

Étude mathématique et numérique de lois de conservation

Gloria Faccanoni

Année 2025 – 2026



AVERTISSEMENT : ce document a l'air bien présenté, mais ce sont juste mes notes de cours. Certaines parties sont bien travaillées, d'autres sont encore en brouillon. J'ai essayé d'éviter les erreurs, mais il peut en rester. Comme nous n'avons que 10 séances, certains sujets sont expliqués rapidement. Si vous voyez des erreurs ou si vous avez des idées pour l'améliorer, n'hésitez pas à me le dire!

Dernière mise-à-jour
Dimanche 12 octobre 2025

Séances

Ce cours était initialement conçu pour 14 séances de 3h. Depuis septembre 2025, il a été réduit à 10 séances de 3h. Cette réduction est due au fait que la partie dédiée aux équations scalaires linéaires (aspects théoriques et numériques), auparavant traitée dans ce cours, est désormais abordée en deuxième année et **considérée comme acquise**. Pour accompagner la révision de ces notions, une annexe leur est consacrée en fin de document.

Séance n°	Quand		Contenu provisoire
1	jeudi 18/9	matin	Scalaire Linéaire et Non-linéaire Théorique (CM)
2	vendredi 19/9	matin	Scalaire Non-linéaire Théorique (CM)
3	jeudi 25/9	matin	Scalaire Non-linéaire Théorique (TD)
4	vendredi 26/9	matin	Scalaire Non-linéaire Numérique (TP)
5	vendredi 3/10	matin	CC
6	jeudi 9/10	matin	Système Linéaire et Non-Linéaire Théorique (CM)
7	vendredi 10/10	matin	Système Non-Linéaire Théorique (TD)
8	jeudi 17/10	après-midi	Système Non-Linéaire Théorique (TP)
	Pause		
9	lundi 17/11	matin	Projet (solution exacte)
10	lundi 24/11	matin	Projet (TP)
	vendredi 19/12	minuit	Dépôt

CC Évaluation de 1h30 en présentiel portant sur le cas scalaire : résolution analytique d'un problème linéaire et d'un problème non-linéaire.

Projet Travail individuel sur le cas système :

- calcul analytique de la solution exacte pour tout problème de Riemann;
- implémentation de la solution exacte;
- implémentation d'un schéma VF et validation.

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
🌐 http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

1. Introduction	5
1.1. Lois de conservations	5
1.2. Exemples en une dimension d'espace	8
1.2.1. Cas général	8
1.2.2. Cas scalaire	10
1.3. Difficultés mathématiques	11
1.4. Difficultés numériques	12
 I. Équations scalaires non-linéaires (conservation)	
2. Équations non-linéaires : théorie mathématique	17
2.1. Exemple : le modèle Lighthill-Whitham-Richards (flux concave)	17
2.1.1. Méthode des caractéristiques et <i>travelling waves</i>	19
2.1.2. Problème de Riemann	21
2.1.3. Embouteillage et onde de choc	22
2.1.4. Démarrage à un feu tricolore qui passe au vert et onde de détente/raréfaction	24
2.1.5. Unicité et inégalité d'entropie : choc non entropique	29
2.2. Flux avec des points d'inflexions	33
2.3. Aide-mémoire	36
2.4. Exercices	39
3. Équations non-linéaires : méthodes numériques (volumes finis)	81
3.1. Un schéma basé sur la formulation quasi-linéaire (non-conservative)	82
3.2. Schéma de type "Volumes finis" (basé sur la formulation conservative)	84
4. Contrôles continus	95
4.1. Contrôle Continu 2022	95
4.2. Contrôle Continu 2023	99
4.3. Contrôle Continu 2024	103
4.4. Contrôle Continu 2025	109
 II. Systèmes d'équations linéaires et non-linéaires	
5. Systèmes hyperboliques de lois de conservations : théorie mathématique	117
5.1. Introduction	118
5.2. Hyperbolnicité d'un système	120
5.3. Rappels : cas scalaire (<i>i.e.</i> $p = 1$), flux linéaire et flux non-linéaire	122
5.4. Cas d'un système ($p > 1$), flux linéaire	124
5.5. Cas d'un système ($p > 1$), flux non-linéaire	127
5.5.1. Hyperbolnicité (stricte)	127
5.5.2. Champs caractéristiques	129
5.5.3. Problème de Riemann	131

5.5.4. Invariants de Riemann	132
5.5.5. Notion d'entropie	134
5.5.6. Étude des ondes de choc	136
5.5.7. Étude des discontinuités de contact	137
5.5.8. Étude des ondes de détente et courbes intégrales	138
6. Le système de SAINT-VENANT	141
6.1. Étude du système	142
6.1.1. Forme non conservative	142
6.1.2. Nature des champs caractéristiques	143
6.1.3. Invariants de Riemann	143
6.1.4. Résumé	145
6.2. Étude du Problème de Riemann	146
6.2.1. Étude des détentes	147
6.2.2. Étude des chocs	150
6.2.3. Solution complète	154
Étape I : calcul de l'état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$	155
Étape II : définition des vitesses des ondes et de la solution dans les détentes	156
Étape III : solution complète	157
6.2.4. Annexe : entropie	164
7. Un système hyperbolique avec des champs linéairement dégénérés	165
8. Systèmes hyperboliques de lois de conservations : méthodes numériques (volumes finis)	171
Liste des projets	173

ANNEXE : ÉQUATIONS SCALAIRES LINÉAIRES (TRANSPORT)

A. Équations linéaires : théorie mathématique (méthode des caractéristiques)	179
A.1. Méthode des caractéristiques dans \mathbb{R}	179
A.1.1. Équation linéaire homogène à vitesse constante : équation de transport	179
A.1.2. Première généralisation : coefficient d'advection dépendant de l'espace	181
A.1.3. Généralisations : vitesse non constante et/ou terme source	183
A.2. Méthodes des caractéristiques dans un domaine borné : bords d'inflow/outflow	187
A.2.1. Équation linéaire homogène à vitesse constante dans \mathbb{R}^+	187
B. Équations linéaires : méthodes numériques (différences finies)	193
B.1. Méthode des différences finies (DF) pour une EDP	193
B.2. Exemples de schémas pour l'équation de transport	196
B.3. La condition CFL	197
B.4. Propriétés d'un schéma DF	198
B.4.1. Stabilité	200
B.5. Exercices	202

Introduction

Ces notes concernent la solution de systèmes hyperboliques de lois de conservation. Il s'agit de systèmes d'équations aux dérivées partielles (généralement non linéaires) dépendant du temps et présentant une structure particulièrement simple.

Plusieurs raisons justifient l'étude approfondie de cette classe particulière d'équations :

- de nombreux problèmes pratiques en science et en ingénierie impliquent des quantités conservées et conduisent à des EDP de ce type;
- la résolution de ces systèmes présente des difficultés particulières (par exemple, la formation de discontinuités) qui doivent être traitées avec soin lors de la mise au point de méthodes numériques. Les méthodes basées sur des approximations naïves (comme l'utilisation de la méthode de différences finies standard) peuvent fonctionner correctement pour des solutions régulières, mais donnent en général des résultats catastrophiques en présence de discontinuités;
- bien que peu de solutions exactes soient connues, la structure mathématique de ces équations et de leurs solutions a été largement étudiée. Cette théorie peut être exploitée pour développer des méthodes spécifiques qui surmontent certaines des difficultés numériques rencontrées avec une approche plus naïve.

1.1. Lois de conservations

Dans ce cours, nous ne considérons que des lois de conservation en une dimension d'espace. Elles prennent donc la forme suivante

$$\partial_t \mathbf{W}(t, x) + \partial_x \mathbf{q}(\mathbf{W}(t, x)) = \mathbf{0}.$$

Inconnues L'inconnue $\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est un vecteur à p composantes représentant les quantités conservées (variables d'état). Par exemple, dans un problème de dynamique des fluides, il s'agira de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Plus précisément, $W_j(t, x)$, la j -ème composante de \mathbf{W} , est la fonction de densité pour la j -ème variable d'état, avec l'interprétation suivante : $\int_{x_1}^{x_2} W_j(t, x) dx$ est la quantité totale de cette variable d'état qui se trouve dans l'intervalle $[x_1; x_2]$ à l'instant t . Les variables d'état W_j changeront généralement au fur et à mesure que le temps évolue. Le fait que les composantes W_j soient conservées signifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} W_j(t, x) dx$ doit être constant à chaque instant t .

Flux Le flux de la j -ème composante est donné par une fonction $q_j(\mathbf{W}(t, x))$. La fonction $\mathbf{q}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ dont la j -ème composante est $q_j(\mathbf{W})$ est appelée fonction de flux pour le système de lois de conservation. La principale hypothèse sous-jacente est que la connaissance de la valeur de $\mathbf{W}(t, x)$ à un moment donné nous permet de déterminer le taux d'écoulement, ou flux, de chaque variable d'état à (t, x) . Généralement, les fonctions q_j sont des fonctions non linéaires de \mathbf{W} , ce qui conduit à des systèmes d'EDP non linéaires. En général, il n'est pas possible de dériver des solutions exactes à ces équations, d'où la nécessité de concevoir et d'étudier des méthodes numériques pour leur résolution approchée.

Condition initiale L'EDP doit être complétée par des conditions initiales (et éventuellement des conditions aux limites si le domaine spatial est borné). Le problème le plus simple est le problème de valeur initiale pur, ou problème de Cauchy, dans lequel l'EDP est valable pour $-\infty < x < +\infty$ et $t \geq 0$. Dans ce cas, nous devons spécifier uniquement les conditions initiales :

$$\mathbf{W}(0, x) = \mathbf{W}_{\text{init}}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hyperbolité Considérons la matrice jacobienne $\mathbf{q}'(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{q})$ de la fonction flux \mathbf{q} . C'est une matrice de taille $p \times p$. Nous étudierons les problèmes pour lesquels cette matrice jacobienne a la propriété suivante : pour chaque valeur de \mathbf{W} ,

1. ses valeurs propres sont réelles ;
2. la matrice est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble complet de p vecteurs propres linéairement indépendants.

Un système qui satisfait cette condition est dit hyperbolique.

Formes intégrales Pour voir comment les lois de conservation découlent des principes physiques, nous commençons par dériver l'équation de conservation de la masse dans un problème unidimensionnel de dynamique des gaz, par exemple l'écoulement dans un tube où les propriétés du gaz, telles que la densité et la vitesse, sont supposées être constantes dans chaque section du tube.

Soit x la distance le long du tube et $\varrho(t, x)$ la densité du gaz au point x et au temps t . Cette densité est définie de telle sorte que $m_{[x_1; x_2]}(t)$, la masse totale de gaz à l'instant t dans une section donnée de x_1 à x_2 , est donnée par l'intégrale de la densité :

$$m_{[x_1; x_2]}(t) = \int_{x_1}^{x_2} \varrho(t, x) \, dx.$$

Si nous supposons que les parois du tube sont imperméables et que la masse n'est ni créée ni détruite, alors la masse dans cette section ne peut changer qu'en raison de l'écoulement du gaz à travers les points d'extrémité x_1 ou x_2 .

Soit maintenant $v(t, x)$ la vitesse du gaz au point x à l'instant t . Le taux d'écoulement, ou flux de gaz passant par ce point, est alors donné par

$$\text{flux de masse au point } (t, x) = \varrho(t, x) v(t, x).$$

D'après nos hypothèses, le taux de variation de la masse $m_{[x_1; x_2]}(t)$ à l'instant t dans $[x_1; x_2]$ est donné par la différence entre les flux qui passe en x_1 et en x_2 :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \varrho(t, x) \, dx = \varrho(t, x_1) v(t, x_1) - \varrho(t, x_2) v(t, x_2).$$

Il s'agit d'**une forme intégrale de la loi de conservation**.

Le cas général s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} W_j(t, x) \, dx = q_j(\mathbf{W}(t, x_1)) - q_j(\mathbf{W}(t, x_2)).$$

Forme intégrale \rightsquigarrow forme différentielle Une autre forme est obtenue en intégrant cette loi entre les instants t_1 et t_2 , ce qui donne une expression pour la masse dans $[x_1; x_2]$ au temps $t_2 > t_1$ en termes de la masse au

temps t_1 et du flux total (intégré) à chaque frontière pendant cet intervalle de temps :

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(t_2, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \varrho(t_1, x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \varrho(t, x_1) v(t, x_1) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varrho(t, x_2) v(t, x_2) dt.$$

Pour dériver la forme différentielle de la loi de conservation, nous devons maintenant supposer que $\varrho(t, x)$ et $v(t, x)$ sont des fonctions différentiables. En utilisant alors

$$\varrho(t_2, x) - \varrho(t_1, x) = \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \varrho(t, x) dt$$

et

$$\varrho(t, x_2) v(t, x_2) - \varrho(t, x_1) v(t, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \partial_x (\varrho(t, x) v(t, x)) dx$$

on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [\partial_t \varrho(t, x) + \partial_x (\varrho(t, x) v(t, x))] dx dt = 0.$$

Puisque cela doit être vrai pour toute section $[x_1; x_2]$ et sur tout intervalle de temps $[t_1; t_2]$, nous concluons que l'intégrande doit être identiquement zéro, c'est-à-dire,

$$\partial_t \varrho + \partial_x (\varrho v) = 0 \quad [\text{équation de conservation de la masse}].$$

C'est la forme différentielle souhaitée de la loi de conservation pour la conservation de la masse.

Cette loi de conservation ne peut être résolue que si la vitesse $v(t, x)$ est connue à priori ou est connue en tant que fonction de ϱ . Si c'est le cas, alors ϱv est une fonction de ϱ uniquement, disons $\varrho v = q(\varrho)$, et l'équation de conservation de la masse devient une loi de conservation scalaire pour ϱ :

$$\partial_t \varrho + \partial_x q(\varrho) = 0.$$

Plus généralement, l'équation de conservation de la masse doit être résolue en conjonction avec les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Nous nous contenterons de les énoncer dans le cas des équations d'Euler de la dynamique des gaz. de la dynamique des gaz :

$$\begin{aligned} \partial_t (\varrho v) + \partial_x (\varrho v^2 + p) &= 0 && [\text{équation de conservation de la quantité du mouvement}], \\ \partial_t (\varrho E) + \partial_x ((\varrho E + p)v) &= 0 && [\text{équation de conservation de l'énergie totale}] \end{aligned}$$

Notons que ces équations impliquent une autre quantité, la pression p , qui doit être spécifiée comme une fonction donnée de ϱ , ϱv et ϱE pour que les flux soient des fonctions bien définies des seules quantités conservées. Cette équation supplémentaire est appelée *loi d'état* et dépend des propriétés physiques du gaz étudié.



1.2. Exemples en une dimension d'espace

1.2.1. Cas général

Dans ce cours nous ne considérerons que le **cas monodimensionnel**. Pour $p \geq 1$ (nombre d'équations) on cherche l'unique fonction

$$\begin{aligned}\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \mathbf{W}(t, x)\end{aligned}$$

solution (faible entropique) du système d'EDPs

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x (\mathbf{q}(\mathbf{W})) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{W}(0, x) = \mathbf{W}_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned}\mathbf{q}: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{W} &\mapsto \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} q_1(\mathbf{W}) \\ q_2(\mathbf{W}) \\ \vdots \\ q_p(\mathbf{W}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

C'est une loi de conservation : lorsqu'on intègre les p EDP sur un volume $V = [x_1; x_2] \subset \mathbb{R}^d$ élémentaire, on trouve pour chaque composante

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} W_j(t, x) dx = q_j(\mathbf{W}(t, x_1)) - q_j(\mathbf{W}(t, x_2)) dt = 0$$

pour tout x_1, x_2, t . De façon équivalente, en intégrant entre t_1 et t_2 on trouve la forme intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} W_j(t_2, x) dx = \int_{x_1}^{x_2} W_j(t_1, x) dx + \int_{t_1}^{t_2} q_j(\mathbf{W}(t, x_1)) - q_j(\mathbf{W}(t, x_2)) dt = 0.$$

 EXEMPLE 1.1 (ÉQUATIONS DE ONDES ET ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN : $p = 2$, FLUX LINÉAIRE) Considérons le cas d'un système de $p = 2$ EDP avec un **flux linéaire** $\mathbf{q}(\mathbf{W}) = \mathbb{A}\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ avec $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ constante :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A} \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

Les équations des ondes et les équations de Cauchy-Riemann en sont un exemple :

- Équation des ondes :

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de \mathbb{A} sont ± 1 , le système est donc (strictement) hyperbolique.

Notons que cela équivaut à

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x w_2 = 0 \\ \partial_t w_2 + \partial_x w_1 = 0 \end{cases}$$

Si on dérive les deux équations par rapport à t (resp. à x) on obtient les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2 = 0, \\ \partial_{tt} w_2 + \partial_{tx} w_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2 = 0 \\ \partial_{xt} w_2 + \partial_{xx} w_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $(\partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2) - (\partial_{xt} w_2 + \partial_{xx} w_1) = 0$ et $(\partial_{tt} w_2 + \partial_{tx} w_1) - (\partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 - \partial_{xx} w_1 = 0 \\ \partial_{tt} w_2 - \partial_{xx} w_2 = 0 \end{cases}$$

- Équation de Cauchy-Riemann :

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de \mathbb{A} sont $\pm i$, la matrice est donc diagonalisable mais les valeurs propres ne sont pas réelles : le système n'est pas hyperbolique.

Notons que cela équivaut à

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x w_2 = 0 \\ \partial_t w_2 - \partial_x w_1 = 0 \end{cases}$$

Si on dérive les deux équations par rapport à t (resp. à x) on obtient les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2 = 0 \\ \partial_{tt} w_2 - \partial_{tx} w_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2 = 0 \\ \partial_{xt} w_2 - \partial_{xx} w_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $(\partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2) - (\partial_{xt} w_2 - \partial_{xx} w_1) = 0$ et $(\partial_{tt} w_2 - \partial_{tx} w_1) + (\partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 + \partial_{xx} w_1 = 0 \\ \partial_{tt} w_2 + \partial_{xx} w_2 = 0 \end{cases}$$

 EXEMPLE 1.2 (LE P-SYSTÈME : $p = 2$, FLUX NON-LINÉAIRE) Considérons le cas de $p = 2$ EDP avec un **flux non-linéaire** :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x (\mathbf{q}(\mathbf{W})) = \mathbf{0}$$

soit encore

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} q_1(w_1, w_2) \\ q_2(w_1, w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un exemple typique de ce type de système est le p -système qui décrit la dynamique des gaz isentropiques. Si on se place en coordonnées lagrangiennes et on note $\tau > 0$ le volume spécifique, u la vitesse et $v \mapsto p(v) > 0$ la pression du gaz, les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement donnent le système :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} -u \\ p(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 EXEMPLE 1.3 (LE SYSTÈME D'EULER : $p = 3$, FLUX NON-LINÉAIRE) L'exemple le plus connu de ce type de système est celui qui décrit la dynamique des gaz. C'est un système de $p = 3$ EDP avec un **flux non-linéaire** :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x (\mathbf{q}(\mathbf{W})) = \mathbf{0}$$

soit encore

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} q_1(w_1, w_2, w_3) \\ q_2(w_1, w_2, w_3) \\ q_3(w_1, w_2, w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les équations d'Euler de la dynamique des gaz constituent un système de lois de conservation particulièrement important. Plus généralement, les équations fondamentales de la dynamique des fluides sont les équations de Navier-Stokes, mais celles-ci incluent les effets de la viscosité du fluide et la fonction de flux qui en résulte dépend non seulement des variables d'état mais aussi de leurs gradients, de sorte que les équations ne sont pas de la forme générale et ne sont pas hyperboliques. Un gaz, cependant, est suffisamment dilué pour que la viscosité puisse souvent être ignorée. En supprimant ces termes, on obtient un système hyperbolique de lois de conservation avec $p = d + 2$ équations dans d dimensions d'espace, correspondant à la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement dans chaque direction. Dans une dimension d'espace dimension de l'espace,

ces équations prennent la forme suivante : on note $\mathbf{W} = (\varrho, \varrho u, \varrho E)$ où ϱ est la densité spécifique, u la vitesse et $E = \frac{1}{2}u^2 + e$ l'énergie totale, e étant l'énergie spécifique. La conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale nous donnent le système suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho E \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 + p(\varrho, e) \\ (\varrho E + p(\varrho, e))u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Cas scalaire

Avant d'aborder les difficultés des systèmes d'équations couplées, nous allons d'abord étudier le cas d'une équation scalaire, où $p = 1$. De nombreuses difficultés rencontrées avec les systèmes d'équations sont déjà rencontrées dans le cas scalaire, et une bonne compréhension de l'équation scalaire est nécessaire avant de poursuivre.

Dans le **cas scalaire** ($p = 1$) on cherche l'unique fonction

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto w(t, x) \end{aligned}$$

solution (faible entropique) de l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x q(w) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(0, x) = w_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto q(w) \end{aligned}$$

 **EXEMPLE 1.4 (BURGERS)** L'équation de Burgers est le prototype de l'équation scalaire monodimensionnelle **non-linéaire à flux convexe** :

$$\partial_t w + \partial_x \left(q(w) \right) = 0 \quad q(w) = \frac{w^2}{2}$$

 **EXEMPLE 1.5 (LWR)** Un autre exemple est l'équation de conservation de la masse dans le cas où v est une fonction connue de $\varrho(t, x)$. Cela ne se produit pas dans la dynamique des gaz, mais peut se produire dans d'autres problèmes où la même loi de conservation s'applique. Un exemple est un modèle simple d'écoulement du trafic le long d'une autoroute (le modèle LWR, étudié en détail au chapitre 2). Ici, ϱ est la densité des véhicules et la vitesse à laquelle les gens conduisent est supposée ne dépendre que de la densité locale.

