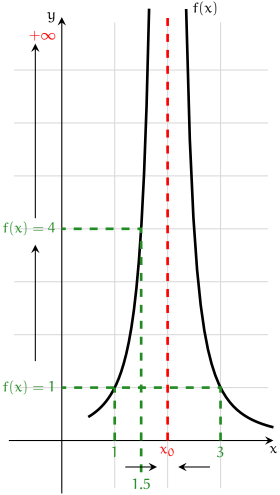
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

ou

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$$

NB Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0.

Définition (intuitive) de limite en un point



Si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est suffisamment proche de x_0 alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 et on écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ou

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$$

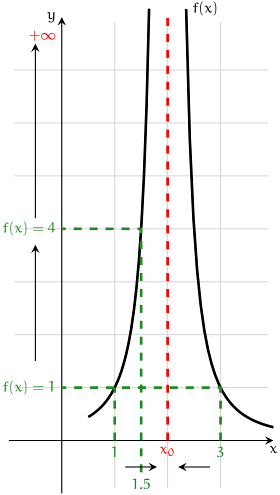
NB f n'est pas définie en x_0 et la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale.

De même, si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est suffisamment proche de x_0 alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en x_0 et on écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$$

f n'est pas définie en x_0 et la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale.

Définition (intuitive) de limite en un point



Si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est suffisamment proche de x_0 alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 et on écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ou

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$$

NB f n'est pas définie en x_0 et la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale.

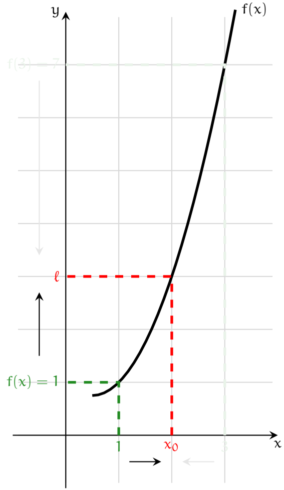
De même, si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est suffisamment proche de x_0 alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en x_0 et on écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$$

f n'est pas définie en x_0 et la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale.

Définition (intuitive) de limite en un point

Limites "gauche" (x_0^-) et "droite" (x_0^+)



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0 pour $x < x_0$ alors on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 de la gauche et on écrit

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \ell$$

Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0 pour $x > x_0$ alors on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 de la droite et on écrit

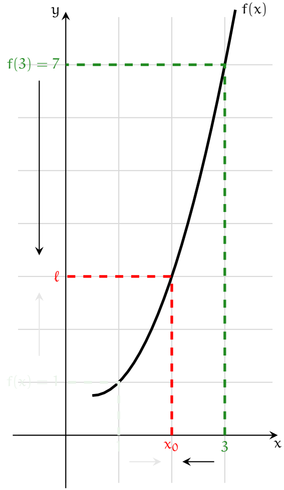
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \ell$$

Nota bene : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Définition (intuitive) de limite en un point

Limites "gauche" (x_0^-) et "droite" (x_0^+)



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0 pour $x < x_0$ alors on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 de la gauche et on écrit

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \ell$$

Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0 pour $x > x_0$ alors on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 de la droite et on écrit

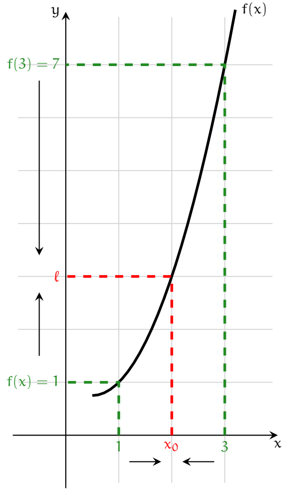
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \ell$$

Nota bene : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Définition (intuitive) de limite en un point

Limites "gauche" (x_0^-) et "droite" (x_0^+)



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0 pour $x < x_0$ alors on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 de la gauche et on écrit

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \ell$$

Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0 pour $x > x_0$ alors on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 de la droite et on écrit

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \ell$$

Nota bene : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Définition (intuitive) de limite en un point

Exemple

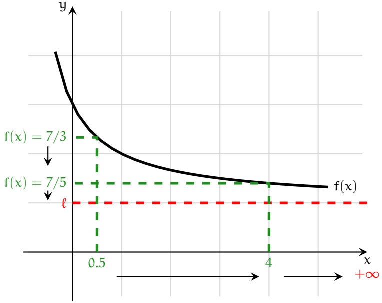
- $\lim\limits_{x \to 2} ax + b = 2a + b$
- $\lim\limits_{x \to -5} |x| = 5$
- $\lim\limits_{x \to \pi} \sin(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \pi} \cos(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$

- $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{x+1}{x+2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{x+1}{x+2} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas

3. Limites

Définition (intuitive) de limite à l'infini



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$$

La droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

- Si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit

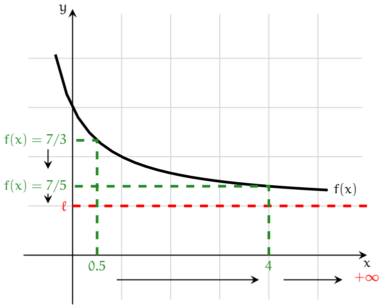
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

- Si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

- Si $f(x)$ oscille dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f n'admet pas de limite en $+\infty$

Définition (intuitive) de limite à l'infini



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$$

La droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

- Si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit

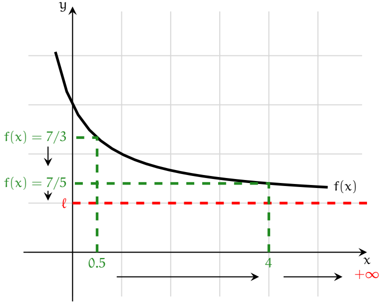
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

- Si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

- Si $f(x)$ oscille dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f n'admet pas de limite en $+\infty$

Définition (intuitive) de limite à l'infini



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$$

La droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

- Si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit

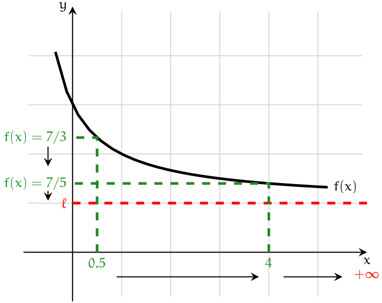
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

- Si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

- Si $f(x)$ oscille dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f n'admet pas de limite en $+\infty$

Définition (intuitive) de limite à l'infini



Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

La droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

- Si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
- Si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$
- Si $f(x)$ oscille dès que x est de plus en plus grand alors on dit que f n'admet pas de limite en $+\infty$

Définition (intuitive) de limite à l'infini

$x \to -\infty$

- Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est de plus en plus petit alors on dit que f admet ℓ pour limite en $-\infty$ et on écrit
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell$$
- Si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est de plus en plus petit alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ et on écrit
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
- Si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est de plus en plus petit alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ et on écrit
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
- Si $f(x)$ oscille dès que x est de plus en plus petit alors on dit que f n'admet pas de limite en $-\infty$

Définition (intuitive) de limite à l'infini

$x \to +\infty$

Exemple

- $\lim\limits_{x \to +\infty} ax + b = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0, \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{x+d} = \lim\limits_{x \to +\infty} a + (b - ad)\frac{1}{x+d} = a$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arcsin(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arccos(x)$ n'existe pas

- $\lim\limits_{x \to -\infty} ax + b = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0, \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ax+b}{x+d} = \lim\limits_{x \to +\infty} a + (b - ad)\frac{1}{x+d} = a$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arcsin(x)$ n'existe pas
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arccos(x)$ n'existe pas

3. Limites

Calcul de limites

Somme et produit

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et F.I. = forme indéterminée

Rappels

Somme	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1 \in \mathbb{R}$	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_2 \in \mathbb{R}$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1 + \ell_2$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ F.I.
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ F.I.	$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$

Rappels

Produit	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1\ell_2$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1\ell_2$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ F.I.	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ F.I.
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1\ell_2$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell_1\ell_2$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ F.I.	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$
$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ F.I.	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$	$(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$

Calcul de limites

Testez-vous

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)\cos(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x}$

Correction

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)\cos(x) = 0 \times 1 = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-1)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{1}{2}$

Testez-vous

Calculer

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2$
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2$

En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2$

Correction

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x}{x}\right)^2 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{-x}{x}\right)^2 = (-1)^2 = 1$

Comme ces deux limites sont égales on conclut que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2 = 1$.

Calcul de limites

Testez-vous

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)\cos(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x}$

Correction

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)\cos(x) = 0 \times 1 = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-1)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{1}{2}$

Testez-vous

Calculer

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2$
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2$

En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2$

Correction

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x}{x}\right)^2 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{-x}{x}\right)^2 = (-1)^2 = 1$

Comme ces deux limites sont égales on conclut que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2 = 1$.

Calcul de limites

Polynômes et théorème des gendarmes

$P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_a x^a$ et $Q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_b x^b$ polynômes

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^a\left(\frac{p_0}{x^a} + \frac{p_1}{x^{a-1}} + \cdots + p_a\right)}{x^b\left(\frac{q_0}{x^b} + \frac{q_1}{x^{b-1}} + \cdots + q_b\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p_a}{q_b} x^{a-b} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a = b \\ \infty & \text{si } a > b \end{cases}$$

Théorème (d'encadrement ou des gendarmes ou sandwich ou de l'étau)

Soit f, g *et* h *trois fonctions telles que, au voisinage de* x_0,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ *(finie ou infinie) alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Calcul de limites

Testez-vous

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^3 + 2x + 1}{-5x^2}$$
2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^2}{10x^3 + 2x + 1}$$
3. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^3 + 2x + 1}{-5x^3}$$
4. $$\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
5. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$
6. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Correction

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^3 + 2x + 1}{-5x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{10}{-5} x^{3-2} = -\infty$$
2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^2}{10x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{10} x^{2-3} = 0$$
3. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^3 + 2x + 1}{-5x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{10}{-5} x^{3-3} = -2$$
4. $$\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ car } \underbrace{-|x|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{|x|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$
5. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \text{ car } \underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$
6. dans ce cas le théorème des gendarmes est inutiles car $$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}}$$

Calcul de limites

Testez-vous

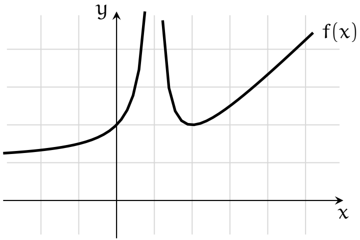
1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^3+2x+1}{-5x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2}{10x^3+2x+1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^3+2x+1}{-5x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Correction

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^3+2x+1}{-5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{-5}x^{3-2} = -\infty$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2}{10x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5}{10}x^{2-3} = 0$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^3+2x+1}{-5x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{-5}x^{3-3} = -2$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\underbrace{-|x|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{|x|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ car $\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$
6. dans ce cas le théorème des gendarmes est inutiles car $\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}}$

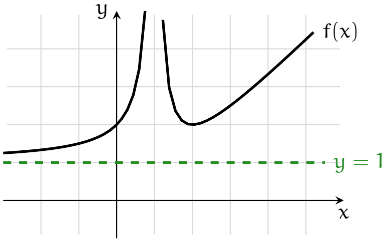
3. Limites

Asymptotes



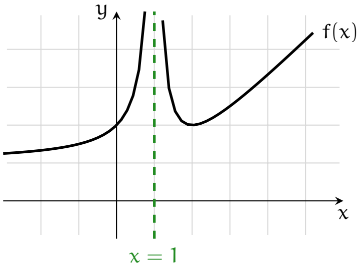
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une asymptote horizontale pour f en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc $x = 1$ est une asymptote verticale pour f en 1
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0$: on dit que $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour f en $+\infty$. Si une telle droite existe alors
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

Asymptotes



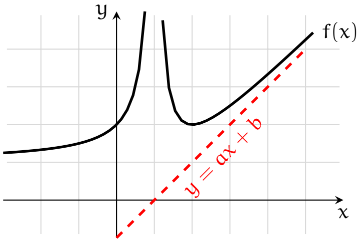
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une asymptote horizontale pour f en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc $x = 1$ est une asymptote verticale pour f en 1
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$: on dit que $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour f en $+\infty$. Si une telle droite existe alors
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

Asymptotes



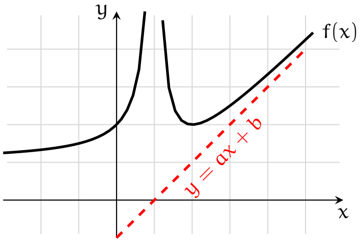
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une asymptote horizontale pour f en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc $x = 1$ est une asymptote verticale pour f en 1
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$: on dit que $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour f en $+\infty$. Si une telle droite existe alors
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

Asymptotes



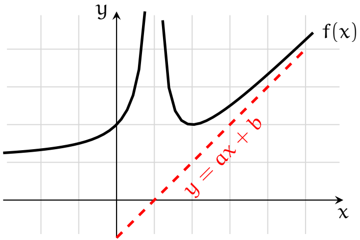
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une asymptote horizontale pour f en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc $x = 1$ est une asymptote verticale pour f en 1
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$: on dit que $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour f en $+\infty$. Si une telle droite existe alors
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

Asymptotes



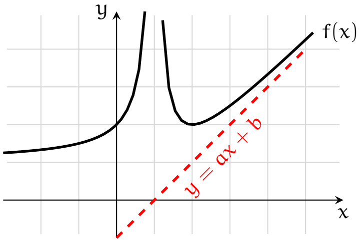
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une asymptote horizontale pour f en $-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ donc $x = 1$ est une asymptote verticale pour f en 1
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$: on dit que $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour f en $+\infty$. Si une telle droite existe alors
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

Asymptotes



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une asymptote horizontale pour f en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc $x = 1$ est une asymptote verticale pour f en 1
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$: on dit que $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour f en $+\infty$. Si une telle droite existe alors
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

Asymptotes



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une asymptote horizontale pour f en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc $x = 1$ est une asymptote verticale pour f en 1
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$: on dit que $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour f en $+\infty$. Si une telle droite existe alors
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

Asymptotes

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)(f(x) - (ax + b)) = 0$), la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f. Cela équivaut à :
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$)
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$)
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$)

Asymptotes

Testez-vous

Calculer les asymptotes de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

Correction

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote verticale pour f en 0
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ mais il pourrait exister un asymptote oblique. Cherchons-le :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \neq 0$: si un tel asymptote existe alors il a pour équation $y = ax + b$ avec $a = 1$,
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$: on a bien trouvé un asymptote oblique pour f en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 0$.
- [idem pour $x \to -\infty$]

Asymptotes

Testez-vous

Calculer les asymptotes de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

Correction

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote verticale pour f en 0
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ mais il pourrait exister un asymptote oblique. Cherchons-le :
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \neq 0$: si un tel asymptote existe alors il a pour équation $y = ax + b$ avec $a = 1$,
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$: on a bien trouvé un asymptote oblique pour f en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 0$.
- [idem pour $x \to -\infty$]

Asymptotes

Testez-vous

Calculer les asymptotes de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

Correction

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote verticale pour f en 0
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ mais il pourrait exister un asymptote oblique.
  Cherchons-le :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \neq 0$: si un tel asymptote existe alors il a pour équation $y = ax + b$ avec $a = 1$,
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$: on a bien trouvé un asymptote oblique pour f en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 0$.
- [idem pour $x \to -\infty$]

Asymptotes

Testez-vous

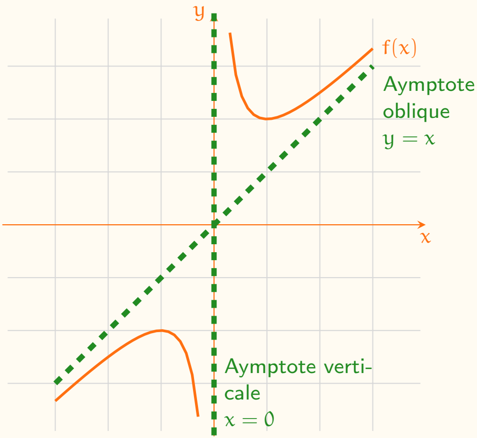
Calculer les asymptotes de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

Correction

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote verticale pour f en 0
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ mais il pourrait exister un asymptote oblique.
  Cherchons-le :
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \neq 0$: si un tel asymptote existe alors il a pour équation $y = ax + b$ avec $a = 1$,
  - $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$: on a bien trouvé un asymptote oblique pour f en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 0$.
- [idem pour $x \to -\infty$]

Asymptotes

Correction



3. Limites

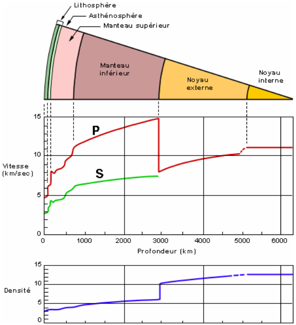
Continuité

Les discontinuités dans le manteau terrestre

In "real life"

En sciences de la Terre, une discontinuité est la frontière entre deux formations rocheuses dont les propriétés sont très nettement différentes.

La plupart des discontinuités à l'intérieur de la Terre sont des **discontinuités sismiques**, c'est-à-dire des frontières entre deux zones dont les vitesses de propagation des ondes sismiques (des ondes P comme des ondes S) sont différentes. Ces discontinuités sont l'expression sismologique de discontinuités de composition chimique ou minéralogique, ou bien d'interfaces solide/liquide.