L'équation LWR du trafic routier est le prototype de l'équation scalaire monodimensionnelle **non-linéaire à flux concave**. Si on note $w \in [0, w_{\max}]$ la densité des véhicules, l'évolution de la densité vérifie l'EDP suivante :

$$\partial_t w + \partial_x \left(q(w) \right) = 0, \quad \text{avec} \quad q(w) = w \left(1 + \frac{w}{w_{\max}} \right).$$

 **EXEMPLE 1.6 (BUCHLEY-LEVERETT)** L'équation de Buchley-Leverett est le prototype de l'équation scalaire monodimensionnelle **non-linéaire à flux ni convexe ni concave**. Si on note $w \in [0; 1]$ la saturation, μ_e la viscosité de l'eau, μ_h la viscosité de l'huile, on a

$$\partial_t w + \partial_x \left(q(w) \right) = 0, \quad \text{avec} \quad q(w) = \frac{w^2}{w^2 + (1 - w^2) \frac{\mu_e}{\mu_h}}.$$

 **EXEMPLE 1.7 (ADVECTION)** Une autre possibilité est que la vitesse $v(t, x)$ soit donnée a priori, complètement indépendante de l'inconnue ϱ . Supposons, par exemple, que ϱ représente la densité d'un produit chimique dans de l'eau qui coule, un polluant dans un cours d'eau par exemple. Puisque la quantité totale de ce produit chimique est conservée, la même dérivation que ci-dessus donne à nouveau $\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0$. Il est maintenant raisonnable de considérer le cas où v , la vitesse du fluide, est connue et peut être considérée comme donnée. Les changements de concentration du produit chimique n'auront que peu ou pas d'effet sur la dynamique du fluide et il n'y aura donc pas de couplage dans lequel v dépend de ϱ . Dans cette loi de conservation la fonction de flux dépend maintenant explicitement de x et t ainsi que de ϱ et n'est donc pas de la forme précédente. Cependant, si la vitesse est constante, $v(t, x) = c$, alors $q(\varrho) = c\varrho$. Cette équation est connue sous le nom d'équation d'advection linéaire ou parfois d'équation d'onde unidirectionnelle.

L'équation d'advection à vitesse constante est le prototype de l'équation scalaire monodimensionnelle **linéaire** :

$$\partial_t w + c\partial_x w = 0$$

i.e. $q(w) = cw$ avec c constante.

Diffusion, viscosité Considérons l'exemple de l'advection d'un produit chimique passant par un point x d'un tube. Outre le flux advectif $q(\varrho) = c\varrho$, il existe également un flux dû à la diffusion. Ce flux est déterminé par la loi de Fourier de la conduction de la chaleur, qui stipule que le flux diffusif est simplement proportionnel au gradient de concentration, i.e. $D\partial_x \varrho$. Le coefficient de diffusion D est positif, le signe moins dans l'équation est nécessaire car le flux s'éloigne des concentrations les plus élevées. La combinaison de ce flux avec le flux advectif $c\varrho$ modifie la loi de conservation qui devient

$$\partial_t \varrho + \partial_x(c\varrho - D\partial_x \varrho) = 0 \quad \leadsto \quad \partial_t \varrho + c\partial_x \varrho = D\partial_{xx} \varrho.$$

Cette nouvelle équation est appelée équation d'advection-diffusion (ou parfois équation de convection-diffusion). Tout en restant une loi de conservation, **elle n'est plus hyperbolique**, il s'agit d'une équation parabolique. L'une des différences majeures est qu'elle a toujours des solutions régulières même si les données initiales sont discontinues. Nous pouvons alors considérer l'équation $\partial_t \varrho + c\partial_x \varrho = 0$ comme une approximation de $\partial_t \varrho + c\partial_x \varrho = D\partial_{xx} \varrho$ valable pour D très petit, mais il peut être nécessaire de prendre en compte l'effet de D afin d'interpréter correctement les solutions discontinues de $\partial_t \varrho + c\partial_x \varrho = 0$. Cette démarche est à la base de la méthode dite "de viscosité évanescante" qui permet de sélectionner, parmi une infinité de solutions faibles (discontinues), celle physiquement pertinente.

1.3. Difficultés mathématiques

La solution d'un système hyperbolique peut tendre vers une fonction discontinue en un temps fini même si la donnée initiale est régulière. Or, les **solutions discontinues** ne satisfont pas le système d'EDP de manière classique en tout point, car les dérivées ne sont pas définies aux discontinuités. Afin de définir ce que nous entendons par solution à la loi de conservation dans ce contexte, il est nécessaire de comprendre d'abord comment les lois de conservation sont dérivées à partir des principes physiques. Nous avons déjà vu que le principe de conservation conduit à une **formulation intégrale** de la loi de conservation. Le point crucial est que la formulation intégrale reste valable même pour les solutions discontinues. Cependant, la formulation intégrale est plus difficile à utiliser que l'équation différentielle, en particulier lorsqu'il s'agit de la discréétisation. Étant donné que l'EDP reste valable sauf aux discontinuités, une autre approche consiste à compléter les équations différentielles par des **conditions de saut** supplémentaires qui doivent être satisfaites à travers les discontinuités. Ces conditions peuvent être déduites en utilisant la formulation intégrale.

Afin d'éviter d'avoir à imposer explicitement ces conditions, nous introduirons également la "**forme faible**" des équations différentielles. Cette forme implique à nouveau des intégrales et permet des solutions discontinues, mais elle est plus facile à utiliser que la formulation intégrale originale des lois de conservation. Cependant, on va être confronté à une autre difficulté mathématique : la possible **non-unicité des solutions faibles**. Il existe souvent plusieurs solutions faibles à la loi de conservation qui correspondent aux mêmes données initiales. Si notre loi de conservation doit modéliser le monde réel, il est évident qu'une seule de ces solutions est physiquement pertinente. Le fait que les équations aient d'autres solutions est dû au fait que nos équations ne sont qu'une représentation approximative de la réalité et qu'elles négligent certains effets physiques (comme les effets diffusifs ou visqueux). Par conséquent, nous devons utiliser notre connaissance de ces effets ignorés pour **sélectionner la bonne solution faible**. Une approche générale consiste à introduire un terme diffusif dans les équations afin d'obtenir une solution régulière unique, puis à faire tendre vers zéro le coefficient de ce terme. Cette méthode, connue sous le nom de "viscosité évanescante", peut être utilisée dans l'analyse des lois de conservation, mais elle n'est manifestement pas optimale car elle nécessite l'étude d'un système d'équations plus complexe. Cela va à l'encontre de notre objectif initial d'ignorer les termes visqueux. Par conséquent, nous cherchons à dériver d'autres conditions qui peuvent être imposées directement aux solutions faibles du système hyperbolique pour sélectionner la solution physiquement correcte. Pour la dynamique des gaz, nous pouvons faire appel à la deuxième loi de la thermodynamique, qui stipule que l'entropie ne diminue pas. En particulier, lorsque les molécules d'un gaz traversent un choc, leur entropie doit augmenter. Cette condition s'avère suffisante pour reconnaître de manière précise les discontinuités physiquement correctes et spécifier une solution unique. Pour d'autres systèmes de lois de conservation, il est souvent possible de dériver des conditions similaires. Ces conditions sont généralement appelées **conditions d'entropie** en analogie avec la dynamique des gaz.

1.4. Difficultés numériques

Lorsque nous essayons d'approcher ces solutions numériquement, de nouveaux problèmes se posent. Nous pouvons constater par exemple qu'une discréttisation du système d'EDP par différences finies devient inappropriée près des discontinuités, autrement-dit là où on ne peut pas dériver la solution au sens classique. En effet, si nous essayons de calculer des solutions discontinues aux lois de conservation en utilisant des méthodes standards conçues pour des solutions régulières, les résultats numériques obtenus sont généralement très médiocres, voir totalement faux.

Étant donné que les EDP restent valides en dehors des discontinuités, une approche possible consiste à combiner une méthode standard de différences finies dans les régions où la solution est régulière avec une procédure explicite pour suivre l'emplacement des discontinuités. Cela correspond à une version numérique de l'approche mathématique où les EDP sont complétées par des conditions de saut à travers les discontinuités. Cette approche est généralement appelée "suivi des chocs". Dans une dimension spatiale, cette méthode est généralement utilisable. Cependant, en 2D, les discontinuités sont généralement le long de courbes, et en 3D, elles forment des surfaces. De plus, dans les problèmes réalistes, il peut y avoir de nombreuses surfaces de ce type qui interagissent de manière complexe au fil du temps. Bien que le suivi des chocs soit toujours possible, sa mise en œuvre devient beaucoup plus complexe.

Idéalement, nous aimerais disposer d'une méthode numérique capable de fournir automatiquement des approximations précises des solutions discontinues, sans nécessiter de suivi explicite ou de conditions de saut. Les méthodes qui visent cet objectif sont appelées méthodes de "capture des chocs". Actuellement, il existe de nombreuses méthodes de ce type disponibles. Cependant, la compréhension de ces méthodes requiert une solide connaissance de la théorie mathématique des lois de conservation, ainsi qu'une intuition physique sur le comportement des solutions. Par conséquent, avant d'aborder les méthodes numériques, il est nécessaire de traiter un certain nombre de sujets "théoriques" afin de bien comprendre les fondements de ces méthodes. Cela implique d'explorer en profondeur la théorie mathématique des lois de conservation et

d'acquérir une intuition sur le comportement des solutions. Une fois ces bases établies, nous serons prêts à étudier les différentes méthodes numériques disponibles.

Problème de Riemann Dans le cas des systèmes hyperboliques linéaires, les courbes caractéristiques jouent un rôle essentiel. Pour les problèmes non linéaires, la généralisation de cette théorie la plus couramment utilisée dans le développement de méthodes numériques est la résolution d'un problème de Riemann. Ce problème consiste en la résolution de la loi de conservation avec des données initiales spécifiques, qui consistent en deux états constants séparés par une seule discontinuité :

$$\mathbf{W}_{\text{init}}(x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & x < 0, \\ \mathbf{W}_R, & x > 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème a une structure relativement simple et peut être calculée explicitement dans de nombreux cas. Avec une méthode numérique, nous calculons un ensemble de valeurs discrètes $\{\mathbf{W}_i^n\}$, approximation de $\mathbf{W}(x_i, t^n)$ sur un ensemble de points de grille $\{(x_i, t^n)\}$. Beaucoup d'informations sur la structure locale de la solution près de (x_i, t^n) sont obtenues en résolvant un problème de Riemann avec les données $\mathbf{W}_L = \mathbf{W}_i^n$ et $\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_{i+1}^n$. De nombreuses méthodes numériques utilisent ces solutions de Riemann, c'est pourquoi nous étudierons ce type de condition initiale.

Première partie

ÉQUATIONS SCALAIRES NON-LINÉAIRES (CONSERVATION)

2.

Équations non-linéaires : théorie mathématique

On étudie une EDP hyperbolique scalaire ($p = 1$) monodimensionnelle ($d = 1$) dans le cas d'un flux non-linéaire : on cherche l'unique fonction

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto w(t, x) \end{aligned}$$

solution (faible entropique) de l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x q(w) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(0, x) = w_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto q(w). \end{aligned}$$

La méthode des caractéristiques peut être étendue pour étudier une loi de conservation non linéaire lorsque la donnée initiale est régulière. Cependant, la non-linéarité entraîne l'apparition de singularités après un certain temps, même si la condition initiale est régulière. On peut résoudre ce problème en introduisant le concept de *solution faible*. Cette notion conduit aux relations de saut de Rankine-Hugoniot, mais l'unicité de la solution du problème de Cauchy est perdue. Pour sélectionner la "bonne" solution parmi les solutions faibles, on introduit la notion d'entropie associée au système. Une solution faible entropique d'une loi de conservation est une solution faible qui satisfait une inégalité supplémentaire. Cette condition conduit au théorème de Kruckov, qui établit que le problème de Cauchy possède *une unique solution faible entropique*.

2.1. Exemple : le modèle Lighthill-Whitham-Richards (flux concave)

Considérons un modèle macroscopique du trafic dans un tunnel. Le modèle étudié a été développé par M.J. Lighthill, G.B. Whitham et P.I. Richards (1955).

Notations. Considérons trois fonctions dépendantes du temps t et de la position x :

- $(t, x) \mapsto \rho(t, x)$ le nombre de voitures par mètre (densité),
- $(t, x) \mapsto v(t, x)$ la vitesse moyenne,
- $(t, x) \mapsto q(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(t, x)v(t, x)$ le flux des voitures par seconde.

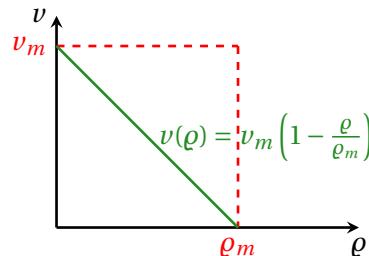
Hypothèses.

1. On considère une route unidimensionnelle de longueur infinie (*i.e.* il n'y a qu'une voie et ce n'est pas possible de dépasser).
2. Il n'y a pas d'intersections, ainsi le nombre de voitures sur la route est constant.
3. La vitesse moyenne v dépend exclusivement de la densité des véhicules : $v = v(\rho)$ ainsi $q(\rho) = \rho v(\rho)$. Autrement dit, on suppose que pour une densité donnée il y a une et une seule vitesse univoquement déterminée et un changement de ρ détermine un changement instantané de la vitesse. On a alors besoin d'une "loi d'état", *i.e.* d'une relation constitutive pour la fonction $v(\rho)$.
 - Si ρ est petit, il semble raisonnable de supposer que $v(\rho) \approx v_m$ vitesse maximale.
 - Si $\rho = \rho_m$, la densité maximale qui correspond à des voitures "pare-choc contre pare-choc", il semble raisonnable de supposer que $v(\rho_m) = 0$ (la route est saturée).
 - Si ρ augmente, on s'attend à ce que la vitesse diminue : $v'(\rho) \leq 0$ (la vitesse augmente lorsque les voitures sont de moins en moins denses).

Le modèle le plus simple qui traduit ces idées est une fonction affine qui passe par les deux points $(0, v_m)$ et $(\rho_m, 0)$:

$$v(\rho) = \frac{0 - v_m}{\rho_m - 0} (\rho - \rho_m) + 0 = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right). \quad (2.1)$$

Les constantes v_m et ρ_m représentent respectivement la vitesse maximale et la densité maximale. Des valeurs vraisemblables sont $v_m = 90 \text{ km h}^{-1}$, $\rho_m = 110 \text{ voitures/km}$.



Loi de conservation. Le modèle sous forme conservative s'écrit

$$\partial_t \rho + \partial_x q(\rho) = 0, \quad q(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right). \quad (2.2)$$

Si ρ est une fonction dérivable, on peut réécrire le modèle sous une forme non-conservative (quasi-linéaire) comme

$$\partial_t \rho + q'(\rho) \partial_x \rho = 0, \quad q'(\rho) = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right). \quad (2.3)$$

Remarque 1 Le flux est défini comme

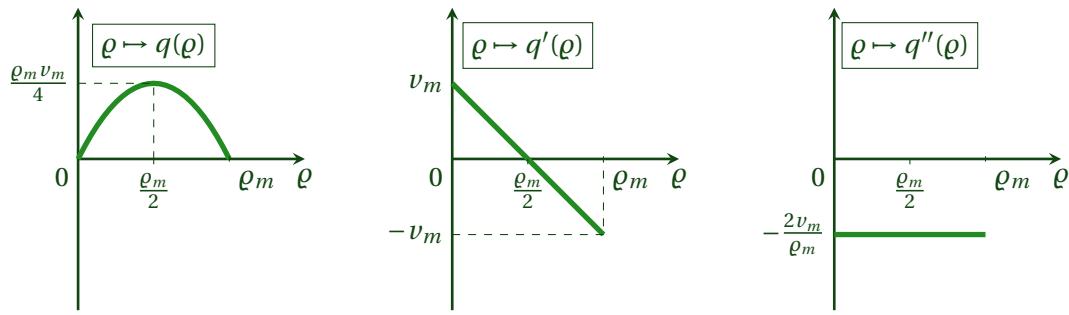
$$q(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \rho > 0,$$

donc

$$q'(\rho) = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \quad (\text{décroissant}), \quad q''(\rho) = -\frac{2v_m}{\rho_m} < 0 \quad (\text{constant}),$$

ainsi

- q est une fonction croissante sur $[0, \frac{\rho_m}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\rho_m}{2}, \rho_m]$; q est une fonction strictement concave de la densité;
- q' est une fonction décroissante qui s'annule en $\frac{\rho_m}{2}$.



Supposons que précédemment les voitures s'étaient distribuée selon une fonction $g(x)$ qui constitue notre donnée initiale.

On cherche donc à calculer la densité (et en déduire la vitesse) du trafic et à la dessiner dans le plan (x, ρ) pour $t \geq 0$. Pour cela on cherche

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \rho(t, x) \end{aligned}$$

solution (faible entropique) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q(\rho) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec le flux

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ \rho \mapsto q(\rho) &= v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \rho. \end{aligned}$$

Expérience : [shockwave-traffic-jam](#)

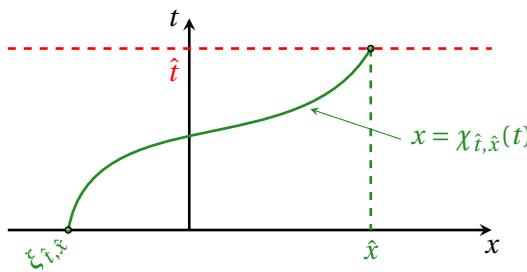
2.1.1. Méthode des caractéristiques et *travelling waves*

Reprendons la même démarche que pour le cas linéaire. Soit $\hat{t} > 0$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}$ fixés. Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une voiture située en \hat{x} à l'instant \hat{t} dans un flux de vitesse $q'(\rho)$:

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'\left(\rho(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))\right), & t > 0, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases} \quad (2.5)$$

La courbe $(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))$ est appelée *courbe caractéristique*¹ passant par le point (\hat{t}, \hat{x}) . On notera le pied de la caractéristique $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)$.

1. Au lieu d'écrire $t = f(x)$ on écrit $x = f(t)$ ainsi on peut aussi considérer des droites verticales (les voitures qui ne bougent pas).



Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la restriction de la fonction ϱ à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$r_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} r'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \partial_t \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \partial_t \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + q'(\varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))) \partial_x \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = 0, \end{aligned}$$

autrement dit

$$\varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} r_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \text{constante} = r_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \varrho(0, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) = g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

En résolvant le problème de Cauchy (2.5), puisque

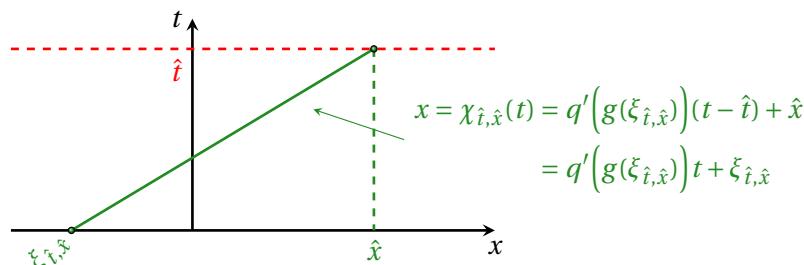
$$q'(\varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))) = q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})),$$

on trouve que les caractéristiques sont des droites de pente $q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))$ (bien-sûr, en général cette pente varie en fonction de (\hat{t}, \hat{x}) , ce qui est la différence principale par rapport au cas linéaire) :

$$\boxed{\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))(t - \hat{t}) + \hat{x}}, \quad (2.7)$$

et donc le pied de la caractéristique qui passe par (\hat{t}, \hat{x}) est

$$\boxed{\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \hat{x} - q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))\hat{t}.} \quad (2.8)$$



Si on prend $t = \hat{t}$ on a

$$\varrho(\hat{t}, \hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} r_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) \stackrel{(2.6)}{=} g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) \stackrel{(2.8)}{=} g(\hat{x} - q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))\hat{t})$$

et on conclut que

$$\boxed{\varrho(t, x) = g(x - q'(g(\xi_{t,x}))t).} \quad (2.9)$$

Il s'agit d'une **onde progressive** (*travelling wave*) qui se propage à vitesse $q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))$ avec $\xi_{\hat{t}, \hat{x}}$ défini **implicite-ment** par (2.8).

Remarque 2 $q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))$ est la vitesse locale de l'onde et non la vitesse du trafic et l'on a

$$q'(\rho) = \frac{d(\rho v(\rho))}{d\rho} = v(\rho) + \rho v'(\rho) \leq v(\rho) \quad \text{car } v'(\rho) < 0.$$

De plus, on sait que $q'(\rho) < 0$ pour $\rho > \frac{\rho_m}{2}$: ça correspond au cas où le trafic avance vers les $x > 0$ et l'onde (*i.e.* la perturbation) se propage dans la direction opposée.