Profil de vitesse des ondes sismiques en fonction de la profondeur :
il y a des sauts de vitesse sismique assez brusque vers 670 km de profondeur, puis environs 3000 km et 5000 km.

Continuité

Définitions

Continuité en un point

f est continue en x_0 si

- $x_0 \in \mathcal{D}_f$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Prolongement par continuité en un point

Soit f définie sur $\mathcal{D}_f$ et $x_0 \notin \mathcal{D}_f$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors f est prolongeable par continuité en x_0 et son prolongement est défini sur $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$ par

$$\widetilde{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Continuité

f est continue si elle est continue dans tout point de son ensemble de définition.

Continuité

Définitions

Continuité en un point

f est continue en x_0 si

- $x_0 \in \mathcal{D}_f$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Prolongement par continuité en un point

Soit f définie sur $\mathcal{D}_f$ et $x_0 \notin \mathcal{D}_f$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors f est prolongeable par continuité en x_0 et son prolongement est défini sur $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$ par

$$\widetilde{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Continuité

f est continue si elle est continue dans tout point de son ensemble de définition.

Continuité

Définitions

Continuité en un point

f est continue en x_0 si

- $x_0 \in \mathcal{D}_f$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Prolongement par continuité en un point

Soit f définie sur $\mathcal{D}_f$ et $x_0 \notin \mathcal{D}_f$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors f est prolongeable par continuité en x_0 et son prolongement est défini sur $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$ par

$$\widetilde{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Continuité

f est continue si elle est continue dans tout point de son ensemble de définition.

Continuité

Définitions

L'idée intuitive de se dire qu'une fonction est continue si et seulement si on peut tracer son graphe sans jamais soulever le crayon n'est valable que si l'ensemble de définition est constitué d'un seul et unique morceau !

Lorsque l'ensemble de définition est constitué de deux ou plusieurs morceaux, on a le droit de soulever le crayon.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{x}$

- elle est continue car son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ qui est constitué des deux morceaux $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty$ et f est continue dans tout point de son ensemble de définition
- elle n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Exemple

$f(x) = \frac{x^2}{x}$

- elle est continue (même raisonnement)
- elle est prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

Continuité

Définitions

L'idée intuitive de se dire qu'une fonction est continue si et seulement si on peut tracer son graphe sans jamais soulever le crayon n'est valable que si l'ensemble de définition est constitué d'un seul et unique morceau !

Lorsque l'ensemble de définition est constitué de deux ou plusieurs morceaux, on a le droit de soulever le crayon.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

- elle est continue car son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ qui est constitué des deux morceaux $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty$ et f est continue dans tout point de son ensemble de définition
- elle n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2}{x}$$

- elle est continue (même raisonnement)
- elle est prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

Continuité

Définitions

L'idée intuitive de se dire qu'une fonction est continue si et seulement si on peut tracer son graphe sans jamais soulever le crayon n'est valable que si l'ensemble de définition est constitué d'un seul et unique morceau !

Lorsque l'ensemble de définition est constitué de deux ou plusieurs morceaux, on a le droit de soulever le crayon.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

- elle est continue car son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ qui est constitué des deux morceaux $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty$ et f est continue dans tout point de son ensemble de définition
- elle n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2}{x}$$

- elle est continue (même raisonnement)
- elle est prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

Continuité

Théorèmes

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *est **continue**, alors* f *atteint toutes les valeurs intermédiaires entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *:*

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

Corollaire (existence des zéros d'une fonction continue)

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ***continue**. Si* $f(a)f(b) < 0$*, alors il existe (au moins un)* $\alpha \in]a,b[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

Corollaire (existence et **unicité** du zéro d'une fonction continue monotone)

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ***continue** et **strictement monotone**. Si* $f(a)f(b) < 0$*, alors il existe un et un seul* $\alpha \in]a,b[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

Continuité

Théorèmes

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* ***continue****, alors* f *atteint toutes les valeurs intermédiaires entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *:*

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

Corollaire (existence des zéros d'une fonction continue)

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***continue****. Si* $f(a)f(b) < 0$*, alors il existe (au moins un)* $\alpha \in]a,b[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

Corollaire (existence et **unicité** du zéro d'une fonction continue monotone)

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***continue*** *et* ***strictement monotone****. Si* $f(a)f(b) < 0$*, alors il existe un et un seul* $\alpha \in]a,b[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

Continuité

Théorèmes

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est **continue**, alors* f *atteint toutes les valeurs intermédiaires entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *:*

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

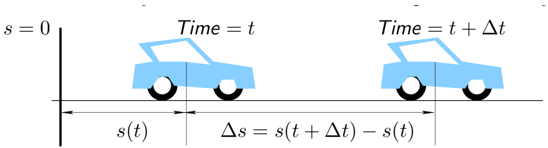
Corollaire (existence des zéros d'une fonction continue)

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***continue**. Si* $f(a)f(b) < 0$*, alors il existe (au moins un)* $\alpha \in]a,b[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

Corollaire (existence et **unicité** du zéro d'une fonction continue monotone)

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***continue** et **strictement monotone**. Si* $f(a)f(b) < 0$*, alors il existe un et un seul* $\alpha \in]a,b[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$.

4. Dérivées



Nous savons tous ce qu'est la vitesse moyenne. Par exemple, si on a besoin de deux heures pour parcourir 100 km, la vitesse moyenne est

$$\frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps pour la parcourir}} = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

In "real life"

Lorsque on conduit une voiture, le tachymètre indique la vitesse à laquelle la voiture roule, *i.e.* la vitesse au moment où on regarde le tachymètre. Mais au moment où on regarde le compteur de vitesse, aucun temps ne s'écoule (c'est une vitesse *instantanée*) et on ne parcoure aucune distance. La vitesse à ce moment est donc $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire **indéfinie**. Mais alors qu'est-ce qu'il indique le tachymètre ? Formellement l'indicateur de vitesse donne

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

ayant noté s la position en fonction du temps t.
On verra que la vitesse est la dérivée du déplacement et que l'accélération est la dérivée de la vitesse :

$$v(t) = s'(t), \qquad a(t) = v'(t) = s''(t).$$

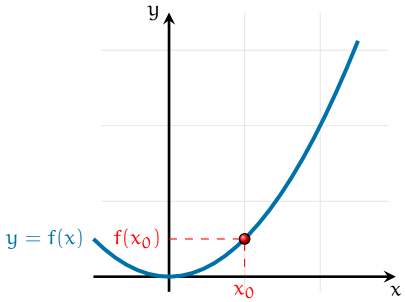
4. Dérivées

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



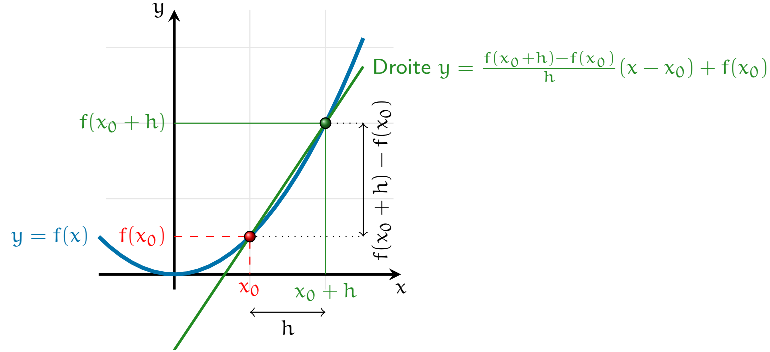
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



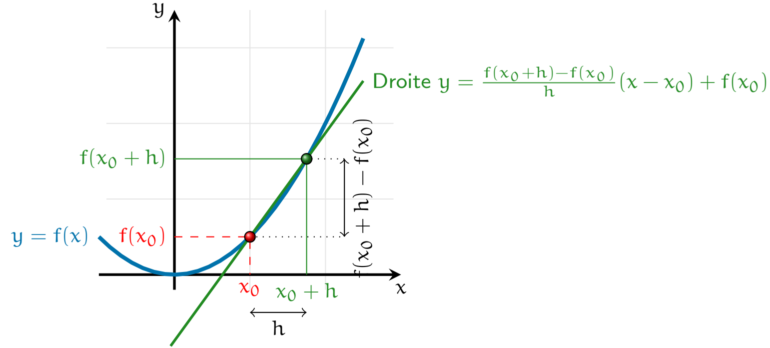
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



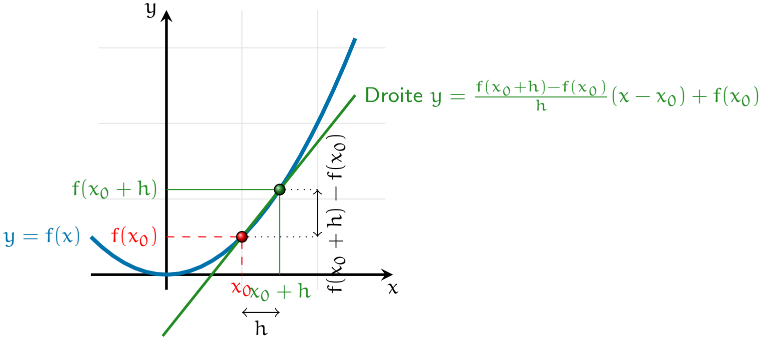
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