2.1.2. Problème de Riemann

On appelle *problème de Riemann* un problème de Cauchy avec une donnée initiale discontinue constante par morceaux ayant une seule discontinuité :

$$g(x) = \begin{cases} \rho_L & \text{si } x < x_0, \\ \rho_R & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

Dans ce cas on aura

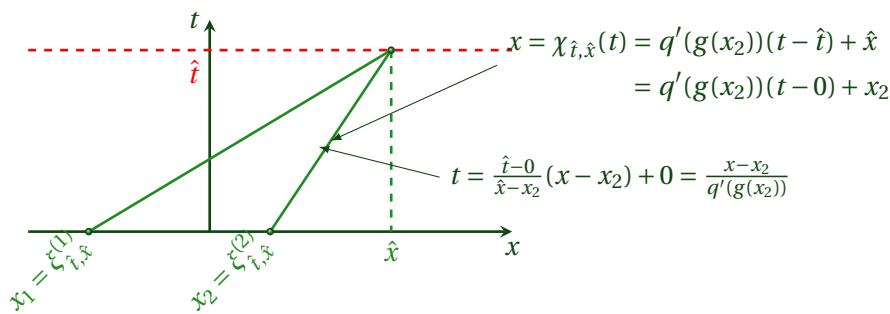
$$\varrho(t, x) = g\left(x - q'\left(g(\xi_{t,x})\right)t\right) = \begin{cases} \rho_L & \text{si } x - q'\left(g(\xi_{t,x})\right)t < x_0, \\ \rho_R & \text{si } x - q'\left(g(\xi_{t,x})\right)t > x_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

et

$$q'\left(g(\xi_{t,x})\right) = \begin{cases} q'(\rho_L) & \text{si } \xi_{t,x} < x_0, \\ q'(\rho_R) & \text{si } \xi_{t,x} > x_0. \end{cases}$$

Remarque 3 La formule (2.9) semble donner la solution de (2.4) pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Cependant, si on regarde de plus près, elle n'est pas suffisante, en général, pour calculer la solution d'un problème de Cauchy pour tout $t > 0$. En particulier, lorsqu'on considère un problème de Riemann, il y a deux situations qui peuvent se présenter :

1. Deux caractéristiques de pieds respectivement x_1 et x_2 s'intersectent en (\hat{t}, \hat{x}) :



Quelle valeur donner à ρ si $g(x_1) \neq g(x_2)$? On verra que ce phénomène, où la solution ρ peut engendrer une singularité en un temps fini, peut se produire même si g est très régulière (voir par exemple l'exercice 2.5).

2. Si g est définie par morceaux par deux constantes, il peut exister des points qui ne sont rejoints par aucune caractéristique. Quelle valeur donner à ρ ?

Lorsque l'un de ces deux cas arrive, on ne peut plus appliquer la méthode des caractéristiques telle que décrite dans la partie précédente.

2.1.3. Embouteillage et onde de choc

On considère une situation où un encombrement apparaît sur la route. Le profil de la densité initiale est donné par le *problème de Riemann*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\rho_m}{8} & \text{si } x < 0, \\ \rho_m & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Cela signifie que pour $x > 0$ les voitures sont “pare-choc contre pare-choc” et donc leur vitesse est nulle (c'est le début d'un bouchon) : $v(\rho) = v(\rho_m) = 0$. En revanche, pour $x < 0$, les voitures se déplacent à une vitesse $v(\rho) = v\left(\frac{\rho_m}{8}\right) = \frac{7}{8}v_m$. On s'attend donc à ce que le bouchon se propage en arrière.

En effet, on a

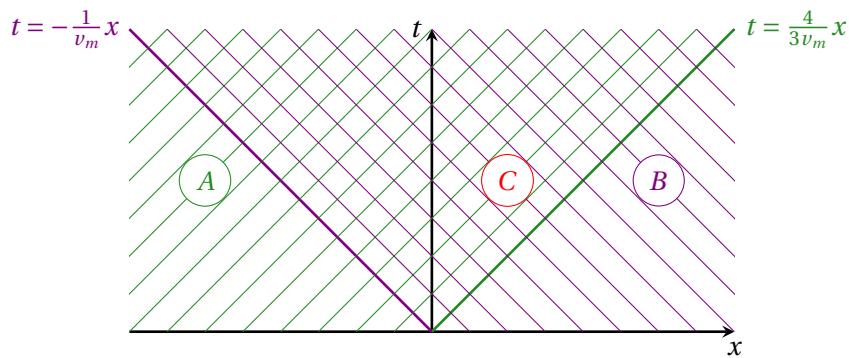
$$q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})) = v_m \left(1 - \frac{2g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})}{\rho_m}\right) = \begin{cases} v_m \left(1 - \frac{2\frac{\rho_m}{8}}{\rho_m}\right) = \frac{3}{4}v_m > 0 & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ v_m \left(1 - \frac{2\rho_m}{\rho_m}\right) = -v_m < 0 & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} > 0, \end{cases}$$

et donc les caractéristiques ont pour équation :

$$x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'\left(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})\right)(t - \hat{t}) + \hat{x} = q'\left(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})\right)t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \begin{cases} \frac{3}{4}v_m t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ -v_m t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} > 0. \end{cases}$$

On voit que ces droites s'intersectent en un temps fini et donc ρ est une fonction multivaluée de la position. En particulier, les droites obtenues pour $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = 0$ séparent le plan en trois régions :

- $\rho(t, x) = \rho_m/8$ pour tout $(t, x) \in A$,
- $\rho(t, x) = \rho_m$ pour tout $(t, x) \in B$,
- qu'en est-il dans la région C ? Pour chaque point de cette région, il y a exactement deux caractéristiques qui transportent deux valeurs différentes! Autrement dit, ρ assume deux valeurs différentes dans le même point (\hat{t}, \hat{x}) , ce qui n'a clairement pas de sens dans notre situation.



Si on admet que la solution a une discontinuité (choc), il faut réexaminer la dérivation de la loi de conservation car les hypothèses de régularité de ρ ne sont plus valables.

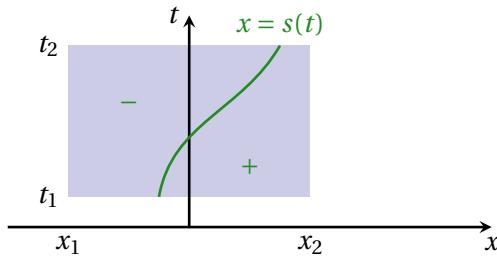
Considérons alors le principe de conservation des voitures sous une forme intégrale : pour tout intervalle $[x_1; x_2]$, les variations de densité à l'instant t dans l'intervalle $[x_1; x_2]$ sont données par

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx = q(\rho(t, x_1)) - q(\rho(t, x_2)). \quad (2.12)$$

Supposons que ρ soit une fonction régulière à l'exception le long de la courbe d'équation

$$x = s(t), \quad t \in [t_1; t_2]$$

qu'on appelle courbe de choc et sur laquelle ϱ a un saut.



L'équation (2.12) se réécrit

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{s(t)} \varrho(t, x) dx + \int_{s(t)}^{x_2} \varrho(t, x) dx \right] + q(\varrho(t, x_2)) - q(\varrho(t, x_1)) = 0.$$

D'après le théorème fondamental du calcul on a alors

$$\int_{x_1}^{s(t)} \partial_t \varrho(t, x) dx + s'(t) \varrho^-(t, s(t)) + \int_{s(t)}^{x_2} \partial_t \varrho(t, x) dx - s'(t) \varrho^+(t, s(t)) + q(\varrho(t, x_2)) - q(\varrho(t, x_1)) = 0$$

où

$$\varrho^-(t, s(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \uparrow s(t)} \varrho(t, y) \quad \text{et} \quad \varrho^+(t, s(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \downarrow s(t)} \varrho(t, y).$$

On trouve alors

$$\int_{x_1}^{x_2} \partial_t \varrho(t, x) dx + s'(t) [\varrho^-(t, s(t)) - \varrho^+(t, s(t))] = q(\varrho(t, x_1)) - q(\varrho(t, x_2)).$$

En passant aux limites $x_1 \uparrow s(t)$ et $x_2 \downarrow s(t)$ on obtient

$$0 + s'(t) [\varrho^-(t, s(t)) - \varrho^+(t, s(t))] = q(\varrho^-(t, s(t))) - q(\varrho^+(t, s(t))).$$

La discontinuité $x = s(t)$ se propage à la vitesse

$$s'(t) = \frac{q(\varrho^+) - q(\varrho^-)}{\varrho^+ - \varrho^-} = \frac{\llbracket q(\varrho) \rrbracket}{\llbracket \varrho \rrbracket}$$

ayant noté

$$\varrho^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \varrho^\pm(t, s(t)); \quad \text{et} \quad \llbracket \star \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \star^+ - \star^-.$$

Cette relation est une EDO nommée **condition de Rankine-Hugoniot**. Pour calculer la fonction $s(t)$, i.e. l'équation de l'onde de choc, on a donc besoin de connaître la valeur de s à un instant t donné, qui est la position du premier instant où deux caractéristiques s'intersectent.

Nous allons appliquer ceci à notre problème du bouchon. On a

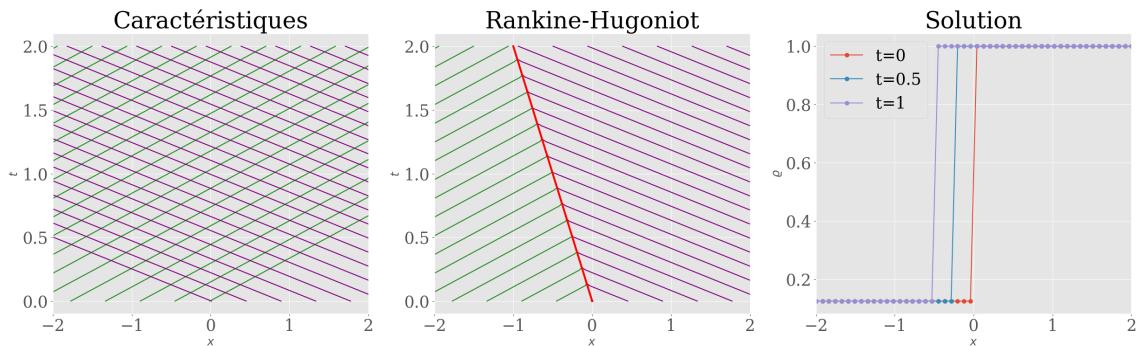
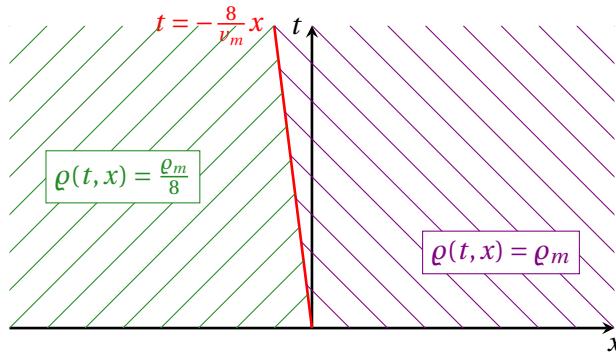
$$\begin{aligned} \varrho^- &= \frac{\varrho_m}{8}, & \varrho^+ &= \varrho_m, \\ q(\varrho^-) &= v_m \left(1 - \frac{\frac{\varrho_m}{8}}{\varrho_m}\right) \frac{\varrho_m}{8} = \frac{7}{64} v_m \varrho_m, & q(\varrho^+) &= v_m \left(1 - \frac{\varrho_m}{\varrho_m}\right) \varrho_m = 0, \end{aligned}$$

donc on cherche $x = s(t)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q^+ - q^-}{\varrho^+ - \varrho^-} = \frac{0 - \frac{7}{64} v_m \varrho_m}{\varrho_m - \frac{\varrho_m}{8}} = -\frac{1}{8} v_m, & t > 0, \\ s(t=0) = 0 \end{cases}$$

d'où $s(t) = -\frac{1}{8} v_m t$: le choc se propage en arrière à la vitesse $-\frac{1}{8} v_m$. La solution pour notre problème est donc

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \frac{\varrho_m}{8} & \text{si } x < s(t) = -\frac{1}{8} v_m t, \\ \varrho_m & \text{si } x > s(t) = -\frac{1}{8} v_m t. \end{cases}$$



2.1.4. Démarrage à un feu tricolore qui passe au vert et onde de détente/raréfaction

On suppose qu'un feu tricolore situé en $x = 0$ est rouge tant que $t \leq 0$ et la route en face est libre. Ainsi, la condition initiale correspond au *problème de Riemann*

$$g(x) = \begin{cases} \varrho_m & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Cela signifie que pour $x < 0$ les voitures sont pare-choc contre pare-choc et donc leur vitesse est nulle (elles attendent que le feu rouge qui se trouve en $x = 0$ passe au vert) : $v(\varrho) = v(\varrho_m) = 0$. En revanche, pour $x > 0$, la voie est libre, i.e. $\varrho(0, x) = 0$.

À l'instant $t = 0$ le feu passe au vert et on veut décrire l'évolution de la densité des voitures pour $t > 0$.

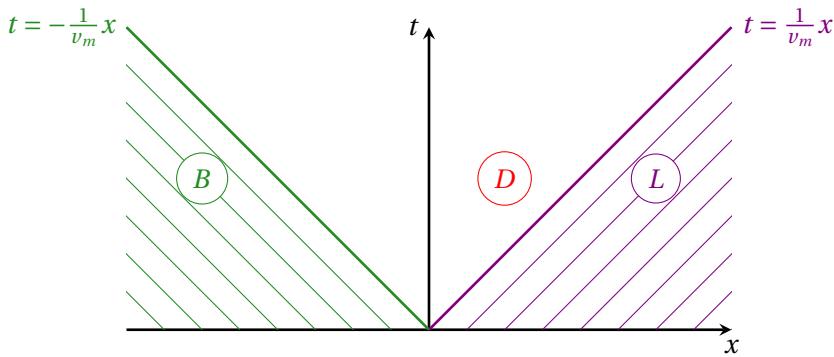
Dans un premier temps, seules les voitures proches du feu bougent, les autres restent immobiles. En effet,

$$q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})) = v_m \left(1 - \frac{2g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})}{\varrho_m} \right) = \begin{cases} v_m \left(1 - \frac{2\varrho_m}{\varrho_m} \right) = -v_m < 0 & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ v_m \left(1 - \frac{0}{\varrho_m} \right) = v_m > 0 & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} > 0, \end{cases}$$

et donc les caractéristiques, qui sont des droites de pente $q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))$, ont pour équation :

$$x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'\left(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})\right)(t - \hat{t}) + \hat{x} = q'\left(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})\right)t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \begin{cases} -v_m t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ v_m t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} > 0. \end{cases}$$

En particulier, les droites² d'équation $x = \pm v_m t$ séparent le plan en trois régions :



- $\varrho(t, x) = \varrho_m$ pour tout $(t, x) \in B$,
- $\varrho(t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in L$,
- qu'en est-il dans la région D ? Il n'y a pas de caractéristiques dans cette région!

Onde de détente : construction formelle

La valeur $\varrho(t, x)$ pour tout $(t, x) \in D$ peut être obtenue par une **procédé formel**.

Soit $(\hat{t}, \hat{x}) \in D$ et considérons la droite qui relie ce point à (t_0, x_0) (pied de la zone D). Cette droite a pour pente $m = \frac{\hat{x} - x_0}{\hat{t} - t_0} \in [q'(\varrho^-); q'(\varrho^+)]$.

En généralisant la notation des caractéristiques pour cette partie, on écrit toujours

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'(\varrho(\hat{t}, \hat{x}))(t - \hat{t}) + \hat{x}.$$

avec, dans la zone D ,

$$q'(\varrho(\hat{t}, \hat{x})) = \frac{\hat{x} - x_0}{\hat{t} - t_0}.$$

En résolvant pour ϱ on trouve

$$\varrho(\hat{t}, \hat{x}) = (q')^{-1}\left(\frac{\hat{x} - x_0}{\hat{t} - t_0}\right).$$

ainsi, en enlevant les chapeaux, on trouve

$$\varrho(t, x) = (q')^{-1}\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right).$$

Cette relation est appelée **onde de raréfaction (ou de détente)** centrée en $x = x_0$ à l'instant $t = t_0$.

2. Elles s'obtiennent pour $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = 0$.

Dans notre exemple

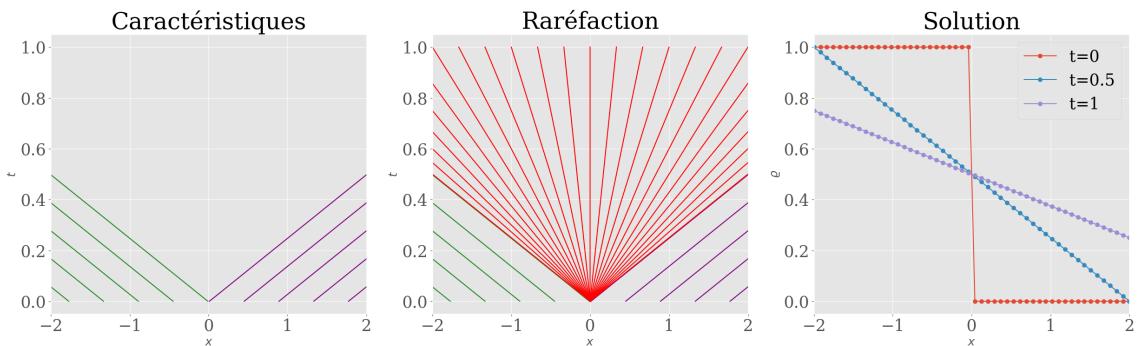
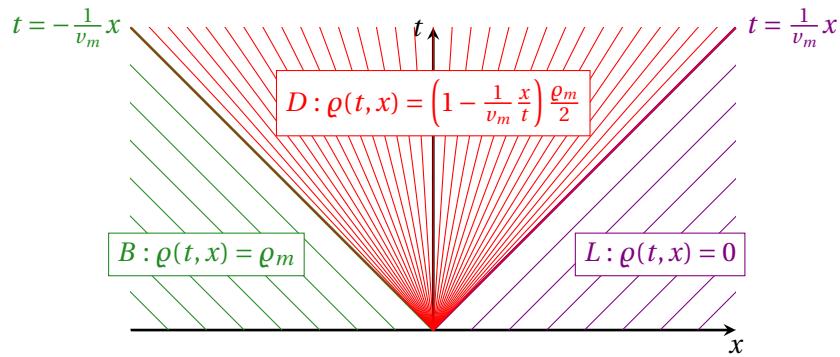
$$\frac{x}{t} = q'(\varrho) = v_m \left(1 - \frac{2\varrho}{\varrho_m}\right).$$

En résolvant pour ϱ on trouve, pour la zone D :

$$\varrho(t, x) = \left(1 - \frac{1}{v_m} \frac{x}{t}\right) \frac{\varrho_m}{2}.$$

En conclusion, la solution s'écrit

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \varrho_m & \text{si } x \leq -v_m t, \\ \left(1 - \frac{1}{v_m} \frac{x}{t}\right) \frac{\varrho_m}{2} & \text{si } -v_m t < x < v_m t, \\ 0 & \text{si } x \geq v_m t. \end{cases}$$



Remarque 4 ϱ est constant le long des droites $x = ht$ avec $h \in]q'(\varrho_L) = -v_m; q'(\varrho_R) = v_m[$. De plus, pour tout $t > 0$ fixé, la densité décroît linéairement de ϱ_m à 0 lorsque x varie de $-v_m t$ à $v_m t$.

Remarque 5 (Trajectoire d'une voiture.) Examinons maintenant la trajectoire d'un véhicule initialement situé en $x = -a < 0$. Ce véhicule, se trouvant dans la région pare-chocs contre pare-chocs, ne se déplacera pas jusqu'au moment $t_1 \stackrel{\text{def}}{=} a/v_m$ où le signal du feu vert lui parvient. À partir de ce moment, le véhicule entre dans la région de raréfaction et se déplace à la vitesse

$$v(\varrho(t, x)) = v_m \left(1 - \frac{\varrho(t, x)}{\varrho_m}\right) = v_m \left(1 - \frac{\frac{\varrho_m}{2} \left(1 - \frac{x}{v_m t}\right)}{\varrho_m}\right) = \frac{1}{2} \left(v_m + \frac{x}{t}\right), \quad t \geq t_1.$$

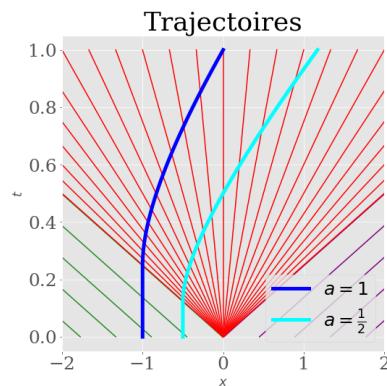
Ainsi, en dénotant par $x = x(t)$ la position du véhicule, nous devons résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}(v_m + \frac{x}{t}), \\ x(t_1) = -a, \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = v_m t - 2\sqrt{av_m t}.$$

Puisque $v_m t - 2\sqrt{av_m t} < v_m t$, la trajectoire ne croisera jamais la caractéristique $x = v_m t$ et ne quittera donc jamais la région de raréfaction.