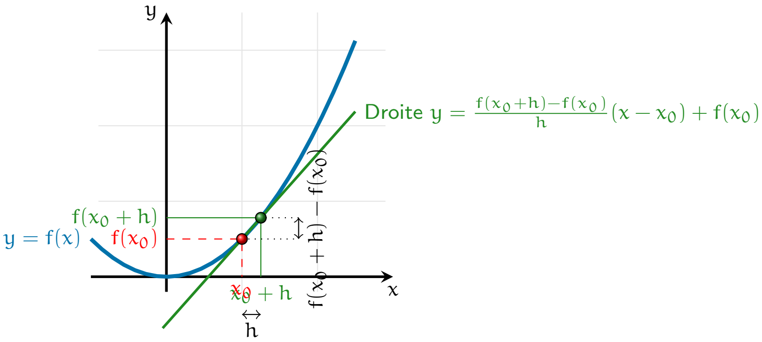
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



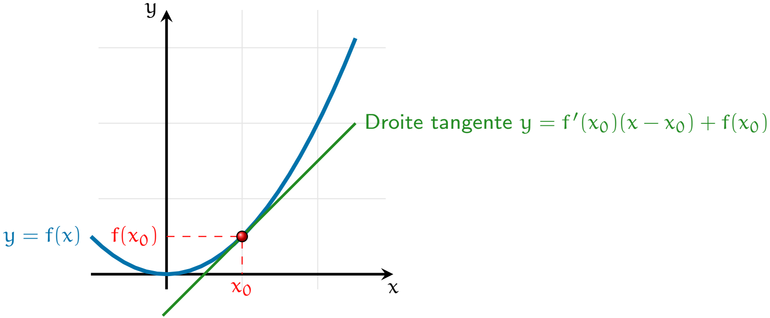
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Pour chaque x_0 en lequel la fonction f est dérivable, on associe un nombre $f'(x_0)$, ce qui nous permet de définir une nouvelle fonction : la fonction dérivée de f.
On la notera de l'une des façons suivantes :

$$x \mapsto f'(x) \qquad \text{ou} \qquad f' \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}.$$

Exemple

Soit $f(x) = x^2$ alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2x_0 = f'(x_0).$$

Donc $f'(x) = 2x$ est la fonction dérivée de f.

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$ alors

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \\ &\text{n'existe pas} \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en $x = 0$

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$ alors

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \\ &\text{n'existe pas} \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en $x = 0$

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ alors

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en $x = 0$

Définition de dérivées

Théorème

$$f \textit{ dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f \textit{ continue en } x_0$$

La réciproque est fausse

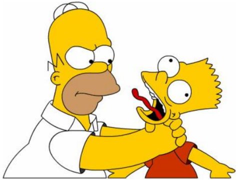
Exemples :

- $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas
- $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$

Définition de dérivées

Théorème

$$f \textit{ dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f \textit{ continue en } x_0$$



La réciproque est fausse

Exemples :

- $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas
- $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$

4. Dérivées

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par “**s**”, est “**s**ympa” (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par “**c**”, est “**c**asse-pieds” (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par “**s**”, est “**s**ympa” (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par “**c**”, est “**c**asse-pieds” (= change de signe).

Calcul de dérivées

Linéarité : $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$ et $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$

Produit : $\left(f(x)\times g(x)\right)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\left(3\sin(x)+e^x\right)' = 3\left(\sin(x)\right)' + \left(e^x\right)' = 3\cos(x)+e^x$

Produit : $\left(x^4\sin(x)\right)' = \left(x^4\right)'\times\sin(x) + x^4\times\left(\sin(x)\right)' = 4x^3\sin(x)+x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{2x\sin(x)-x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Linéarité : $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$ et $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$

Produit : $\left(f(x)\times g(x)\right)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\left(3\sin(x)+e^x\right)' = 3\left(\sin(x)\right)' + \left(e^x\right)' = 3\cos(x) + e^x$

Produit : $\left(x^4\sin(x)\right)' = \left(x^4\right)'\times\sin(x) + x^4\times\left(\sin(x)\right)' = 4x^3\sin(x) + x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Linéarité : $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$ et $\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$

Produit : $\left(f(x)\times g(x)\right)'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\dfrac{f'(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\left(3\sin(x)+e^x\right)'=3\left(\sin(x)\right)'+\left(e^x\right)'=3\cos(x)+e^x$

Produit : $\left(x^4\sin(x)\right)'=\left(x^4\right)'\times\sin(x)+x^4\times\left(\sin(x)\right)'=4x^3\sin(x)+x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)'=\dfrac{2x\sin(x)-x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Composition : $\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$ $\neq g'\big(f'(x)\big)$

$$\Big(h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\Big)' = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \times g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

Exemple

Composition : $\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)' = \cos\left(x^2\right) \times 2x$

$$\Big(\ln\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)\Big)' = \frac{1}{\sin\left(x^2\right)} \cos\left(x^2\right) \times 2x$$

Calcul de dérivées

Composition : $\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$ $\neq g'\big(f'(x)\big)$

$$\bigg(h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\bigg)' = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \times g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

Exemple

Composition : $\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)' = \cos\left(x^2\right) \times 2x$

$$\bigg(\ln\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)\bigg)' = \frac{1}{\sin\left(x^2\right)}\cos\left(x^2\right) \times 2x$$

Calcul de dérivées

Testez-vous

Calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$
2. $f(x) = 3e^x - x^2$
3. $f(x) = 3\ln(x)$
4. $f(x) = \sin(2x)$
5. $f(x) = \sin(x + x^3)$
6. $f(x) = (x+4)^3$
7. $f(x) = (x + \sin(x))^5$
8. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$
9. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$
12. $f(x) = e^x \sin(x)$
13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^4}$
14. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$
16. $f(x) = x^2 \sin(x)$
17. $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

Calcul de dérivées

Testez-vous

Calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$
2. $f(x) = 3e^x - x^2$
3. $f(x) = 3\ln(x)$
4. $f(x) = \sin(2x)$
5. $f(x) = \sin(x + x^3)$
6. $f(x) = (x+4)^3$
7. $f(x) = (x + \sin(x))^5$
8. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$
9. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$
12. $f(x) = e^x \sin(x)$
13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^4}$
14. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$
16. $f(x) = x^2 \sin(x)$
17. $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

Correction

1. $f'(x) = 3\cos(x) + 5\sin(x)$
2. $f'(x) = 3e^x - 2x$
3. $f'(x) = \frac{3}{x}$
4. $f'(x) = 2\cos(2x)$
5. $f'(x) = (1 + 3x^2)\cos(x + x^3)$
6. $f'(x) = 3(x+4)^2$
7. $f'(x) = 5(x + \sin(x))^4(1 + \cos(x))$
8. $f'(x) = \frac{2}{x}\cos(\ln(x^2))$
9. $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)\exp(\cos^2(x))$
10. $f'(x) = (1+x)e^x$
11. $f'(x) = \frac{-x\sin(x) - 2\cos(x)}{x^3}$
12. $f'(x) = e^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big)$
13. $f'(x) = \frac{1 - 4\ln(x)}{x^5}$
14. $f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$
15. $f'(x) = \frac{1 - x\ln(x)}{xe^x}$
16. $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
17. $f(x) = -\frac{1+x}{x^3}e^{1/x}$

Calcul de dérivées

Composition (*chain rule*)

In "real life"

Le volume d'un ballon sphérique est une fonction du rayon : $r \mapsto v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Si on gonfle ce ballon son rayon dépend du temps : $t \mapsto r(t)$.

Le volume aussi dépend donc du temps : $t \mapsto V(t) = v(r(t))$.

Le taux de changement du volume en fonction du temps est

$$V'(t) = v'(r(t)) \times r'(t) = 4\pi(r(t))^2 r'(t).$$

Par exemple, si le rayon du ballon croît de $0.5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ et si son rayon à l'instant t_0 est de $3\,\mathrm{cm}$ alors le volume croît à la vitesse de

$$V'(t_0) = v'(r(t_0)) \times r'(t_0) = 4\pi \times (3\,\mathrm{cm})^2 \times (0.5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}) = \pi \times 18\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}.$$

4. Dérivées

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

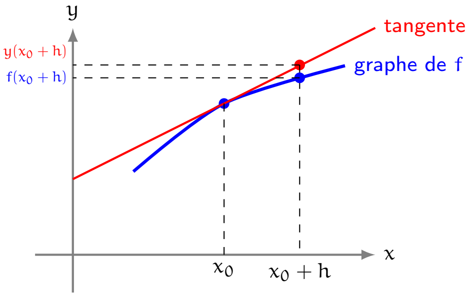
Droite tangente au graphe d'une fonction

Rappels

Si f est dérivable en x_0, alors le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La tangente en x_0 est la droite qui "approche" au mieux le graphe de f autour de x_0. Pour x proche de x_0 ($x = x_0 + h$ avec $h \simeq 0$), au lieu de lire les valeurs $f(x)$ sur le graphe de f, on lit les valeurs approchées $y(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ sur la tangente en x_0.



Calcul approché de valeurs

Droite tangente au graphe d'une fonction

Testez-vous

Donner l'équation de la droite tangente au point indiqué :

1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$
6. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

Correction

1. $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$
2. $y = \frac{x+1}{2}$
3. $y = x - 1$
4. $y = x + 1$
5. $y = x$
6. $y = 1$

Calcul approché de valeurs

Droite tangente au graphe d'une fonction

Testez-vous

Donner l'équation de la droite tangente au point indiqué :

1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$
6. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

Correction

1. $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$
2. $y = \frac{x+1}{2}$
3. $y = x-1$
4. $y = x+1$
5. $y = x$
6. $y = 1$

Calcul approché de valeurs

Polynôme de Taylor

Pour aller plus loin : polynôme de Taylor

Pour $x \simeq x_0$ on peut approcher $f(x)$ par le polynôme de degré n suivant :

$$f(x) \simeq p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)}_{\text{Droite tangente}} + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!}}_{\text{Parabole osculatrice}} + (x - x_0)^3 \frac{f'''(x_0)}{3!} + \cdots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- n = degré du polynôme p = plus grand ordre de dérivation de f
- Si $n = 1$ alors p est l'équation de la droite tangente à f en x_0
- Si $n = 2$ alors p est l'équation de la parabole osculatrice à f en x_0

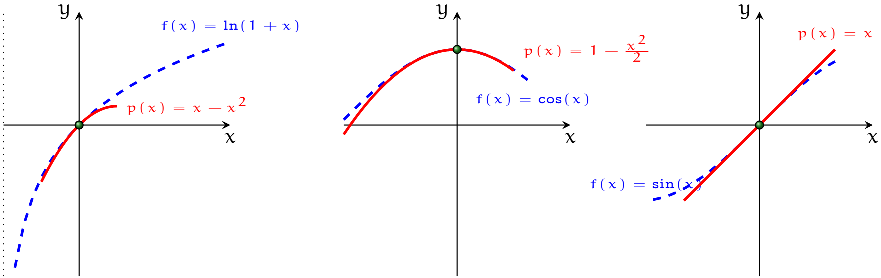
Calcul approché de valeurs

Polynôme de Taylor

Exemple

À l'ordre 2 on a $f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2}$:

1. $\ln(1+x) \simeq 0 + (x-0)\frac{1}{1+0} + (x-0)^2\frac{-1}{(1+0)^2} = x - x^2$ lorsque $x \simeq 0$
2. $\cos(x) \simeq 1 + (x-0)(-\sin(0)) + (x-0)^2(-\cos(0)) = 1 - \frac{x^2}{2}$ lorsque $x \simeq 0$
3. $\sin(x) \simeq 0 + (x-0)\cos(0) + (x-0)^2(-\sin(0)) = x$ lorsque $x \simeq 0$



4. Dérivées

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ ou $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty; +\infty]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ ou $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty; +\infty]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ ou $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty; +\infty]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Ne pas confondre $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ on peut ré-appliquer la règle de l'Hôpital et calculer $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$ et $g(x) = 1 - \cos(x)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = 2.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 2$.

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Importance des hypothèses

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas on ne peut rien conclure sur $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{e^x-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} \quad \text{n'existe pas cependant} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En effet, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (théorème des gendarmes) et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = 1$ (définition de dérivée de e^x en $x=0$).

2. Si on n'a pas de forme indéterminée $\left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, la règle ne s'applique pas !

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = 1$ et $g(x) = x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{1} = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Importance des hypothèses

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas on ne peut rien conclure sur $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} \quad \text{n'existe pas cependant} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En effet, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (théorème des gendarmes) et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$ (définition de dérivée de e^x en $x = 0$).

2. Si on n'a pas de forme indéterminée $\left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, la règle ne s'applique pas !

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = 1$ et $g(x) = x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{1} = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Limites fondamentales

Testez-vous

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, x en radiant
3. $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{a^x-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(a^{1/x}-1\right)$, $a>0$
4. $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} (1+\alpha x)^{1/x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x$, $\alpha\in\mathbb{R}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^\alpha-1\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Limites fondamentales

Correction

1. $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{1}{1+x} = 1.$

   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{t\to0^\pm} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\sin(x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$

   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{t\to0^\pm} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3. $(1+\alpha x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)\right)$ et $\lim\limits_{x\to0^\pm} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)\right)$

   $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\alpha}{1+\alpha x} = \alpha$ donc $\lim\limits_{x\to0^\pm} (1+\alpha x)^{1/x} = e^\alpha.$

   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to0^\pm} (1+\alpha t)^{1/t} = e^\alpha$

4. $a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(a\ln(x))$ donc $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{a^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\ln(a)a^x}{1} = \ln(a)$

   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(a^{1/x}-1) = \lim\limits_{t\to0^\pm} \frac{a^t-1}{t} = \ln(a)$

5. $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha$

   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha-1\right) = \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{(1+t)^\alpha-1}{t} = \alpha$

4. Dérivées

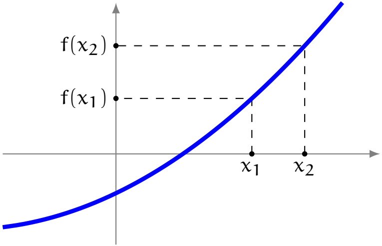
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

La notion de dérivée joue un rôle clé dans l'étude des fonctions.
Elle permet de déterminer les variations d'une fonction et de trouver ses extremums.

Rappels

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour tout x_1 et x_2 de I,

- f est *croissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f est *strictement croissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est *décroissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- f est *strictement décroissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.



f′ et Croissance/décroissance

$f'(x)$ = pente de la droite tangente à f en x = taux instantané de variation de y par rapport à x lorsque $y = f(x)$ donc

1. si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a; b]$ alors f est constante sur I ;
2. si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a; b]$ alors f est strictement croissante sur I ;
3. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a; b]$ alors f est strictement décroissante sur I.

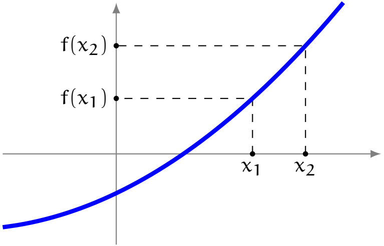
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

La notion de dérivée joue un rôle clé dans l'étude des fonctions.
Elle permet de déterminer les variations d'une fonction et de trouver ses extremums.

Rappels

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour tout x_1 et x_2 de I,

- f est *croissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f est *strictement croissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est *décroissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- f est *strictement décroissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.



f' et Croissance/décroissance

$f'(x)$ = pente de la droite tangente à f en x = taux instantané de variation de y par rapport à x lorsque $y = f(x)$ donc

1. si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est constante sur I ;
2. si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement croissante sur I ;
3. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement décroissante sur I.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Point stationnaire ou critique

Un point x_0 est stationnaire pour une fonction f si $f'(x_0) = 0$.
En ce point, la droite tangente est horizontale.

Exemple

- La fonction $f(x) = x^2 + 2x + 2$ a un point stationnaire :

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \implies x = -1$$

- La fonction $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ a deux points stationnaires :

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \implies x = 1,\ 2$$

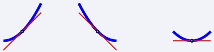
- La fonction $f(x) = xe^{-x}$ a un point stationnaire :

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x} = 0 \implies x = 1$$

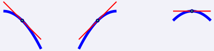
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Rappels (définition géométrique)

1. f est convexe sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ lorsque toutes les cordes reliant deux points du graphe sont au-dessus (= lorsque les droites tangentes au graphe de f en x_0 sont au-dessous pour tout $x_0 \in I$)



2. f est concave sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ si $-f$ est convexe



f'' et concavité/convexité

$f''(x) = (f'(x))'$ taux instantané de variation de la pente de la droite tangente à f en x donc

1. si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f' est strictement croissante sur I donc la pente de la tangente augmente et f est convexe sur I ;
2. $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f' est strictement décroissante sur I donc la pente de la tangente diminue et f est concave sur I.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

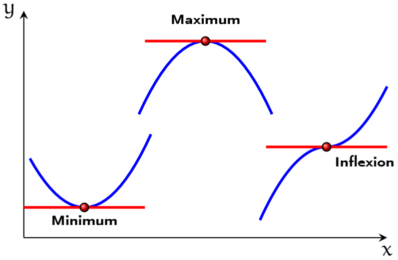
Nature d'un point stationnaire

Soit x_0 un point stationnaire (*i.e.* $f'(x_0) = 0$) pour une fonction f.