En conclusion la trajectoire d'un véhicule initialement situé en $x = -a < 0$ est

$$x(t) = \begin{cases} -a, & \text{si } t < t_1 \\ v_m t - 2\sqrt{av_m t} & \text{sinon.} \end{cases}$$



Supposons maintenant que le feu passe au rouge à l'instant t_r . Notre conducteur pourra-t-il franchir le feu avant? Il suffit de calculer le temps qu'il lui faut pour atteindre $x = 0$. Puisque $x(t) = 0$ à l'instant $t_2 = 4a/v_m$, le conducteur pourra franchir le feu avant qu'il passe à nouveau au rouge ssi $t_r > t_2$.

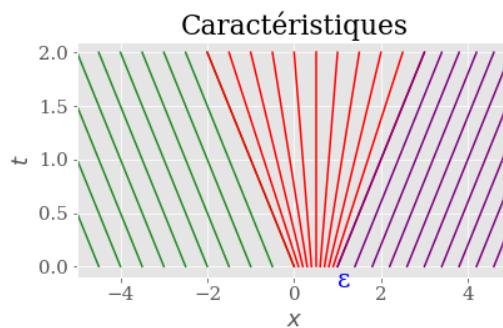
Onde de détente : construction comme limite d'une donnée initiale continue

Considérons une régularisation de la donnée initiale :

1. soit $g_\varepsilon(x) \approx g(x)$ continue telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) = g(x)$ en tout point $x \neq 0$
2. on construit la solution $\varrho_\varepsilon(t, x)$ associée à la donnée initiale g_ε en utilisant la méthode des caractéristiques
3. on pose $\varrho(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho_\varepsilon(t, x)$
4. on vérifie que la fonction $\varrho(t, x)$ ainsi obtenue est solution du problème ayant pour donnée initiale la fonction g .

Par exemple, on pose

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varrho_m & \text{si } x \leq 0, \\ \varrho_m \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{si } 0 < x < \varepsilon, \\ 0 & \text{si } x \geq \varepsilon. \end{cases}$$



On a bien $g_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} g(x)$ en tout point $x \neq 0$. Calculons les caractéristiques associées à cette donnée initiale :

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q' \left(g_\varepsilon(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) \right) t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} = v_m \left(1 - \frac{2g_\varepsilon(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})}{\varrho_m} \right) t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}}.$$

On sait que ϱ_ε est constante le long d'une caractéristique donc $\varrho_\varepsilon(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \equiv g_\varepsilon(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})$ ainsi

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \begin{cases} v_m \left(1 - \frac{2\varrho_m}{\varrho_m} \right) t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ v_m \left(1 - \frac{2\varrho_m \left(1 - \frac{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}}{\varepsilon} \right)}{\varrho_m} \right) t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } 0 < \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < \varepsilon, \\ v_m \left(1 - \frac{0}{\varrho_m} \right) t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} > \varepsilon. \end{cases} \\ &= \begin{cases} -v_m t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ v_m \left(2 \frac{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}}{\varepsilon} - 1 \right) t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } 0 < \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < \varepsilon, \\ v_m t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} > \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0$ si $\hat{x} < -v_m \hat{t}$, $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} > \varepsilon$ si $\hat{x} > v_m \hat{t} + \varepsilon$ et, pour $0 < \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < \varepsilon$, on a

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = v_m \left(2 \frac{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}}{\varepsilon} - 1 \right) t + \xi_{\hat{t}, \hat{x}}$$

ainsi, pour $t = \hat{t}$ on a $\hat{x} = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = v_m \left(2 \frac{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}}{\varepsilon} - 1 \right) \hat{t} + \xi_{\hat{t}, \hat{x}}$ d'où

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \varepsilon \frac{\hat{x} + v_m \hat{t}}{2v_m \hat{t} + \varepsilon}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \varrho_\varepsilon(\hat{t}, \hat{x}) &= \varrho_\varepsilon(\hat{t}, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t})) = g_\varepsilon(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) = g_\varepsilon \left(\varepsilon \frac{\hat{x} + v_m \hat{t}}{2v_m \hat{t} + \varepsilon} \right) = \begin{cases} \varrho_m & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ \varrho_m \left(1 - \frac{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}}{\varepsilon} \right) & \text{si } 0 < \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < \varepsilon, \\ 0 & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} > \varepsilon. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varrho_m & \text{si } \hat{x} < -v_m \hat{t}, \\ \varrho_m \left(1 - \frac{\hat{x} + v_m \hat{t}}{2v_m \hat{t} + \varepsilon} \right) & \text{si } -v_m \hat{t} < \hat{x} < v_m \hat{t} + \varepsilon, \\ 0 & \text{si } \hat{x} > v_m \hat{t} + \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette relation est vraie pour tout $\hat{t} \geq 0$ et tout $\hat{x} \in \mathbb{R}$ ainsi, en passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et, en enlevant les chapeaux, on obtient

$$\varrho(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = \begin{cases} \varrho_m & \text{si } x < -v_m t, \\ \frac{\varrho_m}{2} \left(1 - \frac{x}{v_m t} \right) & \text{si } -v_m t < x < v_m t, \\ 0 & \text{si } x > v_m t. \end{cases}$$

Remarque 6 (Solution autosemblable) La solution d'un problème de Riemann est autosemblable. Cela signifie que $\varrho(t, x)$ est une fonction de $\zeta \stackrel{\text{def}}{=} x/t$.

Pour commencer, la donnée initiale vérifie $g(\lambda x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda > 0$. Par homogénéité, si $\varrho(t, x)$ est solution (faible entropique) de l'EDP alors $\varrho(\lambda t, \lambda x)$ est aussi solution (faible entropique). Par unicité on en déduit que la solution associée à g vérifie $\varrho(\lambda t, \lambda x) = \varrho(t, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda > 0$. Par conséquent il existe une fonction $\zeta \mapsto w(\zeta)$ telle que $\varrho(t, x) = w(\zeta)$.

Si $\varrho(t, x) = w(x/t)$ alors

$$0 = \partial_t \varrho + \partial_x q(\varrho) = -\frac{x}{t^2} w' \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} q' \left(w \left(\frac{x}{t} \right) \right) w' \left(\frac{x}{t} \right)$$

donc

$$\partial_t \varrho + \partial_x q(\varrho) = 0 \iff w' \left(\frac{x}{t} \right) \left(q' \left(w \left(\frac{x}{t} \right) \right) - \frac{x}{t} \right) = 0.$$

Autrement dit, la fonction $\zeta \mapsto w(\zeta)$ vérifie en tout point ζ :

$$q' \left(w \left(\frac{x}{t} \right) \right) = \frac{x}{t} \quad \text{ou} \quad w' \left(\frac{x}{t} \right) = 0.$$

Le premier cas correspond à une raréfaction, le deuxième à un état constant.

Notons $\star^- \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ q'(\varrho_L), q'(\varrho_R) \}$ et $\star^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ q'(u_L), q'(u_R) \}$, alors la solution d'un problème de Riemann de donnée initiale ϱ_L et ϱ_R est du type

$$\varrho(t, x) = w(\zeta) = \begin{cases} \varrho_L & \text{si } \zeta < \star^-, \\ [\dots] & \text{si } \star^- < \zeta < \star^+, \\ \varrho_R & \text{si } \zeta > \star^+. \end{cases}$$

Dans l'intervalle $[\star^-, \star^+]$, soit w est constante (entre deux chocs), soit $w = (q')^{-1}$ (onde de détente).

2.1.5. Unicité et inégalité d'entropie : choc non entropique

Dans le cas du feu rouge qui passe au vert, nous avions une région qui n'était pas couverte par les caractéristiques. Nous avons alors choisi de connecter les deux états constants par une onde de détente/raréfaction. Il est cependant possible de construire une solution de type choc :

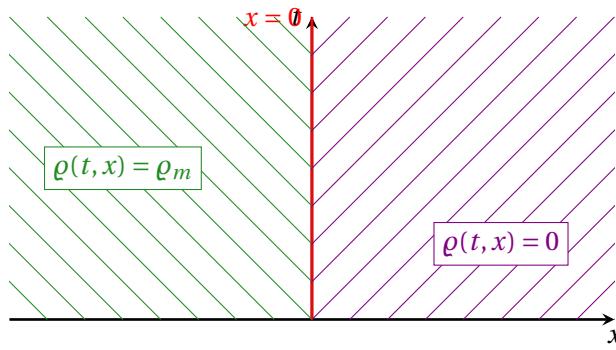
$$\begin{aligned} \varrho^- &= \varrho_m, & \varrho^+ &= 0, \\ q(\varrho^-) &= v_m \left(1 - \frac{\varrho_m}{\varrho_m} \right) \varrho_m = 0, & q(\varrho^+) &= v_m \left(1 - \frac{0}{\varrho_m} \right) 0 = 0, \end{aligned}$$

donc on cherche $x = s(t)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(\varrho^+) - q(\varrho^-)}{\varrho^+ - \varrho^-} = \frac{0 - 0}{0 - \varrho_m} = 0, & t > 0, \\ s(t = 0) = 0 \end{cases}$$

d'où $s(t) = 0$ pour tout t . La solution pour notre problème est donc

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \varrho_m & \text{si } x < s(t) = 0, \\ 0 & \text{si } x > s(t) = 0. \end{cases}$$



C'est bien une solution faible, *i.e.* elle vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot, mais ce n'est clairement pas une solution physiquement acceptable. Il faut donc ajouter **une condition qui permet de déterminer si un choc est admissible ou pas**.

On peut ajouter un terme de “viscosité” à la loi de conservation et rechercher des solutions lorsque ce terme de viscosité tends vers zéro. Autrement dit, étant donné un $\varepsilon > 0$, on cherche l'unique solution de

$$\partial_t \varrho_\varepsilon + \partial_x q(\varrho_\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} \varrho_\varepsilon.$$

On dit donc qu'une solution faible $\varrho(x, t)$ est admissible au sens d'une viscosité évanescante si $\varrho_\varepsilon(x, t) \rightarrow \varrho(x, t)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Cette approche est généralement consistante avec la réalité physique décrite par le modèle, car la plupart des lois de conservation sont physiquement obtenues en supposant que la dissipation (un terme typiquement proportionnel à la dérivée seconde) est négligeable. Cependant, cette condition est difficile à utiliser dans la pratique. Nous voulons alors utiliser des conditions plus simples.

Condition de Lax Pour les équations scalaires, il existe une condition évidente suggérée par les figures : un choc doit avoir des caractéristiques qui entrent dans le choc, au fur et à mesure que le temps avance. Une discontinuité avec des caractéristiques qui en sortent, comme dans l'exemple de cette section, est instable aux perturbations : le fait d'étaler un peu le profil initial ou d'ajouter de la viscosité au système le rendra instable et ce profil sera remplacé par une raréfaction.

Nous obtenons ainsi notre première version de la condition d'entropie : soit une solution faible, *i.e.* une solution vérifiant la condition de Rankine-Hugoniot le long de la courbe d'équation $x = s(t)$. Le choc est entropique si et seulement si

$$q'(\varrho^+(t)) < s'(t) < q'(\varrho^-(t)), \quad \text{avec} \quad s'(t) = \frac{q(\varrho^+(t)) - q(\varrho^-(t))}{\varrho^+(t) - \varrho^-(t)}.$$

Cette inégalité est dite inégalité d'entropie de Lax.

Une solution ϱ qui satisfait la condition d'entropie est dite solution entropique. Elle traduit le fait qu'**un choc ne se génère que si les caractéristiques se croisent** : la pente d'une courbe de choc doit être inférieure à la pente des caractéristiques qui viennent de gauche et supérieure à la pente des caractéristiques qui viennent de la droite.³

Notons que

- si le flux q est **convexe**, alors q' est une fonction croissante ainsi le choc est entropiquessi $\varrho^+ < \varrho^-$;
- si le flux q est **concave**, alors q' est une fonction décroissante ainsi le choc est entropiquessi $\varrho^- < \varrho^+$.

3. Soit $t = m_1(x - x_1)$ et $t = m_2(x - x_2)$ deux droites avec $x_1 < x_2$. Pour qu'elles s'intersectent il faut $m_1 < m_2$. Dans notre cas les droites sont données sous la forme $x = \frac{1}{m_1}t + x_1$ et $x = \frac{1}{m_2}t + x_2$ ainsi la condition devient $\frac{1}{m_2} < \frac{1}{m_1}$.

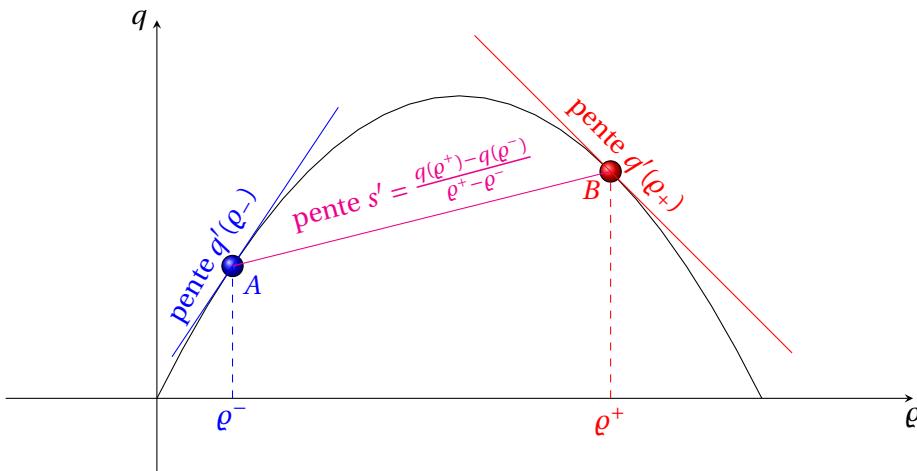


FIGURE 2.1. – Interprétation géométrique de l'inégalité d'entropie pour un flux concave.

La signification géométrique de la condition de Lax est illustrée sur la figure 2.1 dans le cas concave : en parcourant la corde AB de A à B , on “voit” le graphe de q à gauche.

Condition d’Oleinik/Liu Une forme plus générale de cette condition, due à Oleinik, s’applique aux lois de flux changeant de concavité. Soit une solution faible, *i.e.* une solution vérifiant la condition de Rankine-Hugoniot le long de la courbe d’équation $x = s(t)$. Elle est une solution entropique si et seulement si

$$\frac{q(\rho^+(t)) - q(\rho)}{\rho^+(t) - \rho(t)} \leq s'(t) \leq \frac{q(\rho) - q(\rho^-(t))}{\rho - \rho^-(t)} \quad \text{avec} \quad s'(t) = \frac{q(\rho^+(t)) - q(\rho^-(t))}{\rho^+(t) - \rho^-(t)}$$

pour tout état intermédiaire ρ entre ρ^- et ρ^+ . Le choc est alors subdivisé en deux parties se déplaçant à une vitesse donnée par les conditions de Rankine-Hugoniot. La distance entre les ondes du problème original et celles du problème perturbé n’augmente pas dans le temps seulement si la vitesse du choc en arrière est supérieure ou égale à la vitesse du choc en avant. Cette équation identifie les lignes sécantes sur le graphe de $q(\rho)$. En pratique, si $\rho^- < \rho^+$, le graphe de q doit rester au-dessus de la sécante, tandis que si $\rho^- > \rho^+$, le graphe de q doit rester en dessous. Ceci doit aussi être valable pour tout état interne $\rho \in [\rho^-; \rho^+]$. En pratique, la stabilité implique que la même chose vaut pour toute condition intermédiaire ρ . En d’autres termes, un choc avec des états gauche et droit donnés par ρ^- et ρ^+ satisfait à la condition d’admissibilité si sa vitesse est inférieure ou égale à la vitesse de tous les chocs plus petits reliant ρ^- avec ρ .

Entropie et flux d’entropie Une autre approche consiste à définir une fonction d’entropie pour laquelle une loi de conservation supplémentaire s’applique aux solutions régulières et devient une inégalité pour les solutions discontinues. Cette condition d’admissibilité découle de l’observation selon laquelle, dans les systèmes thermodynamiquement dissipatifs, l’entropie ne diminue jamais et, si le système n’est pas dissipatif, l’entropie est conservée.

Soit une fonction scalaire $w \mapsto \eta(w)$ qui satisfait une loi de conservation

$$\partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) = 0$$

pour un flux d’entropie $\psi(w)$. La condition d’entropie, appelée inégalité d’entropie, dit qu’une fonction $w(t, x)$ est la solution entropique de $\partial_t w + \partial_x q(w) = 0$ si, pour toutes les fonctions d’entropie convexes et les flux d’entropie correspondants, l’inégalité $\partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) \leq 0$ est satisfaite au sens faible.

Si w est régulière, on a

$$\partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) = \eta'(w) \partial_t w + \psi'(w) \partial_x w = 0.$$

Si on multiplie la loi $\partial_t w + \partial_x q(w) = 0$ par $\eta'(w)$ on trouve

$$\psi'(w) = \eta'(w)q'(w)$$

Une condition supplémentaire impose la convexité de la fonction η (on verra ci-dessous la raison).

On appellera le couple (η, ψ) entropie et flux d'entropie.

L'entropie est conservée pour les solutions continues par construction. Pour les solutions discontinues, cependant, les manipulations effectuées ci-dessus ne sont pas valables. Comme nous sommes particulièrement intéressés par le comportement de l'entropie pour la solution faible à viscosité évanescante, nous examinons le problème visqueux correspondant et laissons ensuite la viscosité tendre vers zéro. L'équation visqueuse est

$$\partial_t w + \partial_x q(w) = \varepsilon \partial_{xx} w.$$

Comme les solutions de cette équation sont toujours régulières, nous pouvons dériver l'équation d'évolution correspondante pour l'entropie en suivant les mêmes manipulations que nous avons utilisées pour les solutions régulières de l'équation sans viscosité, en la multipliant par $\eta'(w)$ pour obtenir

$$\partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) = \varepsilon \eta'(w) \partial_{xx} w = \varepsilon (\partial_x (\eta'(w) \partial_x w)) - \varepsilon \eta''(w) (\partial_x w)^2.$$

En intégrant sur $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ on trouve

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) \, dx \, dt &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \eta'(w(x_2, t)) \partial_x w(x_2, t) - \eta'(w(x_1, t)) \partial_x w(x_1, t) \, dt \\ &\quad - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \eta''(w) (\partial_x w)^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le premier terme du côté droit disparaît (ceci est clairement vrai si w est régulière en x_1 et x_2 , et peut être démontré plus généralement). L'autre terme, cependant, implique l'intégration de $(\partial_x w)^2$. Si la solution faible limite est discontinue le long d'une courbe dans ce rectangle, alors ce terme ne disparaîtra pas à la limite. Cependant, puisque $\varepsilon > 0$, $(\partial_x w)^2 > 0$ et $\eta''(w) > 0$ (par notre hypothèse de convexité), nous pouvons conclure que le côté droit est non positif à la limite et donc que la solution faible de viscosité évanescante satisfait

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) \, dx \, dt &\leq 0, \quad \forall x_1, x_2, t_1, t_2 \\ &\rightsquigarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta(w(t, x)) \Big|_{t_1}^{t_2} \, dx + \int_{t_1}^{t_2} \psi(w(t, x)) \Big|_{x_1}^{x_2} \, dt \leq 0, \\ &\rightsquigarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta(w(t_2, x)) \, dx \leq \int_{x_1}^{x_2} \eta(w(t_1, x)) \, dx - \left(\int_{t_1}^{t_2} \psi(w(t, x_2)) \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \psi(w(t, x_1)) \, dt \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégrale totale de η n'est pas nécessairement conservée, mais peut seulement diminuer. (Notez que notre hypothèse mathématique de convexité conduit à une "fonction entropie" qui diminue, alors que l'entropie physique dans la dynamique des gaz augmente). Le fait que l'inégalité soit valable pour tous les x_1, x_2, t_1, t_2 est résumé en disant que $\partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) \leq 0$ au sens faible.

Condition d'entropie pour le modèle LWR Revisitons nos deux problèmes de Riemann dans le cas du modèle LWR.

1. "Embouteillage" : on a

$$\begin{aligned} \varrho^- &= \frac{\varrho_m}{8}, & q(\varrho^-) &= \frac{7}{64} v_m \varrho_m, & q'(\varrho^-) &= \frac{3}{4} v_m, \\ \varrho^+ &= \varrho_m, & q(\varrho^+) &= 0, & q'(\varrho^+) &= -v_m. \end{aligned}$$

donc

$$s'(t) = \frac{0 - \frac{7}{64} v_m \varrho_m}{\varrho_m - \frac{\varrho_m}{8}} = -\frac{1}{8} v_m.$$

La condition de Lax s'écrit donc

$$-\nu_m < -\frac{1}{8} v_m < \frac{3}{4} v_m$$

qui est bien satisfaite : le choc est entropique! En effet, q est strictement concave et $\varrho^- < \varrho^+$.

2. "Démarrage à un feu tricolore qui passe au vert" : on a

$$\begin{array}{lll} \varrho^- = \varrho_m, & q(\varrho^-) = 0, & q'(\varrho^-) = -v_m, \\ \varrho^+ = 0, & q(\varrho^+) = 0, & q'(\varrho^+) = v_m. \end{array}$$

Donc

$$s'(t) = 0.$$

La condition de Lax s'écrit donc

$$\nu_m < 0 < -v_m$$

qui n'est pas satisfaite : le choc n'est pas admissible car non entropique! En effet, q est strictement concave et $\varrho^- > \varrho^+$.