Maximum : x_0 est un maximum local si *localement* $f(x) \leq f(x_0)$, *i.e.* si le graphe de f est en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$

Minimum : x_0 est un minimum local si *localement* $f(x) \geq f(x_0)$, *i.e.* si le graphe de f est au dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$

Inflexion : si le graphe de f traverse la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$ alors x_0 n'est ni un minimum ni un maximum. Comme on change de concavité, c'est, de plus, un point d'inflexion.



Proposition

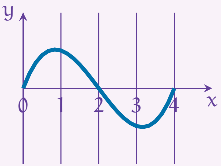
Soit x_0 un point stationnaire (i.e. $f'(x_0) = 0$).

1. *Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un maximum.*

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quels sont les points stationnaires ?
Sur quels intervalles $f'(x) > 0$?
Sur quels intervalles $f''(x) > 0$?



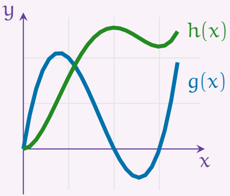
Correction

$x = 1$ et $x = 3$.

Sur $[0; 1[$ et sur $]3; 4]$.

Sur $[2; 4]$.

Testez-vous



$g(x) = h'(x)$
ou
$h(x) = g'(x)$?

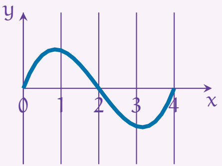
Correction

$g(x) = h'(x)$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quels sont les points stationnaires ?
Sur quels intervalles $f'(x) > 0$?
Sur quels intervalles $f''(x) > 0$?



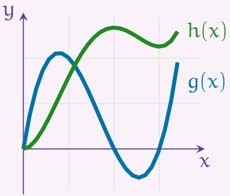
Correction

$x = 1$ et $x = 3$.

Sur $[0; 1[$ et sur $]3; 4]$.

Sur $[2; 4]$.

Testez-vous



$g(x) = h'(x)$
ou
$h(x) = g'(x)$?

Correction

$g(x) = h'(x)$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Calculer les points stationnaires et en établir la nature :

1. $f(x) = (x-2)^2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
4. $f(x) = xe^{-x}$
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$
6. $f(x) = \sin(x) + (1-x)\cos(x)$ pour $x \in [-1; 2]$
7. $f(x) = (x-1)^2 e^x$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

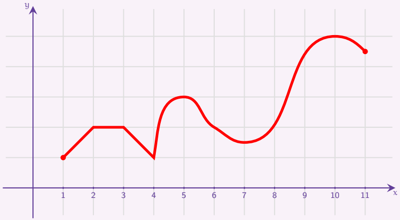
Correction

1. $f'(x) = 2(x-2)$, $f''(x) = 2$ donc $x = 2$ minimum
2. $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6(x-2)$ donc $x = 3$ minimum, $x = 1$ maximum
3. $f'(x) = 12(x^3 - 2x^2 + x) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$, $f''(x) = 11(3x^2 - 4x + 1)$ donc $x = 0$ minimum, $x = 1$ inflexion
4. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (-2+x)e^{-x}$ donc $x = 1$ maximum
5. $f'(x) = (1 + 2\ln(x))x$, $f''(x) = 2\ln(x) + x + 1$ donc $x = e^{-1/2}$ minimum
6. $f'(x) = (x-1)\sin(x)$, $f''(x) = \sin(x) + (x-1)\cos(x)$ donc $x = 0$ maximum, $x = 1$ minimum
7. $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$, $f'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$ donc $x = -1$ maximum, $x = 1$ minimum

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Indiquer le(s) min et max et indiquer s'ils sont globaux.



Correction

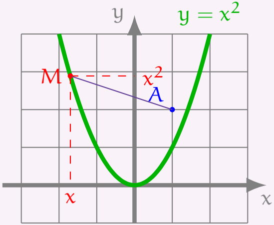
- Minima locaux : $x = 1$, $x \in [2, 3]$, $x = 4$, $x = 7$, $x = 11$
- Minima globaux : $x = 1$, $x = 4$
- Maxima locaux : $x \in [2, 3]$, $x = 5$, $x = 10$
- Maxima globaux : $x = 10$
- $x = 6$ est un point stationnaire d'inflexion

NB : en $x = 2$, en $x = 3$ et en $x = 4$ la fonction est continue mais n'est pas dérivable

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quel point de la parabole d'équation $y = x^2$ est le plus près du point A de coordonnées $(1, 2)$?



Aide

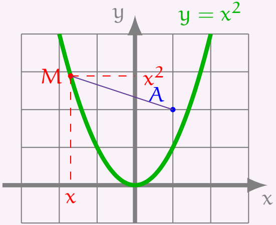
- M appartient à la parabole donc ses coordonnées sont de la forme (x, x^2).
- Distance entre A et M : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}$.
- Trouver le plus petit AM équivaut à trouver le plus petit AM^2. On définit donc comme fonction à minimiser

$$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 - 2x + 5.$$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quel point de la parabole d'équation $y = x^2$ est le plus près du point A de coordonnées $(1, 2)$?



Aide

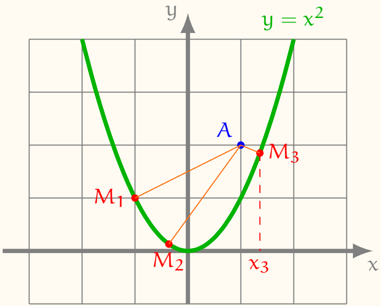
- M appartient à la parabole donc ses coordonnées sont de la forme (x, x^2).
- Distance entre A et M : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}$.
- Trouver le plus petit AM équivaut à trouver le plus petit AM^2. On définit donc comme fonction à minimiser

$$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 - 2x + 5.$$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0,\ f''(x_2) < 0,\ f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



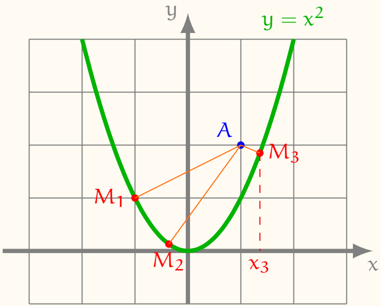
Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais que ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



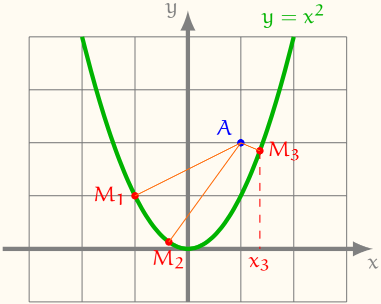
Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais que ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

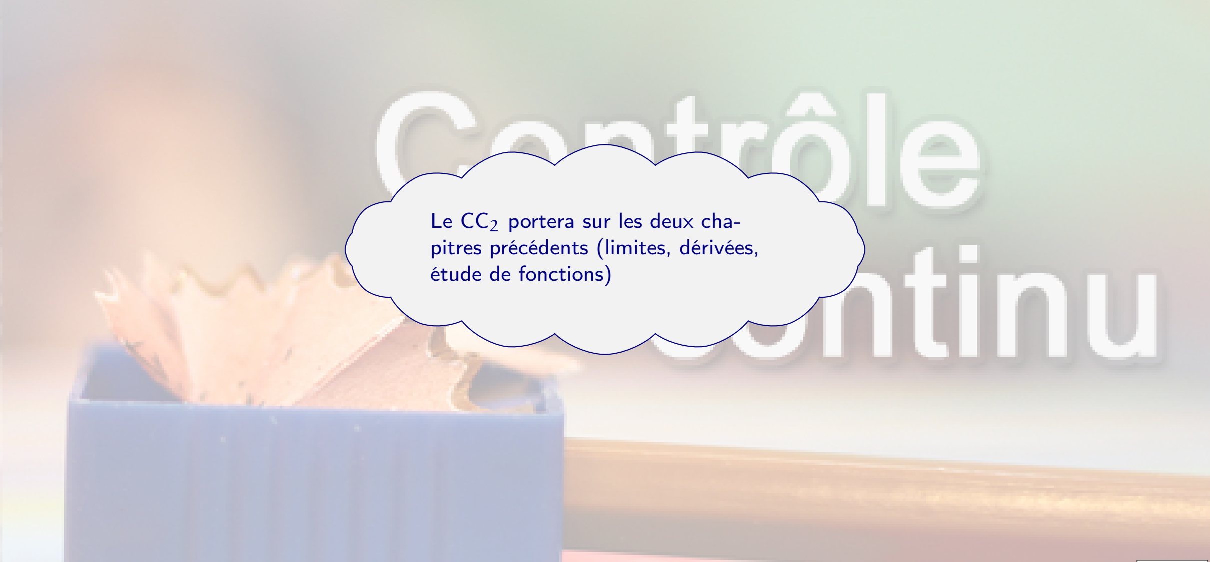
Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais que ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Pour réviser, s'entraîner et se tester

Pour réviser, s'entraîner et se tester

- OMB+ : chapitre "VII Calcul différentiel"
- Auto-Math : "Dérivation - TEST 1"

CC_1



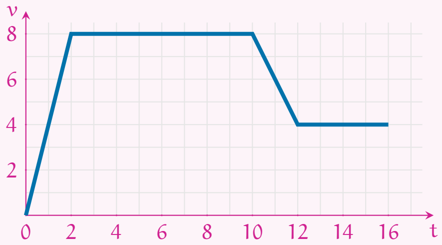
Le CC_2 portera sur les deux chapitres précédents (limites, dérivées, étude de fonctions)

5. Intégrales et calcul d'aires

Vitesse ⇝ distance parcourue

In "real life"

Celui ci-contre est le graphe de la vitesse d'un coureur en fonction du temps.
Quelle distance a-t-il parcouru en 16 s ?