2.2. Flux avec des points d'inflexions

Si q est convexe (ou concave), la solution du problème de Riemann est toujours soit un choc, soit une onde de raréfaction.

Lorsque le flux q présente un nombre fini de points d'inflexion, nous devons trouver d'autres critères pour sélectionner les discontinuités physiquement admissibles. Dans ces cas, en nous limitant à la classe des solutions faibles \mathcal{C}^1 par morceaux, considérons la condition d'Oleinik :

$$\underbrace{\frac{q(\varrho^+(t)) - q(\varrho^-(t))}{\varrho^+(t) - \varrho^-(t)}}_{\stackrel{\text{def}}{=} s_{-,+}} \leq \underbrace{\frac{q(\varrho^+(t)) - q(\varrho^*(t))}{\varrho^+(t) - \varrho^*(t)}}_{\stackrel{\text{def}}{=} s_{-,*}}$$

pour tout ϱ_* entre ϱ_- et ϱ_+ .

Cela signifie que

- si $u_R < u_L$, on remplace q par l'enveloppe concave supérieure de q : les parties où q est strictement concave représentent des raréfactions, les parties où q est un segment représentent des chocs;
- si $u_R > u_L$, on remplace q par l'enveloppe convexe inférieure de q : les parties où q est strictement convexe représentent des raréfactions, les parties où q est un segment représentent des chocs.

Exemple de Buckley-Leverett Pour illustrer cela, nous examinons le modèle de Buckley-Leverett, qui décrit l'écoulement d'un fluide diphasique dans un milieu poreux. L'une des applications est la simulation des réservoirs de pétrole. Lorsqu'une source souterraine de pétrole est exploitée, une certaine quantité de pétrole s'écoule d'elle-même en raison de la pression élevée qui règne dans le réservoir. Lorsque l'écoulement s'arrête, il reste généralement une grande quantité de pétrole dans le sol. Une méthode standard de "récupération secondaire" consiste à pomper de l'eau dans le champ pétrolifère par certains puits et à forcer le pétrole à s'écouler par d'autres puits. Dans ce cas, les deux phases sont le pétrole et l'eau, et l'écoulement se fait dans un milieu poreux de roche ou de sable.

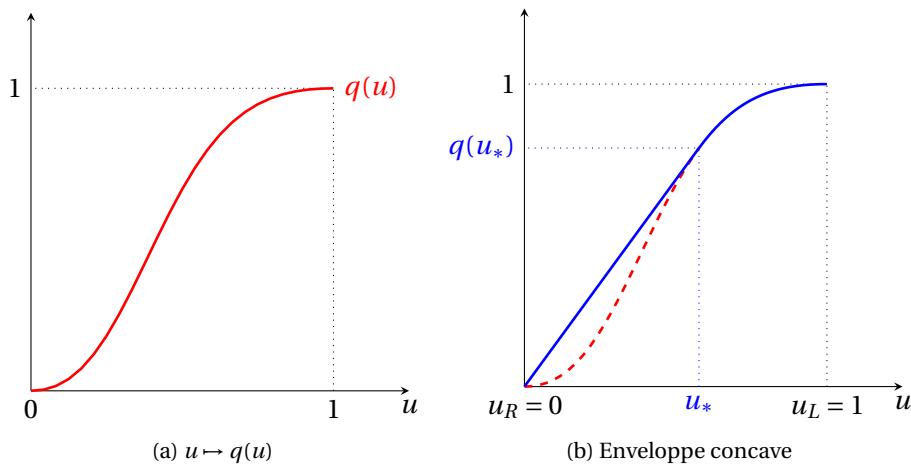


FIGURE 2.2. – Flux de l'équation de Buckley-Leverett

Dans une dimension spatiale, l'équation prend la forme standard de la loi de conservation

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0, \quad q(u) = \frac{u^2}{u^2 + a(1-u)^2}$$

où $a > 0$ est une constante. Ici, u représente la saturation en eau, et sa valeur est donc comprise entre 0 et 1.

La figure 2.2a illustre $q(u)$ pour $a = 1/2$. Le flux n'est ni convexe, ni concave :

$$q'(u) = \frac{2a(1_u)}{(u^2 + a(1-u)^2)^2} \geq 0, \quad q'(0) = q'(1) = 0.$$

- Cas $u_R < u_L$.

Considérons le problème de Riemann avec les états initiaux $u_L = 1$ et $u_R = 0$, qui modélise l'écoulement d'eau pure (où $u = 1$) dans de l'huile pure (où $u = 0$).

La solution du problème de Riemann peut être déterminée à partir du graphe de q d'une manière simple.

On construit l'enveloppe convexe comme à la figure 2.2b. On voit qu'il consiste en un segment de droite allant de $(0,0)$ à $(u_*, q(u_*))$ puis il poursuit selon $y = q(u)$ jusqu'à $(1,1)$. Le point de tangence u_* est exactement la valeur après le choc.

La solution se compose d'un choc entropique qui relie $u_R = 0$ à u_* puis d'une détente qui relie u_* à $u_L = 1$. On dit que la détente relie u_* à u_L car tous les états $u_* < v < u_L$ sont présents dans la solution. Par extension, on dit que le choc relie $u_R = 0$ à u_* (même si aucun état intermédiaire n'est présent dans la solution).

L'équation pour u_* est

$$f'(u_*) = \frac{q(u_*) - q(u_R)}{u_* - u_R} \quad \rightsquigarrow \quad u_* = \sqrt{\frac{a}{1+a}} \in]0,1[.$$

Cela fonctionne plus généralement pour deux états quelconques (à condition que $u_L > u_R$) et pour n'importe quel q . Notons que la pente du segment de droite est $s_* = (q(u_*) - q(u_R)) / (u_* - u_R)$, qui est exactement la vitesse du choc. Le fait que cette droite soit tangente à la courbe $q(u)$ en u_* signifie

que $s_* = q'(u_*)$, le choc se déplace à la même vitesse que les caractéristiques à ce bord de l'éventail de raréfaction.

- Si $u_L < u_R$, la même idée fonctionne, mais à la place nous regardons l'enveloppe convexe.

Notons que, si q est convexe, la construction de l'enveloppe convexe donne soit un seul segment de droite (choc unique) si $u_L > u_R$, soit la fonction f elle-même (raréfaction unique) si $u_L < u_R$.

2.3. Aide-mémoire

Problème de Cauchy :

$$u: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (t, x) \mapsto u(t, x) \quad \text{solution de} \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(t=0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Types de solutions :

- **Solution faible :** $u \in L^\infty$, peut présenter des discontinuités, et vérifie l'EDP au sens des distributions (chaque discontinuité respecte l'inégalité de Rankine-Hugoniot);
- **Solution faible entropique :** u est une solution faible et, en plus, chaque discontinuité satisfait l'inégalité de Lax;
- **Solution forte :** u est continue et satisfait l'EDP au sens classique (les solutions fortes sont des solutions faibles sans discontinuités).

Problème de Riemann : condition initiale à deux états constants séparés en $x = x_0$:

$$u(0, t) = g(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < x_0, \\ u_R & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

On suppose que le flux q est **strictement convexe ou strictement concave** (pas de changement de concavité). Deux cas se présentent :

Cas 1. q convexe avec $u_L > u_R$ ou q concave avec $u_L < u_R \rightsquigarrow$ Solution faible entropique :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < s(t), \\ u_R & \text{si } x > s(t), \end{cases}$$

où la position du choc (=discontinuité) $x = s(t)$ vérifie

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{\|q(u)\|}{\|u\|} = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L}, & (\text{Rankine-Hugoniot}) \\ s(0) = x_0. \end{cases}$$

La condition de Lax

$$q'(u_R) < s'(t) < q'(u_L)$$

est automatiquement satisfaite grâce à la convexité (resp. concavité) du flux et aux inégalités sur u_L, u_R .

Cas 2. Flux convexe avec $u_L < u_R$ ou Flux concave avec $u_L > u_R \rightsquigarrow$ Solution forte :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < q'(u_L)t + x_0, \\ u_r(t, x) & \text{si } q'(u_L)t + x_0 \leq x \leq q'(u_R)t + x_0, \\ u_R & \text{si } x > q'(u_R)t + x_0. \end{cases}$$

avec u_r (onde de raréfaction/détente) donné implicitement par

$$q'(u_r(t, x)) = \frac{x - x_0}{t} \quad \rightsquigarrow \quad u_r(t, x) = (q')^{-1}\left(\frac{x - x_0}{t}\right).$$

Courbes caractéristiques : une caractéristique est une trajectoire $x = \chi(t)$ le long de laquelle u est constant.

Si χ passe par le point (\hat{t}, \hat{x}) , alors

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x} + q'(u(\hat{t}, \hat{x}))(t - \hat{t}).$$

Par un point (\hat{t}, \hat{x}) , il peut passer une et une seule caractéristique (cas ①), plusieurs (cas ②) ou aucune (cas ③). Analysons chaque cas séparément.

① Travelling wave

La caractéristique étant unique, on note $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \hat{x} - q'(u(\hat{t}, \hat{x}))\hat{t}$ le pied de cette caractéristique.

La solution est constante le long de cette droite, ainsi $u(\hat{t}, \hat{x}) = u(0, \xi_{\hat{t}, \hat{x}}) = g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})$ et le pied est alors défini implicitement par

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \hat{x} - q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))\hat{t}.$$

La caractéristique passant par (\hat{t}, \hat{x}) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \hat{x} + q'(u(\hat{t}, \hat{x}))(t - \hat{t}) \\ &= \hat{x} + q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))(t - \hat{t}) \\ &= \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))t,\end{aligned}$$

ce qui paramétrise la famille de caractéristiques par leur pied ξ . Ainsi, pour tout ξ , on trace une droite d'équation $x = \xi + q'(g(\xi))t$.

② Solution faible (ou choc)

Si plusieurs caractéristiques passent par (\hat{t}, \hat{x}) , la solution présente une discontinuité le long d'une courbe $x = s(t)$ définie par la condition de **Rankine-Hugoniot** :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{\llbracket q(u) \rrbracket}{\llbracket u \rrbracket} = \frac{q(u^+) - q(u^-)}{u^+ - u^-}, \\ s(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $u^\pm = u(t^\pm, s(t^\pm))$.

La discontinuité est **entropique** si la discontinuité satisfait

$$q'(u^+) < s'(t) < q'(u^-) \quad (\text{inégalité de Lax})$$

c'est-à-dire si les caractéristiques de part et d'autre **entrent** dans la discontinuité.

③ Solution forte (raréfaction / détente)

Si aucune caractéristique ne passe par une zone du demi-espace $t > 0$, on construit un éventail de caractéristiques partant de (t_0, x_0) . La caractéristique passant par (\hat{t}, \hat{x}) a pour équation

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x} + q'(u(\hat{t}, \hat{x}))(t - \hat{t}) = x_0 + q'(u(\hat{t}, \hat{x}))(t - t_0)$$

ainsi

$$q'(u(\hat{t}, \hat{x})) = \frac{\hat{x} - x_0}{\hat{t} - t_0}$$

ce qui permet de calculer (implicitement) $u(\hat{t}, \hat{x})$.

Remarque : une solution faible peut aussi être construite dans cette zone, mais elle n'est pas entropique car elle viole la condition de Lax.

Breaking time (temps de formation d'un choc) : les solutions faibles des lois de conservation peuvent développer des discontinuités (ondes de choc). Deux mécanismes principaux existent : une disconti-

nuité déjà présente dans les données initiales $g(x)$; ou bien des caractéristiques qui se croisent au cours du temps. Si deux caractéristiques issues de points distincts ξ_1 et ξ_2 se rencontrent, alors la solution u devient discontinue à partir de ce point d'intersection (t_b, x_b) .

Construction : on considère deux caractéristiques issues de ξ_1 et $\xi_2 = \xi_1 + \Delta x$:

$$x = \chi_{0,\xi_1}(t) = \xi_1 + q'(g(\xi_1))t, \quad x = \chi_{0,\xi_2}(t) = \xi_2 + q'(g(\xi_2))t.$$

Le point d'intersection (t_b, x_b) vérifie donc

$$\begin{cases} x_b = \xi_1 + q'(g(\xi_1))t_b, \\ x_b = \xi_2 + q'(g(\xi_2))t_b. \end{cases}$$

On en déduit⁴

$$t_b = -\frac{\xi_2 - \xi_1}{q'(g(\xi_2)) - q'(g(\xi_1))} = -\frac{\Delta x}{q'(g(\xi_1 + \Delta x)) - q'(g(\xi_1))} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{q''(g(\xi_1))g'(\xi_1)}.$$

Écriture compacte : définissons $F(\xi) = q'(g(\xi))$, de sorte que $F'(\xi) = q''(g(\xi))g'(\xi)$. Alors

$$t_b = \inf_{\xi} \left\{ -\frac{1}{F'(\xi)} \right\} = -\frac{1}{F'(\xi_m)}$$

pour un certain ξ_m où l'infimum est atteint.

Position de rupture : comme x_b appartient à la caractéristique issue de ξ_m , on trouve

$$x_b = \chi_{0,\xi_m}(t_b) = \xi_m - \frac{F(\xi_m)}{F'(\xi_m)}.$$

4. En posant $F(\xi) = q'(g(\xi))$, on obtient

$$t_b = -\frac{\Delta x}{F(\xi_1 + \Delta x) - F(\xi_1)}.$$

Quand $\Delta x \rightarrow 0$, le dénominateur tend vers $F'(\xi_1)$, donc $t_b = -1/F'(\xi_1)$. Or $F'(\xi) = q''(g(\xi))g'(\xi)$ par la règle de la chaîne. Ainsi, $t_b = -1/(q''(g(\xi_1))g'(\xi_1))$. Le signe de t_b distingue : $t_b > 0$ si $q''(g(\xi_1))g'(\xi_1) < 0$ (formation d'un choc futur), et $t_b < 0$ sinon (pas de choc mais rarefaction).

2.4. Exercices

Exercice 2.1 (LWR)

Considérons le modèle LWR :

$$\partial_t \varrho + \partial_x q(\varrho) = 0, \quad q(\varrho) \stackrel{\text{def}}{=} v_m \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_m} \right) \varrho.$$

Calculer la solution lorsque la donnée initiale est

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2\varrho_m}{3} & \text{si } x < 0, \\ \varrho_m & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Correction

q est concave et l'on a

$$q'(\varrho) = v_m \left(1 - \frac{2\varrho}{\varrho_m} \right).$$

Puisque $\varrho_L < \varrho_R$, la solution présentera un choc :

$$\begin{aligned} \varrho^- &= \frac{2\varrho_m}{3}, & \varrho^+ &= \varrho_m, \\ q(\varrho^-) &= v_m \left(1 - \frac{\frac{2\varrho_m}{3}}{\varrho_m} \right) \frac{2\varrho_m}{3} = \frac{2}{9} v_m \varrho_m, & q(\varrho^+) &= v_m \left(1 - \frac{\varrho_m}{\varrho_m} \right) \varrho_m = 0, \\ q'(\varrho^-) &= v_m \left(1 - 2 \frac{\frac{2\varrho_m}{3}}{\varrho_m} \right) = -\frac{1}{3} v_m, & q'(\varrho^+) &= v_m \left(1 - \frac{2\varrho_m}{\varrho_m} \right) = -v_m, \end{aligned}$$

donc on cherche $x = s(t)$ solution du problème de Cauchy

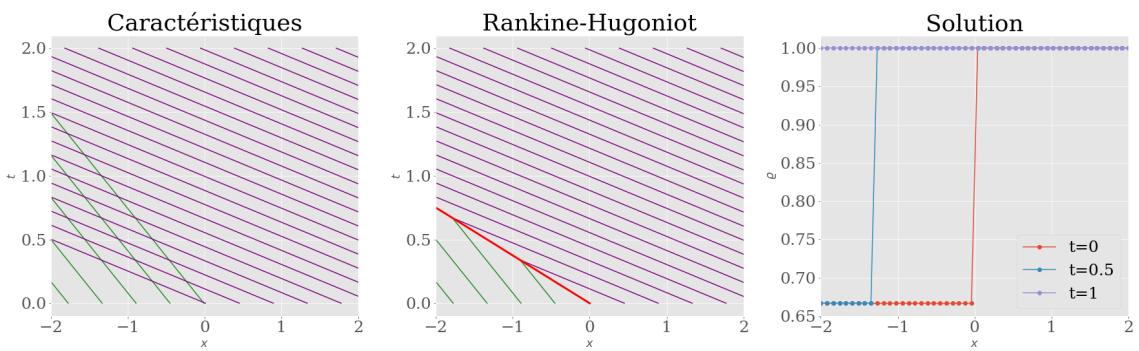
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q^+ - q^-}{\varrho^+ - \varrho^-} = \frac{0 - \frac{2}{9} v_m \varrho_m}{\varrho_m - \frac{2\varrho_m}{3}} = -\frac{2}{3} v_m, & t > 0, \\ s(t=0) = 0 \end{cases}$$

ayant noté $q^\pm \stackrel{\text{def}}{=} q(\varrho^\pm)$. La solution de ce problème est $s(t) = -\frac{2}{3} v_m t$: le choc se propage en arrière à la vitesse $-\frac{2}{3} v_m$. La solution pour notre problème est donc

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \frac{2\varrho_m}{3} & \text{si } x < s(t) = -\frac{2}{3} v_m t, \\ \varrho_m & \text{si } x > s(t) = -\frac{2}{3} v_m t. \end{cases}$$

La solution est bien entropique puisque

$$\underbrace{q'(\varrho_R)}_{-v_m} < \underbrace{s'(t)}_{-\frac{2}{3} v_m} < \underbrace{q'(\varrho_L)}_{-\frac{1}{3} v_m}$$



Exercice 2.2 (Équation de BURGERS (flux convexe) et problèmes de Riemann)

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & \text{avec } q(u) = \frac{u^2}{2}, \\ u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < x_0, \\ u_R, & \text{si } x > x_0. \end{cases} \end{cases}$$

Donner l'unique solution faible entropique $u(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ en utilisant la méthode des caractéristiques. Justifier clairement la réponse avec tous les dessins nécessaires.

Faire les calculs explicitement pour les cas

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ -1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1, \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Une page pour bien visualiser les caractéristiques avec l'équation de Burgers : http://www.clawpack.org/riemann_book/html/Burgers.html

Correction

On a

$$q(u) = \frac{u^2}{2} \text{ (convexe)} \quad q'(u) = u \text{ (croissante).}$$

Considérons la condition initiale

$$g(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < x_0, \\ u_R, & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(0, \xi)$ est

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + g(\xi)t = \begin{cases} \xi + u_L t, & \xi < x_0, \\ \xi + u_R t, & \xi > x_0. \end{cases}$$

Cas $u_L < u_R$: la donnée initiale du problème de Riemann a un saut croissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique est la solution avec une onde de raréfaction :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < x_0 + u_L t, \\ \frac{x-x_0}{t}, & \text{si } x_0 + u_L t < x < x_0 + u_R t, \\ u_R, & \text{si } x > x_0 + u_R t. \end{cases}$$

La solution dans l'onde s'obtient en résolvant $q'(u) = \frac{x-x_0}{t}$.

Cas $u_L = u_R$: la condition initiale est continue et constante, la solution entropique est la solution constante.

Cas $u_L > u_R$: la donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc de pied $(0, x_0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2}$$

avec la donnée initiale $s(0) = x_0$. On trouve donc $x = s(t) = x_0 + \frac{u_R + u_L}{2} t$ ainsi

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < s(t), \\ u_R, & \text{si } x > s(t). \end{cases}$$



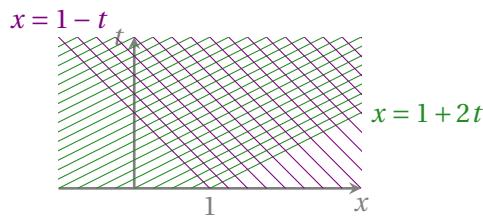
Voici deux exemples :

Cas 1. Considérons la donnée initiale

$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} 2, & \text{si } x < 1, \\ -1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(0, \xi)$ est donc

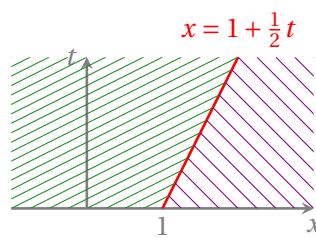
$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + 2t, & \xi < 1, \\ \xi - t, & \xi > 1. \end{cases}$$



La donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(x, t) = (1, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

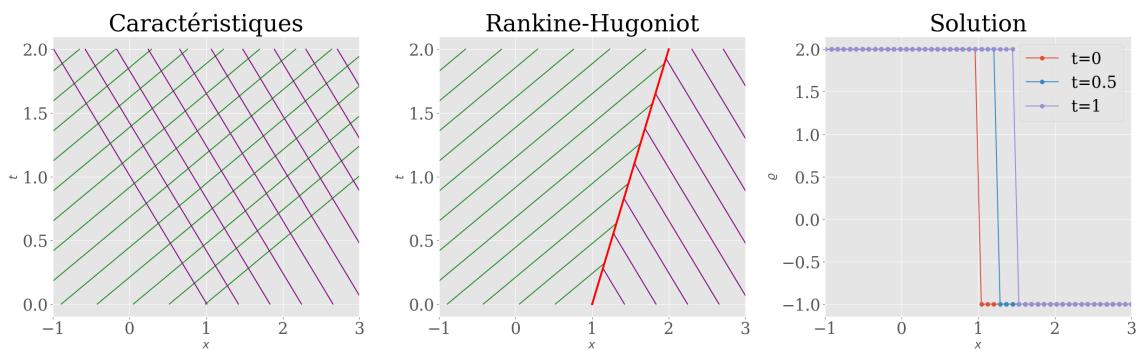
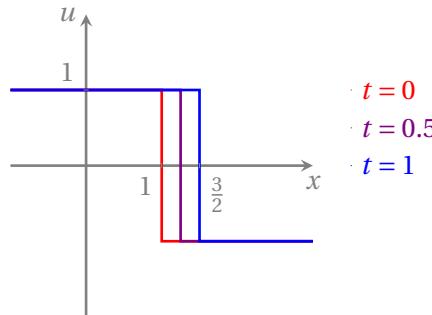
$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2}$$

avec la donnée initiale $s(0) = 1$. On trouve donc $x = s(t) = 1 + \frac{1}{2}t$.



La solution est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & x < 1 + \frac{1}{2}t, \\ -1, & x > 1 + \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

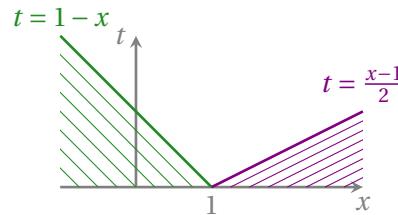


Cas 2. Considérons la donnée initiale

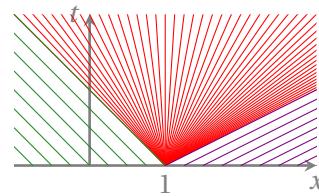
$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1, \\ 2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est cette fois-ci

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi - t, & \xi < 1, \\ \xi + 2t, & \xi > 1. \end{cases}$$

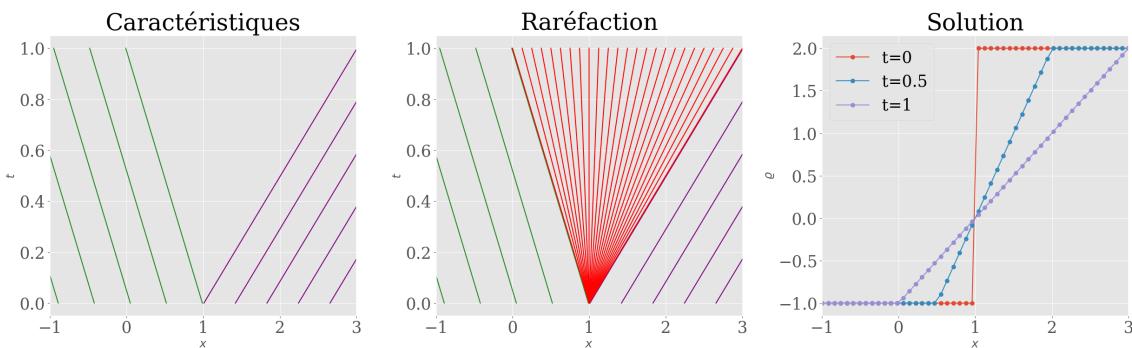
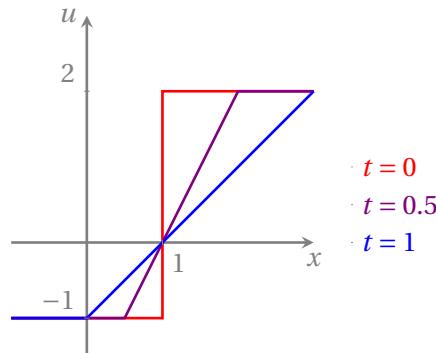


Pour $\xi = 1$ on a les deux caractéristiques d'équation $x = 1 - t$ et $x = 1 + 2t$ qui délimitent une zone qui n'est pas rejointe par des caractéristiques. En effet, la donnée initiale du problème de Riemann a un saut croissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique est une solution régulière qui présente une onde de raréfaction qui part en $(x, t) = (1, 0)$. Dans la raréfaction on a $q'(u) = \frac{x-1}{t}$. Comme $q'(u) = u$ alors $u(t, x) = \frac{x-1}{t}$.



La solution est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} -1, & x < 1-t, \\ \frac{x-1}{t}, & 1-t \leq x \leq 1+2t \\ 2, & x > 1+2t. \end{cases}$$



Exercice 2.3 (Équation de BURGERS, solutions faibles non entropiques)

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & \text{avec } q(u) = \frac{u^2}{2}, \\ u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Pour $0 < a < 1$, considérons les fonctions

$$u_a(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a}{2}t, \\ a, & \text{si } \frac{a}{2}t < x < \frac{a+1}{2}t, \\ 1, & \text{si } x > \frac{a+1}{2}t \end{cases}$$

Sont-elles des solutions fortes? Sont-elles des solutions faibles? Sont-elles des solutions entropiques? Quelle est l'unique solution entropique?

Correction

On a

$$q(u) = \frac{u^2}{2} \text{ (convexe)} \quad q'(u) = u \text{ (croissante)}$$

Solutions fortes ? Non : u_a n'est pas une solution forte car elle est discontinue.

Solutions faibles ? Oui : u_a est une solution faible puisque

- elle satisfait l'EDP où elle est régulière (car elle est constante par morceaux),
- les vitesses des discontinuités satisfont les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{aligned} (a-0)s'(t) &= q(a) - q(0) \quad \rightsquigarrow \quad as'(t) = \frac{a^2}{2} \quad \rightsquigarrow \quad s'(t) = \frac{a}{2} \quad \rightsquigarrow \quad s(t) = \frac{a}{2}t \\ (1-a)s'(t) &= q(1) - q(a) \quad \rightsquigarrow \quad (1-a)s'(t) = \frac{(1-a)(1+a)}{2} \quad \rightsquigarrow \quad s'(t) = \frac{1+a}{2} \quad \rightsquigarrow \quad s(t) = \frac{1+a}{2}t \end{aligned}$$

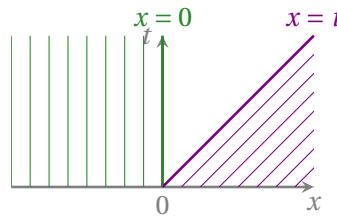
Les conditions de Rankine-Hugoniot permettent de savoir si une fonction régulière par morceaux est, ou non, solution faible de notre problème. Ici nous avons une infinité de solutions faibles. Parmi ces solutions faibles, il peut y avoir au mieux une unique solution entropique. Cependant, la solution entropique pourrait être une solution classique et donc ne pas être parmi celles données.

Solution entropique ? Non : Nous devons ajouter des contraintes supplémentaires afin d'identifier une solution unique parmi l'infinité de solutions possibles. Il existe trois approches principales pour imposer suffisamment de contraintes pour forcer la solution faible à être unique : les "solutions de viscosité", les "conditions d'entropie" et les "conditions de stabilité de Liu/Lax/Oleinik". Le plus simple à utiliser est le critère de Lax. On va voir qu'aucune fonction u_a n'est entropique car le long de l'onde $x = \frac{a}{2}t$ on a

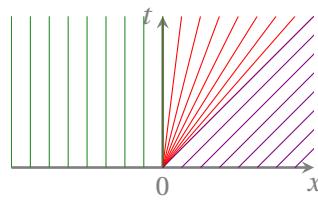
$$\underbrace{q'(u_R)}_a \not\leq \underbrace{s'(t)}_{\frac{a}{2}} \not\leq \underbrace{q'(u_L)}_0.$$

La vraie solution, c'est-à-dire la solution entropique, n'est pas de la forme u_a . Cherchons à calculer l'unique solution faible entropique du problème donné. L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 0, \\ \xi + t, & \xi > 0. \end{cases}$$



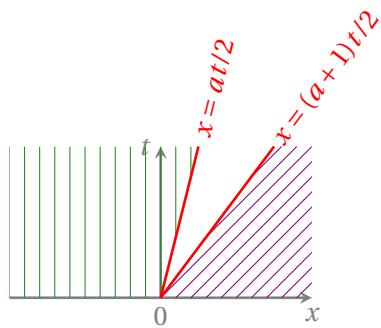
Pour $\xi = 0$ on a les deux caractéristiques d'équation $x = 0$ et $x = t$ qui délimitent une zone qui n'est pas rejointe par des caractéristiques : l'unique solution entropique est une solution régulière qui présente une onde de raréfaction qui part en $(x, t) = (0, 0)$. Dans la raréfaction on a $q'(u) = \frac{x}{t}$. Comme $q'(u) = u$ alors $u(t, x) = \frac{x}{t}$.



La solution est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 \leq x \leq t \\ 1, & x > t. \end{cases}$$

Les solutions faibles non entropiques proposées correspondent au graphe suivant (avec $a = \frac{1}{2}$) :



Exercice 2.4 (Burgers, construction d'une raréfaction par régularisation de la CI)

Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'équation de Burgers avec la condition initiale suivante

$$u(t=0, x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{si } x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Construire la solution à l'aide des caractéristiques. Est-ce une solution forte? Que se passe-t-il lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$?

Correction

On a

$$q(u) = \frac{u^2}{2} \quad q'(u) = u.$$

L'équation de la caractéristique qui passe par (\hat{t}, \hat{x}) est

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))(t - \hat{t}) + \hat{x} = g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})(t - \hat{t}) + \hat{x}.$$

Le pied de la caractéristique est défini implicitement par

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \hat{x} - g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})\hat{t} = \begin{cases} \hat{x} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \leq 0, \\ \hat{x} - \frac{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}}{\varepsilon} \hat{t} & \text{si } 0 < \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < \varepsilon, \\ \hat{x} - \hat{t} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \geq \varepsilon, \end{cases}$$

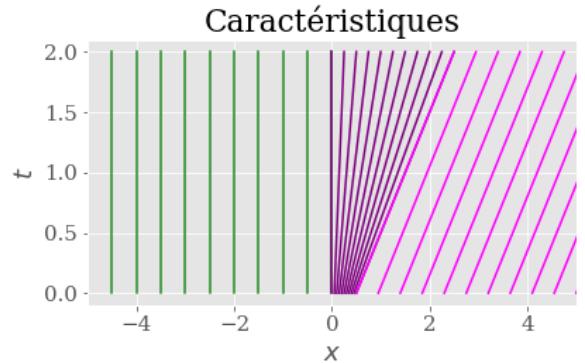
On peut écrire explicitement la fonction $(\hat{t}, \hat{x}) \mapsto \xi_{\hat{t}, \hat{x}}$:

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \begin{cases} \hat{x} & \text{si } \hat{x} \leq 0, \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \hat{t}} \hat{x} & \text{si } 0 < \hat{x} < \varepsilon \hat{t}, \\ \hat{x} - \hat{t} & \text{si } \hat{x} \geq \varepsilon + \hat{t}, \end{cases}$$

Autrement dit, on a des droites d'équation $x = at + b$ avec a et b qui dépendent de ξ :

- $x = \xi$ si $\xi \leq 0$ (droites verticales),
- $x = t + \xi$ si $\xi \geq \varepsilon$,
- $x = \left(\frac{1}{\varepsilon} t + 1\right) \xi$ si $0 < \xi < \varepsilon$.

Notons que g est croissante donc les caractéristiques ne s'intersectent pas : la solution est forte.



On note $u_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la restriction de la fonction u à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$u_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)).$$

On a alors

$$u'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \partial_t u(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x u(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = 0.$$

Par conséquent

$$u_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = u_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \leq 0, \\ \frac{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \geq \varepsilon, \end{cases}$$

On connaît explicitement la fonction $(\hat{t}, \hat{x}) \mapsto \xi_{\hat{t}, \hat{x}}$ ainsi

$$u_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{x} \leq 0, \\ \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \hat{t}} \hat{x}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon + \hat{t}} \hat{x} & \text{si } 0 < \hat{x} < \varepsilon + \hat{t}, \\ 1 & \text{si } \hat{x} \geq \varepsilon + \hat{t}, \end{cases}$$

La solution est donc donnée par

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{\varepsilon + t} x & \text{si } 0 < x < \varepsilon + t, \\ 1 & \text{si } x \geq \varepsilon + t. \end{cases}$$

Enfin, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x < t, \\ 1 & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

qui est solution du problème lorsque la donnée initiale est

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 2.5 (Formation d'un choc avec une CI régulière)

Une caractéristique fondamentale des équations avec un flux non linéaire est que, même pour des données initiales régulières, la solution du problème de Cauchy peut présenter des discontinuités en temps fini.

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, \\ u(x, 0) = g(x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases} \quad \text{avec } q(u) = \frac{u^2}{2},$$

Calculer t_b le breaking time. Pour $t \in [0, t_b]$, calculer la solution exacte par la méthode des caractéristiques. Que se passe-t-il pour $t > t_b$?

Correction

On a

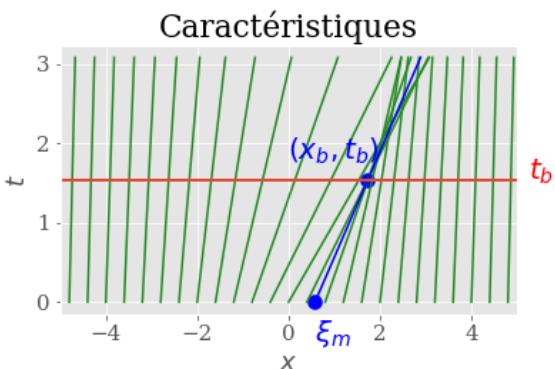
$$q(u) = \frac{u^2}{2} \quad q'(u) = u.$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donc

$$\chi_{\xi, 0}(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + g(\xi)t$$

La solution est donc donnée par

$$u(t, x) = g(\xi) = g(x - g(\xi)t).$$



Il s'agit d'une relation implicite qui détermine la solution de l'équation de Burgers si les caractéristiques ne se croisent pas. Si les caractéristiques se croisent, il y a la formation d'une onde de choc. L'intersection ou non des caractéristiques dépend de la condition initiale.

Pour $t < t_b$ ces lignes caractéristiques ne s'intersectent pas ainsi la solution du problème de Cauchy est

$$u\left(t, x + \frac{t}{1+x^2}\right) = g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Pour $t > t_b$, les lignes caractéristiques s'intersectent et la solution n'est plus régulière : il y a la formation d'une onde de choc. On sait que le premier instant t_b à partir duquel les caractéristiques s'intersectent (le breaking time) est donné par

$$t_b = \min_{\xi} G(\xi) \quad \text{ayant défini} \quad G(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{F'(\xi)}, \quad F(\xi) = q'(g(\xi)).$$

On a

$$F(\xi) = q'(g(\xi)) = g(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \quad F'(\xi) = -\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}, \quad G(\xi) = \frac{(1+\xi^2)^2}{2\xi}.$$

On a $G'(\xi) = \frac{(1+\xi^2)(3\xi^2-1)}{2\xi^2} = 0$ ssi $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $G(-1/\sqrt{3}) < 0$ et $G(1/\sqrt{3}) > 0$, on pose $\xi_m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et

$$t_b = \min_{\xi} G(\xi) = G(\xi_m) = \frac{8\sqrt{3}}{9} = \frac{8}{\sqrt{27}}.$$

Comme x_b appartient à la caractéristique $\chi_{\xi_m,0}(t) = \xi_m + q'(g(\xi_m))t$ on trouve

$$x_b = \chi_{\xi_m,0}(t_b) = \xi_m + g(\xi_m)t_b = \frac{7\sqrt{3}}{12} = \sqrt{3}.$$

Pour déterminer l'équation de l'onde de choc qui a pied en (t_b, x_b) on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{1+s^2(t)} \\ s(t_b) = x_b \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{9t+1+8\sqrt{3}}$.

Exercice 2.6 (Formation d'un choc)

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, \\ u(x, 0) = g(x) = \arctan(x). \end{cases} \quad \text{avec } q(u) = u - u^2,$$

Calculer le breaking time.

Correction

On a

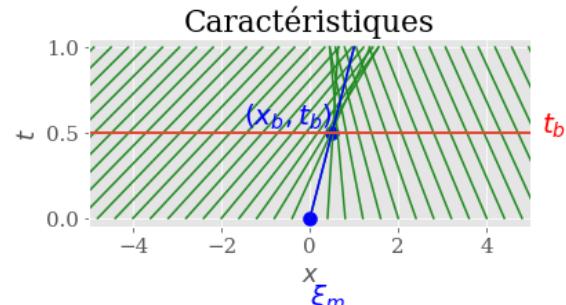
$$q(u) = u - u^2 \quad q'(u) = 1 - 2u.$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donc

$$\chi_{\xi,0}(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (1 - 2g(\xi))t$$

La solution est donc donnée par

$$u(t, x) = g(\xi) = g(x - (1 - 2g(\xi))t).$$



On sait que le premier instant t_b à partir duquel les caractéristiques s'intersectent (le breaking time) est donné par

$$t_b = \min_{\xi} G(\xi) \quad \text{ayant définit} \quad G(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{F'(\xi)}, \quad F(\xi) = q'(g(\xi)).$$

On a

$$F(\xi) = q'(g(\xi)) = 1 - 2g(\xi) = 1 - 2\arctan(\xi) \quad F'(\xi) = -\frac{2}{1 + \xi^2}, \quad G(\xi) = \frac{1 + \xi^2}{2}.$$

On a $G'(\xi) = \xi$ et $G'(\xi) = 0$ ssi $\xi = 0$. On pose $\xi_m = 0$ et

$$t_b = \min_{\xi} G(\xi) = G(\xi_m) = \frac{1}{2}.$$

Comme x_b appartient à la caractéristique $\chi_{\xi_m, 0}(t) = \xi_m + q'(g(\xi_m))t$ on trouve

$$x_b = \chi_{\xi_m, 0}(t_b) = \xi_m + q'(g(\xi_m))t_b = 0 + (1 - 2 \arctan(0)) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.7 (Manipulation de lois de conservation)

Dans le traitement des lois de conservation, il faut bien avoir en tête que la transformation de la forme différentielle en ce qui semble être une équation différentielle équivalente peut ne pas donner une équation équivalente dans le contexte des solutions faibles.

Dans cet exercice on veut montrer que deux lois de conservation différentes peuvent avoir la même solution forte mais différentes solutions faibles.

Dans le contexte de solutions régulières, les deux équations aux dérivées partielles suivantes sont équivalentes :

- l'équation de Burgers

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.15)$$

- l'équation

$$\partial_t(u^2) + \partial_x \left(\frac{2u^3}{3} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.16)$$

1. Soit u de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Montrer que elle est solution de l'équation de Burgers (2.15) ssi elle est aussi solution de l'équation (2.16).
2. Considérons alors le problème de Riemann pour ces deux équations dans le cas simple $u_L > u_R$. Comparer les deux conditions de Rankine-Hugoniot pour les deux lois de conservation (2.15) et (2.16). Calculer ensuite l'unique solution faible entropique de (2.15) et l'unique solution faible entropique de (2.16) pour la même donnée initiale :

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < 0, \\ u_R, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Correction

1. Soit u de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Si on multiplie l'équation de Burger (2.15) par $2u$ on trouve bien la loi de conservation (2.16).

- Si u est solution régulière de l'équation de Burgers (2.15) alors

$$0 = \partial_t u + u \partial_x u.$$

- Si u est solution régulière de l'équation (2.16) alors on peut développer les dérivées ainsi

$$0 = 2u \partial_t u + 2u^2 \partial_x u = 2u (\partial_t u + u \partial_x u).$$

Donc u est solution de (2.15) ssi est solution de (2.16).

Exemple : $u(t, x) = \frac{x}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$ et est solution de (2.15) et de (2.16) car

$$\begin{aligned}\partial_t u &= -\frac{x}{t^2}, & \partial_x \frac{u^2}{2} &= \partial_x \frac{x^2}{2t^2} = \frac{x}{t^2}, & \implies u \text{ est solution de (2.15)} \\ \partial_t(u^2) &= \partial_t \left(\frac{x^2}{t^2} \right) = \frac{-2x^2}{t^3}, & \partial_x \frac{2u^3}{3} &= \partial_x \frac{2x^3}{3t^3} = \frac{2x^2}{t^3}, & \implies u \text{ est solution de (2.16)}\end{aligned}$$

2. La condition de Rankine-Hugoniot pour l'équation de Burgers (2.15) donne

$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{u_R + u_L}{2}.$$

La condition de Rankine-Hugoniot pour la loi de conservation (2.16) donne

$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{2(u_R^3 - u_L^3)}{3(u_R - u_L)} = \frac{2(u_R^2 + u_R u_L + u_L^2)}{3}.$$

Par conséquent, lorsqu'on considère deux solutions faibles, elles ont des discontinuités qui se propagent à deux vitesses différentes dès que $u_L \neq u_R$. On remarquera par ailleurs que ces deux solutions faibles sont aussi entropiques.

Il est clair que les opérations de manipulation de lois de conservation dans le cas de solutions régulières doivent être menées avec précautions dans le contexte des solutions faibles! La dérivation de (2.16) à partir de (2.15) nécessite de manipuler les dérivées d'une manière qui n'est valable que lorsque la solution est régulière.