5. Intégrales et calcul d'aires

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

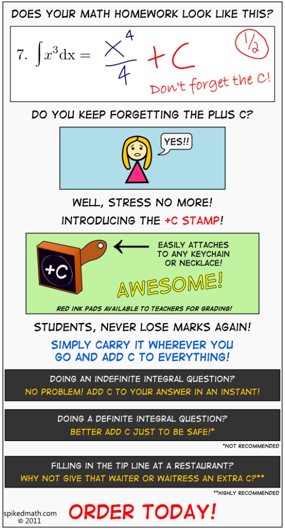
- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

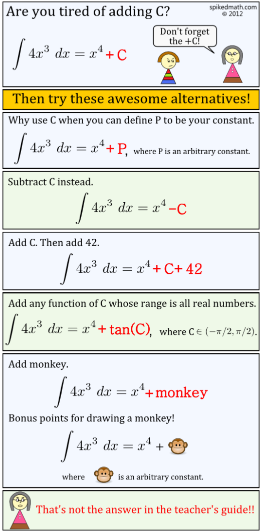
$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Exemple

- $(x^2)' = 2x$ donc $\int 2x dx = x^2 + c$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ donc $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$ donc $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

Primitives


DOES YOUR MATH HOMEWORK LOOK LIKE THIS?
7. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
1/2
Don't forget the C!
DO YOU KEEP FORGETTING THE PLUS C?
YES!!
WELL, STRESS NO MORE!
INTRODUCING THE +C STAMP!
+C
EASILY ATTACHES TO ANY KEYCHAIN OR NECKLACE!
AWESOME!
RED INK PADS AVAILABLE TO TEACHERS FOR GRADING!
STUDENTS, NEVER LOSE MARKS AGAIN!
SIMPLY CARRY IT WHEREVER YOU GO AND ADD C TO EVERYTHING!
DOING AN INDEFINITE INTEGRAL QUESTION?
NO PROBLEM! ADD C TO YOUR ANSWER IN AN INSTANT!
DOING A DEFINITE INTEGRAL QUESTION?
BETTER ADD C JUST TO BE SAFE!*
*NOT RECOMMENDED
FILLING IN THE TIP LINE AT A RESTAURANT?
WHY NOT GIVE THAT WAITER OR WAITRESS AN EXTRA C?**
**HIGHLY RECOMMENDED
spikedmath.com © 2011
ORDER TODAY!


Are you tired of adding C?
spikedmath.com © 2012
$\int 4x^3\, dx = x^4 + C$
Don't forget the +C!
Then try these awesome alternatives!
Why use C when you can define P to be your constant.
$\int 4x^3\, dx = x^4 + P$, where P is an arbitrary constant.
Subtract C instead.
$\int 4x^3\, dx = x^4 - C$
Add C. Then add 42.
$\int 4x^3\, dx = x^4 + C + 42$
Add any function of C whose range is all real numbers.
$\int 4x^3\, dx = x^4 + \tan(C)$, where $C \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Add monkey.
$\int 4x^3\, dx = x^4 + \text{monkey}$
Bonus points for drawing a monkey!
$\int 4x^3\, dx = x^4 +$
where is an arbitrary constant.
That's not the answer in the teacher's guide!!

5. Intégrales et calcul d'aires

Calcul de primitives

Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \dfrac{1}{\sin^2(x)} dx = -\dfrac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

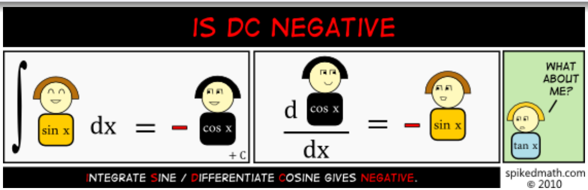
Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$



Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \ k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
  en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \ k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
  en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \ k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \ k\in\mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $\int (f(x)\times g(x))'dx = \int f'(x)\times g(x)dx + \int f(x)\times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx},\ k\in\mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $f(x)\times g(x) \quad = \int f'(x)\times g(x)dx + \int f(x)\times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u=f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx}=f'(x)$, soit encore $du=f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int \underbrace{g(f(x))}_{=u}\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u)+c = G(f(x))+c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $\quad f(x) \times g(x) \quad = \int f'(x) \times g(x)dx + \int f(x) \times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :

en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \quad k\in\mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $f(x)\times g(x) \quad = \int f'(x)\times g(x)dx + \int f(x)\times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :

en posant $u=f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx}=f'(x)$, soit encore $du=f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u)+c = G(f(x))+c}$$

Astuce mnémotechnique : soit $G'=g$ alors $\quad \Big(G\big(f(x)\big)\Big)' \quad = \quad G'\big(f(x)\big)\times f'(x)$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $f(x) \times g(x) \quad = \int f'(x) \times g(x)dx + \int f(x) \times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :

en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Astuce mnémotechnique : soit $G' = g$ alors $\int \Big(G\big(f(x)\big)\Big)'dx = \int G'\big(f(x)\big) \times f'(x)dx$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx},\quad k\in\mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $\quad f(x)\times g(x) \quad = \int f'(x)\times g(x)dx + \int f(x)\times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u)+c = G(f(x))+c}$$

Astuce mnémotechnique : soit $G' = g$ alors $\quad G\big(f(x)\big) \quad = \int G'\big(f(x)\big)\times f'(x)dx$

Calcul de primitives

Intégration par changement de variables : Tableau Généralisé

Testez-vous

1. $\displaystyle\int [u(x)]^n u'(x)dx$ pour $n \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx$
3. $\displaystyle\int e^{u(x)}u'(x)dx$
4. $\displaystyle\int \sin(u(x))u'(x)dx$
5. $\displaystyle\int \cos(u(x))u'(x)dx$
6. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}dx$

Calcul de primitives

Intégration par changement de variables : Tableau Généralisé

Testez-vous

1. $\int [u(x)]^n u'(x)dx$ pour $n \neq -1$
2. $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx$
3. $\int e^{u(x)}u'(x)dx$
4. $\int \sin(u(x))u'(x)dx$
5. $\int \cos(u(x))u'(x)dx$
6. $\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}dx$
7. $\int \frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))}dx$
8. $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}dx$
9. $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}dx$

Correction

Il suffit de remplacer $u(x)$ par t (ainsi $u'(x)dx = dt$) :

1. $\int t^n dt = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int \frac{1}{t}dt = \ln(|u(x)|) + c$
3. $\int e^t dt = e^x + c$
4. $\int \sin(t)dt = -\cos(u(x)) + c$
5. $\int \cos(t)dt = \sin(u(x)) + c$
6. $\int \frac{1}{\cos^2(t)}dt = \tan(u(x)) + c$
7. $\int \frac{1}{\sin^2(t)}dt = -\frac{1}{\tan(u(x))} + c$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin(u(x)) + c = -\arccos(u(x) + c$
9. $\int \frac{1}{1+t)^2}dt = \arctan(u(x)) + c$

Calcul de primitives

Exemple

Exemple

Calculer une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$ avec les trois méthodes.

- Intégration directe :

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx = \int u(x)u'(x)dx = \frac{[u(x)]^2}{2} = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$$

- Intégration par changement de variable :

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx \underset{\substack{u=\ln(x)\\ e^u=x\\ e^u du=dx}}{\underset{\uparrow}{=}} \int \frac{u}{e^u}e^u du = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$$

- Intégration par parties :

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} dx \underset{\substack{f(x)=\ln(x) \implies f'(x)=\frac{1}{x}\\ g'(x)=\frac{1}{x} \implies g(x)=\ln(x)}}{\underset{\uparrow}{=}} \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

i.e. $2\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \ln^2(x) + k$ et finalement $\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$.