Exercice 2.8 (Équation de BURGERS (flux convexe) : double problème de Riemann)

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & \text{avec } q(u) = \frac{u^2}{2}, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Nous allons considérer une condition initiale sous la forme d'un double problème de Riemann :

$$g(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < 1, \\ u_M, & \text{si } 1 < x < 2, \\ u_R, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Plus particulièrement, nous allons considérer les cas suivants :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1, \\ 1 \text{ si } x \in]1; 2[, \\ 2 \text{ si } x > 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x < 1, \\ 1 \text{ si } x \in]1; 2[, \\ 0 \text{ si } x > 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1, \\ 1 \text{ si } x \in]1; 2[, \\ 0 \text{ si } x > 2. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 1, \\ 0 \text{ si } x \in]1; 2[, \\ 1 \text{ si } x > 2. \end{cases}$$

Dans chaque cas, donner l'unique solution faible entropique $u(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ des problèmes suivants en utilisant la méthode des caractéristiques. Justifier clairement la réponse avec tous les dessins nécessaires.

Pour conclure, généraliser au cas

$$g(x) = \begin{cases} L & \text{si } x < 1, \\ M & \text{si } x \in]1;2[, \\ R & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

avec $L < M < R$ puis $L > M > R$.

Correction

On a

$$q(u) = \frac{u^2}{2} \quad q'(u) = u \quad (q')^{-1}(r) = r$$

donc q est une fonction croissante et convexe. De plus

$$x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x} + q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))(t - \hat{t}) = \hat{x} + g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})(t - \hat{t}) \quad \rightsquigarrow \quad x = \chi_{0, \xi_{\hat{t}, \hat{x}}}(t) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})t$$

Considérons la condition initiale

$$g(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < 1, \\ u_M, & \text{si } 1 < x < 2, \\ u_R, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Alors

$$x = \xi + g(\xi)t = \begin{cases} \xi + u_L t, & \text{si } \xi < 1, \\ \xi + u_M t, & \text{si } 1 < \xi < 2, \\ \xi + u_R t, & \text{si } \xi > 2. \end{cases}$$

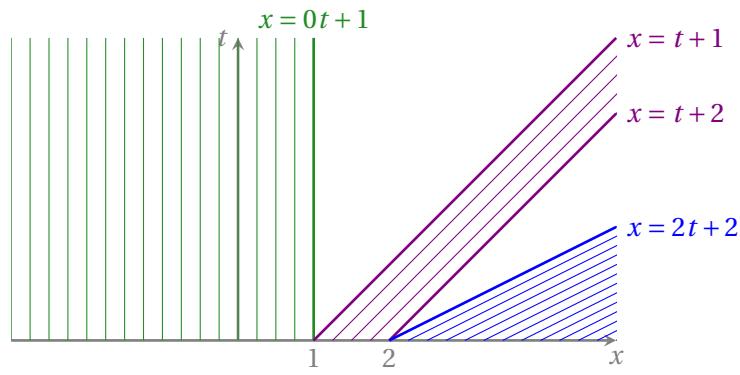


Donnée “0,1,2”

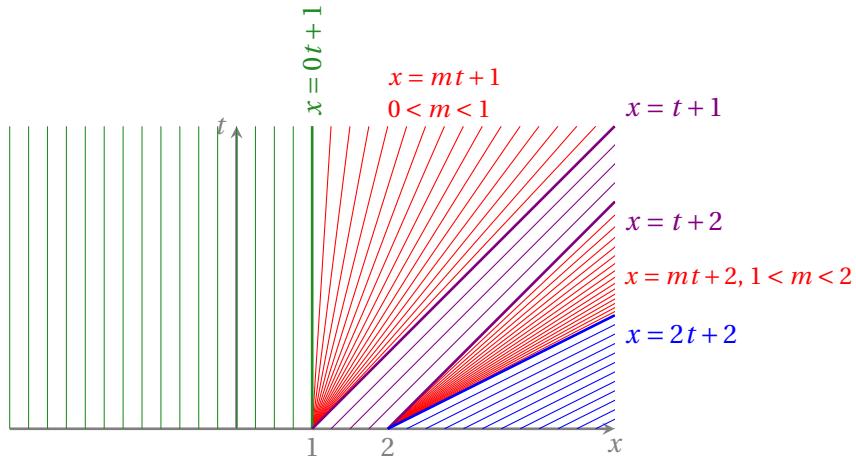
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + 2t, & \xi > 2. \end{cases}$$

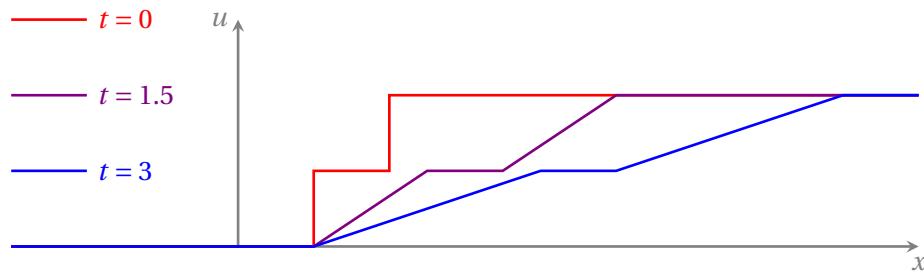


La donnée initiale a deux sauts croissants, un en $x = 1$ et l'autre en $x = 2$. Puisque q est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en $(1, 0)$ et l'autre en $(2, 0)$.



Dans la raréfaction on a $q'(u) = \frac{x-x_0}{t}$ et puisque $q'(u) = u$ alors $y = q'(u)$ ssi $u = (q')^{-1}(y) = y$. La solution s'écrit

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < 1+t, \\ 1, & \text{si } 1+t < x < 2+t, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } 2+t < x < 2+2t, \\ 2, & \text{si } x > 2+2t, \end{cases}$$



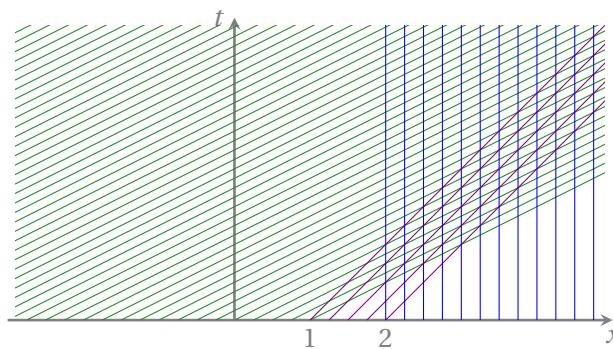
Donnée “2,1,0” Considérons la donnée initiale

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Elle a deux sauts décroissants, un en $x = 1$ et un en $x = 2$. Puisque q est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de choc qui partent de $(1, 0)$ et de $(2, 0)$.

- En effet, l'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + 2t, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$



- Pour calculer les équations des deux ondes de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

- choc de pied $(1, 0)$

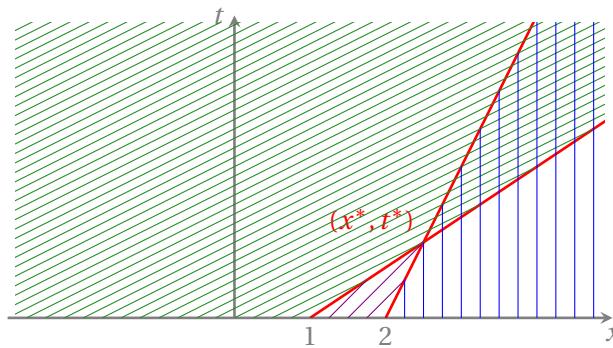
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1-4}{2(1-2)} = \frac{3}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{3}{2}t + 1$;

- choc de pied $(2, 0)$

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0-1}{2(0-1)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$.



Ces deux chocs vont ensuite interagir à partir d'un (x^*, t^*) qu'on détermine en résolvant le système

linéaire

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 2, \\ x = \frac{3}{2}t + 1. \end{cases}$$

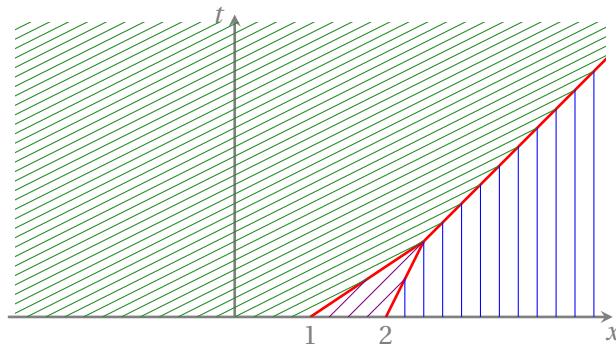
On obtient ainsi le pied de la nouvelle onde de choc qui est $(x^*, t^*) = (\frac{5}{2}, 1)$. Donc la solution pour $0 < t < 1$ est

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < \frac{3}{2}t + 1, \\ 1, & \text{si } \frac{3}{2}t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 2, \end{cases}$$

- Pour $t \geq 1$ seule les données initiales pour $x < 1$ et $x > 2$ sont transportées et ce nouveau choc, qui part de $(\frac{5}{2}, 1)$, vérifie encore la relation de RANKINE-HUGONIOT :

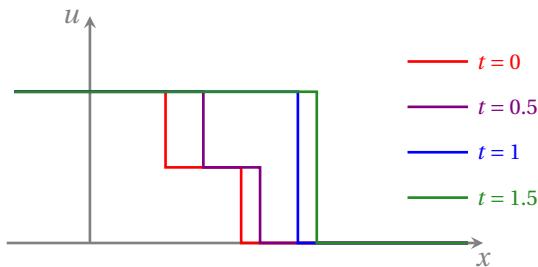
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0-4}{2(0-2)} = 1 \\ s(1) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = t + \frac{3}{2}$.



L'unique solution faible entropique pour tout $t > 0$ est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } t < 1 \text{ et } x < \frac{3}{2}t + 1, \\ 2, & \text{si } t > 1 \text{ et } x < t + \frac{3}{2}, \\ 1, & \text{si } t < 1 \text{ et } \frac{3}{2}t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } t < 1 \text{ et } x > \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } t > 1 \text{ et } x > t + \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < \min\{\frac{3}{2}t + 1, t + \frac{3}{2}\}, \\ 1, & \text{si } \frac{3}{2}t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } x > \max\{\frac{1}{2}t + 2, t + \frac{3}{2}\}, \end{cases}$$

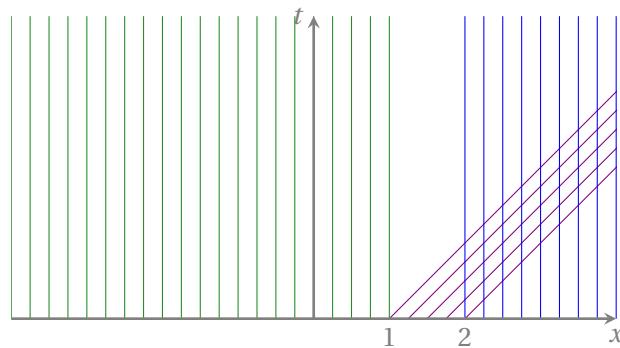


Donnée “0,1,0” Considérons la donnée initiale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$



On s'attend donc à ce que la solution faible entropique présente une onde de raréfaction centrée en $(1, 0)$ et une onde de choc qui part de $(2, 0)$ et que, après un certain temps, les deux ondes interagissent.

- La raréfaction est comprise entre la droite d'équation

$$x(t) = 1$$

et la droite d'équation

$$x(t) = 1 + t$$

et a équation

$$u(t, x) = (q')^{-1} \left(\frac{x-1}{t-0} \right) = \frac{x-1}{t}.$$

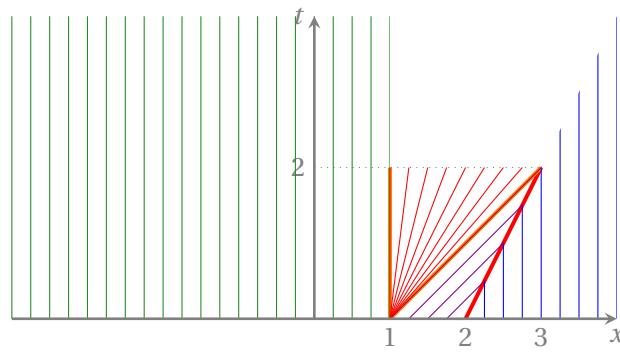
- Pour déterminer l'équation de l'onde de choc qui a pied en $(2, 0)$ on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1-0}{2(1-0)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

Ces considérations sont valables jusqu'à ce que l'onde de choc et l'onde de raréfaction se touchent, c'est-à-dire jusqu'à $t = 2$. Donc la solution pour $0 < t < 2$ est

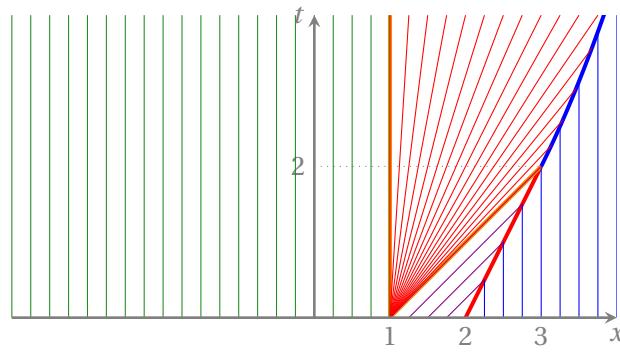
$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < t+1, \\ 1, & \text{si } t+1 < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2. \end{cases}$$



- Pour $t > 2$ on continue à avoir une onde de choc mais l'état gauche n'est plus constante car il est donné par la raréfaction i.e. $u_L = \frac{s(t)-1}{t}$ donc le nouveau choc a pied en $(3, 2)$ et vérifie

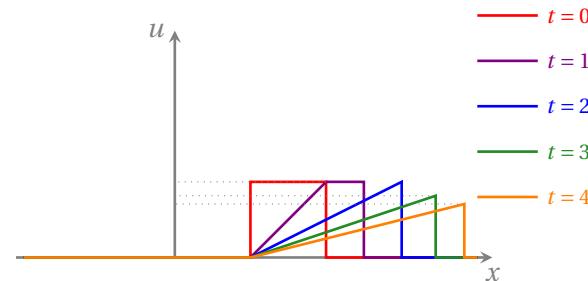
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0 - \left(\frac{s(t)-1}{t}\right)^2}{2(0 - \frac{s(t)-1}{t})} = \frac{s(t)-1}{2t} \\ s(2) = 3 \end{cases}$$

d'où l'équation $x = 1 + \sqrt{2t}$.



L'unique solution faible entropique pour $t > 0$ est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < \min\{1+t, 1+\sqrt{2t}\}, \\ 1, & \text{si } 1+t < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2 \text{ et } t < 2, \\ 0, & \text{si } x > 1+\sqrt{2t} \text{ et } t \geq 2. \end{cases}$$



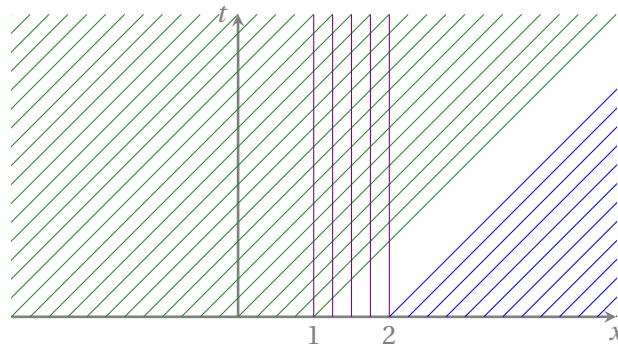
Remarquons que l'amplitude du choc vaut $\sqrt{\frac{2}{t}}$ et le choc se déplace à vitesse $\sqrt{\frac{1}{2t}}$. Par conséquent, pour $t \rightarrow \infty$, l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers zéro.

Donnée “1, 0, 1”

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

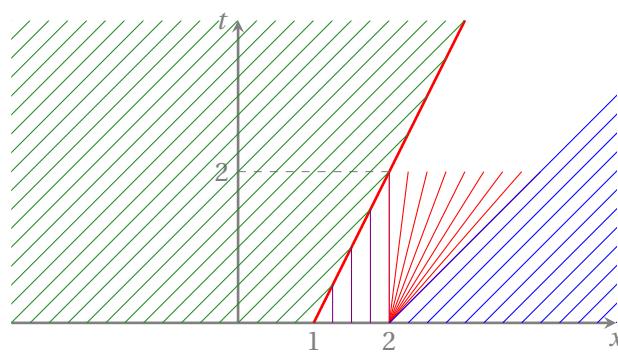
$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + t, & \xi < 1, \\ \xi, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + t, & \xi > 2. \end{cases}$$



La donnée initiale a un saut décroissant en $x = 1$ et un saut croissant en $x = 2$. Puisque q est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente une onde de choc qui part de $(1, 0)$ et une onde de raréfaction centrée en $(2, 0)$. Pour déterminer l'équation de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1-0}{2(1-0)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

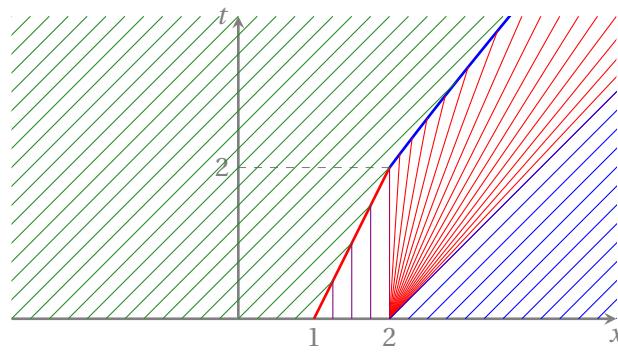
d'où $x = \frac{1}{2}t + 1$.



Ces considérations sont valables jusqu'à $t = 2$, ensuite on continue à avoir une onde de choc mais avec

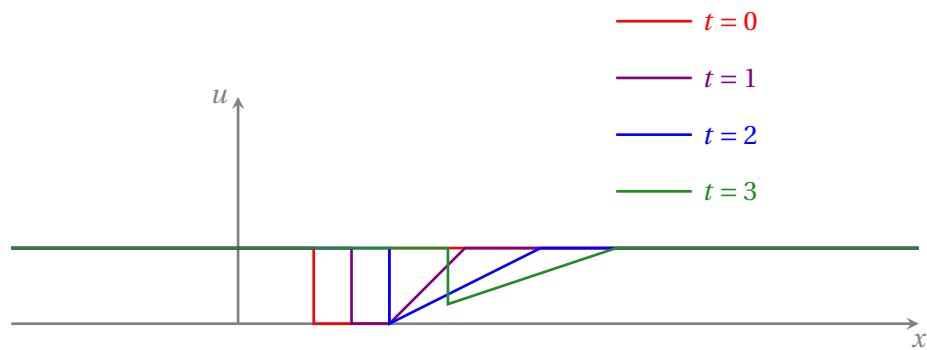
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1^2 - (\frac{s(t)}{t})^2}{2(1 - \frac{s(t)}{t})} = \frac{1}{2} + \frac{s(t)}{2t} \\ s(2) = 2 \end{cases}$$

d'où l'équation $x = t - \sqrt{2t} + 2$.



Puisque la courbe $x = t - \sqrt{2t} + 2$ et la courbe $x = t + 2$ ne se croisent pas pour $t > 2$, la solution est valable pour tout t :

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \min\{t/2 + 1, t - \sqrt{2t} + 2\}, \\ 0, & \text{si } t + 1 < x < 2 \text{ et } t < 2, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } \max\{2, t - \sqrt{2t} + 2\} < x < t + 2, \\ 1, & \text{si } x > t + 2. \end{cases}$$



◊

Donnée “ $L < M < R$ ”

$$g(x) = \begin{cases} L & \text{si } x < -1, \\ M & \text{si } -1 < x < 1, \\ R & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est alors

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + Lt, & \xi < -1, \\ \xi + Mt, & -1 < \xi < 1, \\ \xi + Rt, & \xi > 1. \end{cases}$$

Comme $L < M < R$, l'unique solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en $(-1, 0)$ et l'autre en $(1, 0)$:

$$u(t, x) = \begin{cases} L, & \text{si } x < -1, \\ \frac{x+1}{t}, & \text{si } -1 < x < -1 + Lt, \\ M, & \text{si } -1 + Lt < x < 1 + Mt, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 + Mt < x < 1 + Rt, \\ R, & \text{si } x > 1 + Rt. \end{cases}$$



Donnée “ $L > M > R$ ”

$$g(x) = \begin{cases} L & \text{si } x < -1, \\ M & \text{si } -1 < x < 1, \\ R & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est alors

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + Lt, & \xi < -1, \\ \xi + Mt, & -1 < \xi < 1, \\ \xi + Rt, & \xi > 1. \end{cases}$$

Comme $L > M > R$, l'unique solution faible entropique présente deux ondes de choc qui partent de $(-1, 0)$ et de $(1, 0)$.