Testez-vous

Calculer (et vérifier le calcul en dérivant le résultat) :

1. $\displaystyle\int x(1+x)^3 dx$
2. $\displaystyle\int (x^2+1)^{50} 2x dx$
3. $\displaystyle\int x e^{2x} dx$

Testez-vous

Calculer (et vérifier le calcul en dérivant le résultat) :

1. $\displaystyle\int x(1+x)^3 dx$
2. $\displaystyle\int (x^2+1)^{50} 2x dx$
3. $\displaystyle\int x e^{2x} dx$

Correction

1. $\displaystyle\int x(1+x)^3 dx = \int x(1+3x+3x^2+x^3) dx = \int x+3x^2+3x^3+x^4 dx = \frac{x^2}{2}+3\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+c$
2. $\displaystyle\int \underbrace{(x^2+1)}_{u}{}^{50} \underbrace{2xdx}_{du} = \int u^{50} du = \frac{u^{51}}{51}+c = \frac{(x^2+1)^{51}}{51}+c$
3. $\displaystyle\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^{2x}}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f} \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{g} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - e^{2x} + c = \left(\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}+c$

5. Intégrales et calcul d'aires

Intégrale définie et interprétation géométrique

Théorème fondamental du calcul intégral

Intégrale définie

L'intégrale définie sur $[a;b]$ d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F'(x) = f(x)$ (*i.e.* F est une primitive de f).

Intégrale définie et interprétation géométrique

Théorème fondamental du calcul intégral

Intégrale définie

L'intégrale définie sur $[a; b]$ d'une fonction $f\colon [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F'(x) = f(x)$ (*i.e.* F est une primitive de f).

Exemple

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Théorème fondamental du calcul intégral

Intégrale définie

L'intégrale définie sur $[a;b]$ d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F'(x) = f(x)$ (*i.e.* F est une primitive de f).

Exemple

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Propriétés

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple

$$\int_{-1}^{2} |x|dx = \int_{-1}^{0} |x|dx + \int_{0}^{2} |x|dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_{0}^{2} xdx = -\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{2} xdx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple

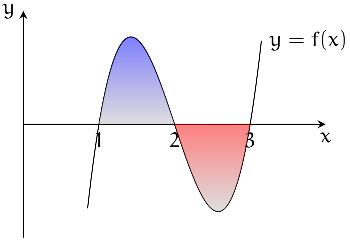
$$\int_{-1}^2 |x|dx = \int_{-1}^0 |x|dx + \int_0^2 |x|dx = \int_{-1}^0 -xdx + \int_0^2 xdx = -\int_{-1}^0 xdx + \int_0^2 xdx$$
$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}$$

Exemple

Si $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1, \\ x, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$ alors $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^3 xdx = [x]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 1 - 0 + \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 5$

Intégrale définie et interprétation géométrique

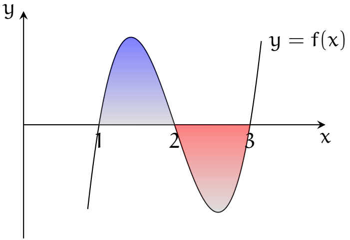
$$\int_a^b f(x)dx = (\text{Aire au-dessus de l'axe des abscisses}) - (\text{Aire en dessous de l'axe des abscisses})$$



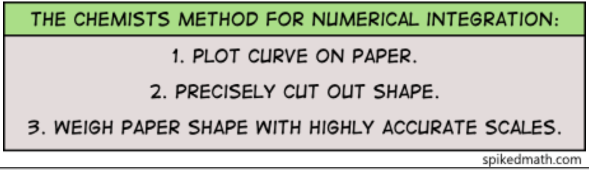
- Aire (bleue) $= \int_1^2 f(x)dx$
- Aire (rouge) $= -\int_2^3 f(x)dx$

Intégrale définie et interprétation géométrique

$$\int_a^b f(x)dx = (\text{Aire au-dessus de l'axe des abscisses}) - (\text{Aire en dessous de l'axe des abscisses})$$

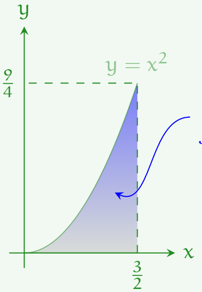


- Aire $= \int_1^2 f(x)dx$
- Aire $= -\int_2^3 f(x)dx$



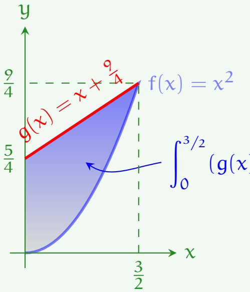
Intégrale définie et interprétation géométrique

Exemple



$$\int_0^{3/2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{3/2} = \frac{9}{8}$$

Exemple



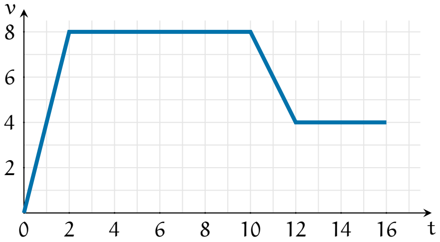
$$\int_0^{3/2} (g(x) - f(x))dx$$

5. Intégrales et calcul d'aires

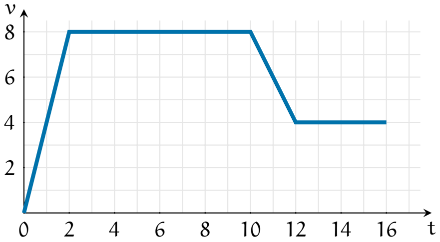
Déplacement, vitesse, accélération

Testez-vous

Celui ci-contre est le graphe de la vitesse d'un coureur en fonction du temps.
Quelle distance a-t-il parcouru en 16 s ?



Déplacement, vitesse, accélération



Testez-vous

Celui ci-contre est le graphe de la vitesse d'un coureur en fonction du temps.
Quelle distance a-t-il parcouru en 16 s ?

Correction

La vitesse v en fonction du temps t est la dérivée du déplacement s.
Calculer un déplacement en connaissant la vitesse, signifie chercher une fonction $t \mapsto s(t)$ telle que $s'(t) = v(t)$, autrement dit, s est une primitive de v.

La distance parcourue sera donnée par $s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{initial}})$, autrement dit par $\displaystyle\int_{t_{\text{initial}}}^{t_{\text{final}}} v(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_0^{16} v(t)\mathrm{d}t = \text{Aire sous la courbe} = 100\,\text{m}$$

Déplacement, vitesse, accélération

Testez-vous

1. Un train part de la station A et arrive à la station B en 6 min. Si la vitesse du train en mètres par minute est
$$v(t) = 24t^2(6-t),$$
quelle est la distance entre A et B ?
2. Une particule a une accélération de $a(t) = 2t$. Si sa vitesse à l'instant $t = 1$ est $v(1) = 6$ et la distance parcourue à l'instant $t = 1$ depuis le point initial est $s(1) = 17$, quelle distance aura-t-elle parcourue à l'instant $t = 2$?

Déplacement, vitesse, accélération

Testez-vous

1. Un train part de la station A et arrive à la station B en 6 min. Si la vitesse du train en mètres par minute est
$$v(t) = 24t^2(6-t),$$
quelle est la distance entre A et B ?
2. Une particule a une accélération de $a(t) = 2t$. Si sa vitesse à l'instant $t = 1$ est $v(1) = 6$ et la distance parcourue à l'instant $t = 1$ depuis le point initial est $s(1) = 17$, quelle distance aura-t-elle parcourue à l'instant $t = 2$?

Correction

1. $\displaystyle\int_0^6 v(t)dt = \left[48t^3 - 6t^4\right]_0^6 = 2592\,\text{m}$
2. $a(t) = v'(t) = 2t$ donc $v(t) = t^2 + c_1$. Puisque $v(1) = 6$ alors $c_1 = 5$ et $v(t) = t^2 + 5$.
$v(t) = s'(t)$ donc $s(t) = \frac{t^3}{3} + 5t + c_2$. Puisque $s(1) = 17$ alors $c_2 = \frac{35}{3}$ et $s(t) = \frac{t^3}{3} + 5t + \frac{35}{3}$.
Par conséquent, $s(2) = \frac{73}{3}$.

Pour réviser, s'entraîner et se tester

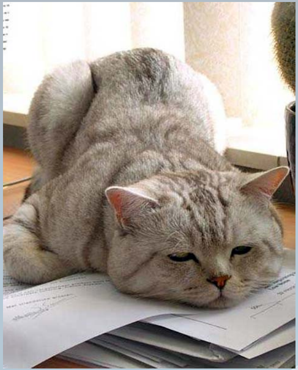
Pour réviser, s'entraîner et se tester

- OMB+ : chapitre "VIII Calcul Intégral"
- Auto-Math : "Intégration - TEST 1"

CC_1

Le CC_F portera sur la totalité du cours

Ouf, c'est fini



Bon courage !