Pour calculer les équations des deux ondes de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

- choc de pied $(-1, 0)$:

$$\begin{cases} s'_1(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{(u_R)^2}{2} - \frac{(u_L)^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{M+L}{2}, \\ s_1(0) = -1, \end{cases}$$

d'où $x = s_1(t) = \frac{M+L}{2}t - 1$;

- choc de pied $(1, 0)$:

$$\begin{cases} s'_2(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{(u_R)^2}{2} - \frac{(u_L)^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{R+M}{2}, \\ s_2(0) = 1, \end{cases}$$

d'où $x = s_2(t) = \frac{R+M}{2}t + 1$.

Comme $\frac{M+L}{2} > \frac{R+M}{2}$, ces deux chocs vont interagir à partir d'un (x^*, t^*) qu'on détermine en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} x = \frac{M+L}{2}t - 1, \\ x = \frac{R+M}{2}t + 1. \end{cases}$$

On obtient ainsi le pied de la nouvelle onde de choc qui est $(x^*, t^*) = (\frac{M+R}{L-R}, \frac{4}{L-R})$. Donc la solution pour $0 < t < \frac{4}{L-R}$ est

$$u(t, x) = \begin{cases} L, & \text{si } x < \frac{M+L}{2}t - 1, \\ M, & \text{si } \frac{M+L}{2}t - 1 < x < \frac{R+M}{2}t + 1, \\ R, & \text{si } x > \frac{R+M}{2}t + 1. \end{cases}$$

Pour $t \geq \frac{4}{L-R}$ seule les données initiales pour $x < -1$ et $x > 1$ sont transportées et ce nouveau choc, qui part de $(\frac{M+R}{L-R}, \frac{4}{L-R})$, vérifie encore la relation de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'_3(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{(u_R)^2}{2} - \frac{(u_L)^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{R+L}{2}, \\ s_3(\frac{4}{L-R}) = \frac{M+R}{L-R}, \end{cases}$$

d'où $x = s_3(t) = \frac{M+R}{L-R}t - 1$.

L'unique solution faible entropique pour tout $t \geq \frac{4}{L-R}$ est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} L, & \text{si } x < \frac{M+R}{L-R} t - 1, \\ R, & \text{si } x > \frac{M+R}{L-R} t - 1. \end{cases}$$

Exercice 2.9

On considère l'équation non-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t(u) + \partial_x(q(u)) = 0, & \text{avec } q(u) = \frac{u^2}{2}, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Donner l'unique solution faible entropique $u(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ des problèmes suivants en utilisant la méthode des caractéristiques.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| < 1, \\ 1 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Correction

On a

$$q(u) = u - \frac{u^2}{2}, \quad q'(u) = u, \quad (q')^{-1}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) = \frac{x-x_0}{t-t_0}.$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi_{t,x}, 0)$ est donc

$$\chi_{t,x}(t) = \xi_{t,x} + q'(g(\xi_{t,x}))t = \xi + g(\xi_{t,x})t.$$

Si en (t, x) il passe une et une seule caractéristique, la solution est

$$u(t, x) = g(\xi_{t,x} + g(\xi_{t,x})t).$$

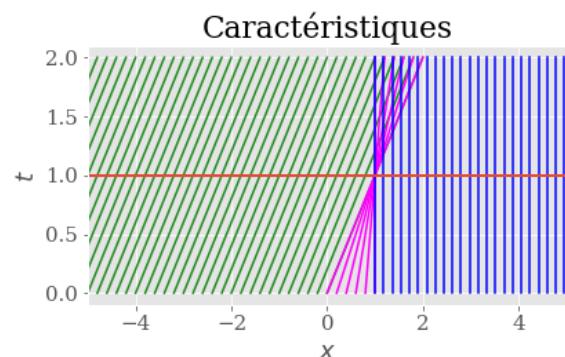


Donnée initiale :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

Avec les données fournies, nous déduisons que les caractéristiques de pied $(\xi, 0)$ ont pour équation

$$\chi(t) = \begin{cases} \xi + t & \text{si } \xi \leq 0, \\ \xi + (1-\xi)t & \text{si } 0 < \xi < 1 \\ \xi & \text{si } \xi \geq 1. \end{cases}$$



Toutes les caractéristiques dont le pied appartient au segment $0 < \xi < 1$ passent par le point $(1, 1)$. Pour $t < 1$, elles n'entrent pas en collision, donc la solution ne présente aucune discontinuité et est implicitement définie par

$$u(t, x) = g(x - q'(u(t, x))t) = g(x - u(t, x)t)$$

On a

$$u(t, x) = g(\xi_{t,x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_{t,x} \leq 0, \\ 1 - \xi_{t,x} & \text{si } 0 < \xi_{t,x} < 1 \\ 0 & \text{si } \xi_{t,x} \geq 1, \end{cases}$$

Pour $0 < \xi_{t,x} < 1$, i.e. pour $t < x < 1$, on a $x = \xi_{t,x} + (1 - \xi_{t,x})t$, c'est-à-dire $x = (1 - t)\xi_{t,x} + t$ et $u(t, x) = g(\xi_{t,x}) = g\left(\frac{x-t}{1-t}\right) = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-t-x+t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t}$.

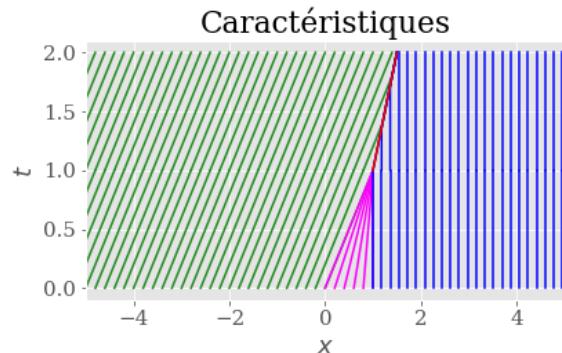
En conclusion, pour $t < 1$, on a la solution forte

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } t < x < 1 \quad \text{pour } t < 1. \\ 0 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

Une discontinuité prend naissance au point $(1, 1)$ en raison de la collision entre les caractéristiques verticales $x = \xi$ (portant la donnée initiale $g(x) = 0$ pour $x > 1$) et les caractéristiques $x = \xi + t$ (portant la donnée initiale $g(x) = 1$ pour $x < 0$).

Selon la condition de Rankine-Hugoniot, la courbe de choc résout le problème de Cauchy

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{1}{2}, \\ s(1) = 1, \end{cases} \rightsquigarrow s(t) = \frac{1+t}{2}.$$



La solution faible entropique est :

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1+t}{2}, \\ 0 & \text{si } x > \frac{1+t}{2}, \end{cases} \quad \text{pour } t \geq 1.$$

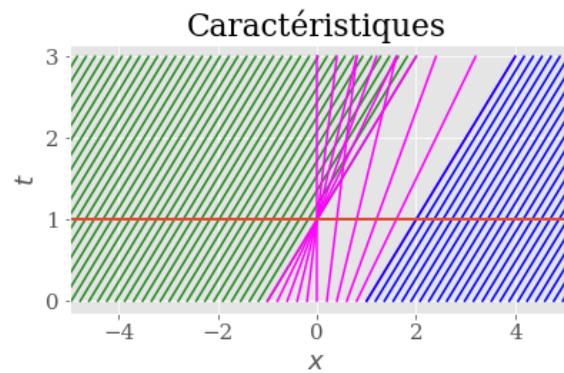


Donnée initiale :

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \rightsquigarrow g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1, \\ -x & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Avec les données fournies, nous déduisons que les caractéristiques de pied $(\xi, 0)$ ont pour équation

$$\chi(t) = \begin{cases} \xi + t & \text{si } \xi \leq -1, \\ \xi - \xi t & \text{si } -1 < \xi \leq 0, \\ \xi + \xi t & \text{si } 0 < \xi \leq 1, \\ \xi + t & \text{si } \xi \geq 1. \end{cases}$$



Pour $t < 1$, les caractéristiques n'entrent pas en collision. La solution ne présente alors aucune discontinuité et est implicitement définie par $u = g(x - q'(u)t) = g(x - ut)$. Pour $|\xi| < 1$, i.e. pour ???, on a $u(t, x) = g(\xi) = |\xi|$. Pour $|\xi| > 1$, i.e. pour $|x| > 1$, on a $u(t, x) = g(\xi) = 0$. Pour $t < x < 1$, la solution est implicitement définie par $u = g(x - ut) = 1 - (x - ut)$ ce qui donne $(1 - t)u = 1 - x$. En conclusion, pour $t < 1$, on a la solution forte

Une discontinuité prend naissance au point $(1, 1)$ en raison de la collision entre les caractéristiques verticales $x = \xi$ (portant la donnée initiale $g(x) = 0$ pour $x > 1$) et les caractéristiques $x = \xi + t$ (portant la donnée initiale $g(x) = 1$ pour $x < 0$).

Exercice 2.10 (Équation non linéaire (flux concave))

On considère l'équation non-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t(u) + \partial_x(q(u)) = 0, & \text{avec } q(u) = \frac{u(2-u)}{2}, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Donner l'unique solution faible entropique $u(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ des problèmes suivants en utilisant la méthode des caractéristiques. Justifier clairement la réponse avec tous les dessins nécessaires.

$$\begin{array}{ll} g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases} & g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \\ g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 0 & \text{si } x > 2, \end{cases} & g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 2 & \text{si } x > 2, \end{cases} \\ & g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases} \end{array}$$

Correction

On a

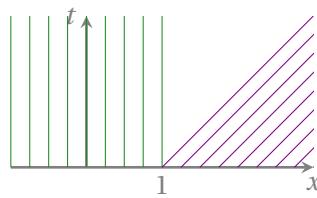
$$q(u) = u - \frac{u^2}{2}, \quad q'(u) = 1 - u, \quad (q')^{-1}\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right) = 1 - \frac{x - x_0}{t - t_0}, \quad q''(u) = -1 \text{ (le flux est concave).}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donc

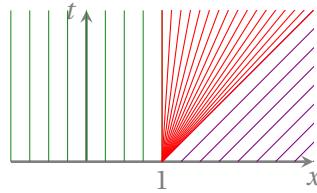
$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (1 - g(\xi))t.$$

$$1. \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & \xi > 1. \end{cases}$

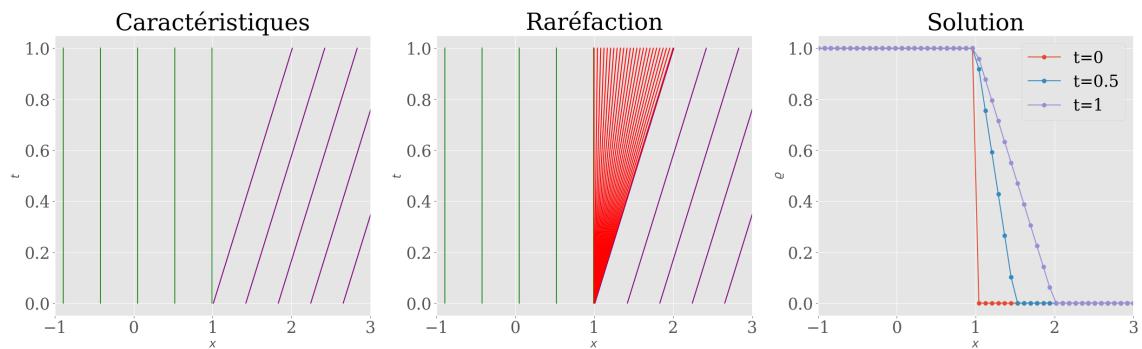
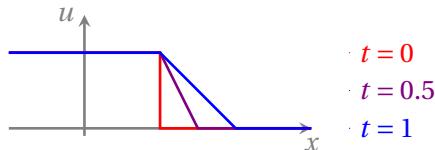


La donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est concave donc l'unique solution entropique présente une onde de raréfaction centrée en $(1, 0)$.



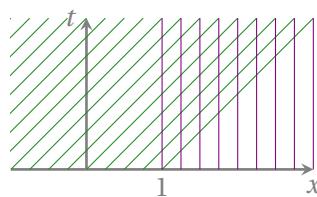
La solution est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & 1 < x \leq 1+t, \\ 0, & x > 1+t. \end{cases}$$



$$2. g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1, \\ 1 \text{ si } x > 1, \end{cases}$$

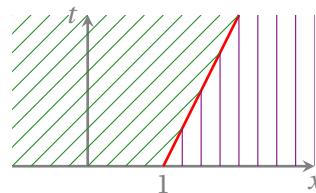
L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi + t, & \xi < 1, \\ \xi, & \xi > 1. \end{cases}$



La donnée initiale du problème de Riemann a un saut croissant et le flux est concave donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(1, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

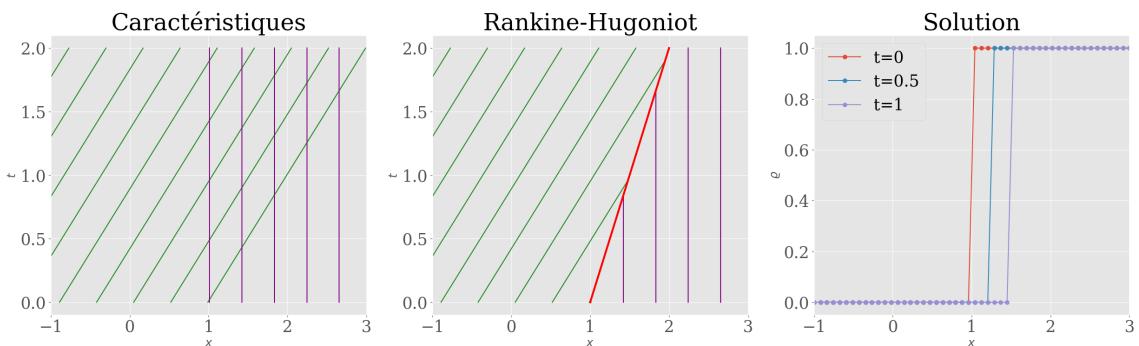
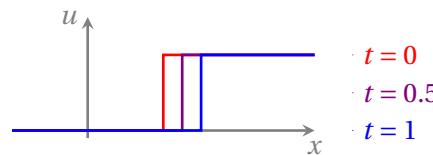
$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2}$$

avec la donnée initiale $s(0) = 1$. On trouve donc $x = s(t) = 1 + \frac{1}{2}t$.



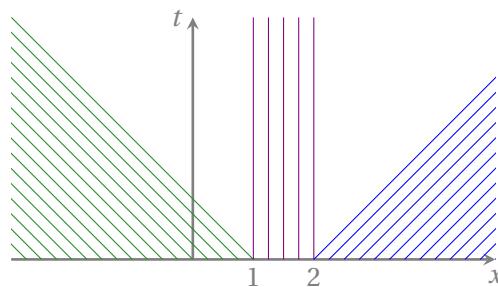
La solution est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 1 + \frac{1}{2}t, \\ 1, & x > 1 + \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

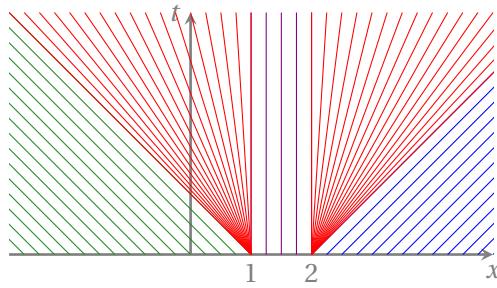


$$3. g(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x < 1, \\ 1 \text{ si } x \in]1; 2[, \\ 0 \text{ si } x > 2, \end{cases}$$

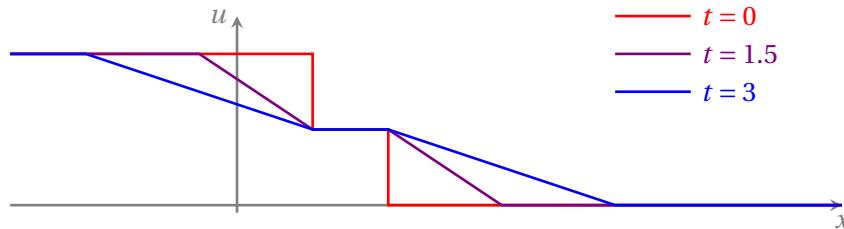
L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi - t, & \xi < 1, \\ \xi, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + t, & \xi > 2. \end{cases}$



La donnée initiale a deux sauts décroissants, un en $x = 1$ et l'autre en $x = 2$. Puisque q est concave, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en $(1, 0)$ et l'autre en $(2, 0)$.



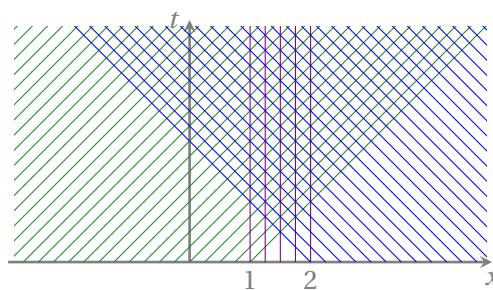
$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1 - t, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 - t < x \leq 1, \\ 1, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 1 - \frac{x-2}{t}, & \text{si } 2 < x \leq 2 + t, \\ 0, & \text{si } x > 2 + t. \end{cases}$$



$$4. \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1, \\ 1 \text{ si } x \in]1; 2[, \\ 2 \text{ si } x > 2, \end{cases}$$

Elle a deux sauts croissants, un en $x = 1$ et un en $x = 2$. Puisque q est concave, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de choc qui partent de $(1, 0)$ et de $(2, 0)$.

- En effet, l'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi + t, & \xi < 1, \\ \xi, & 1 < \xi < 2, \\ \xi - t, & \xi > 2. \end{cases}$



- Pour calculer les équations des deux ondes de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

- choc de pied $(1, 0)$

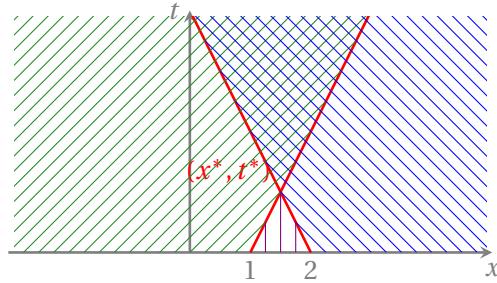
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 1$;

- choc de pied $(2, 0)$

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = -\frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = -\frac{1}{2}t + 2$.



Ces deux chocs vont ensuite interagir à partir d'un (x^*, t^*) qu'on détermine en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1, \\ x = -\frac{1}{2}t + 2. \end{cases}$$

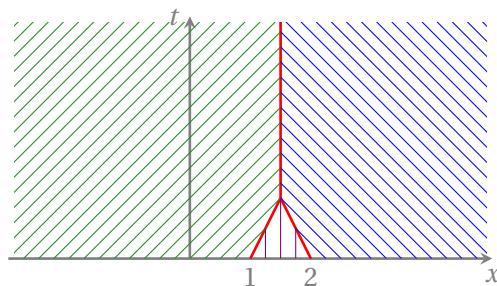
On obtient ainsi le pied de la nouvelle onde de choc qui est $(x^*, t^*) = (\frac{3}{2}, 1)$. Donc la solution pour $0 < t < 1$ est

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{1}{2}t + 1, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2}t + 1 < x < -\frac{1}{2}t + 2, \\ 2, & \text{si } x > -\frac{1}{2}t + 2, \end{cases}$$

- Pour $t \geq 1$ seul les données initiales pour $x < 1$ et $x > 2$ sont transportées et ce nouveau choc, qui part de $(\frac{3}{2}, 1)$, vérifie encore la relation de RANKINE-HUGONIOT :

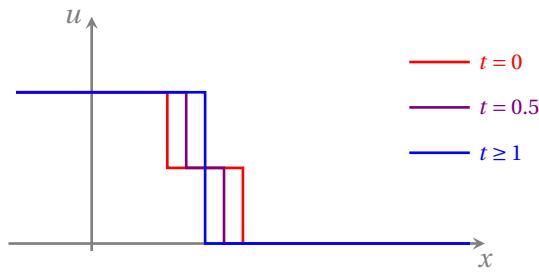
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = 0 \\ s(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{3}{2}$.



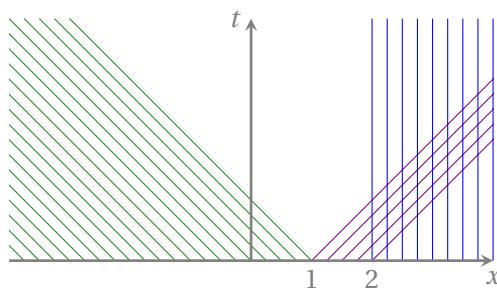
L'unique solution faible entropique pour tout $t > 0$ est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \min\{\frac{1}{2}t + 1, \frac{3}{2}\}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2}t + 1 < x < -\frac{1}{2}t + 2, \\ 2, & \text{si } x > \max\{-\frac{1}{2}t + 2, \frac{3}{2}\}, \end{cases}$$



$$5. \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi - t, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$



On s'attend donc à ce que la solution faible entropique présente une onde de raréfaction centrée en $(1, 0)$ et une onde de choc qui part de $(2, 0)$ et que, après un certain temps, les deux ondes interagissent.

- La raréfaction est comprise entre la droite d'équation $x(t) = 1 - t$ et la droite d'équation $x(t) = 1 + t$ et a l'équation

$$u(t, x) = (q')^{-1} \left(\frac{x-1}{t-0} \right) = 1 - \frac{x-1}{t}.$$

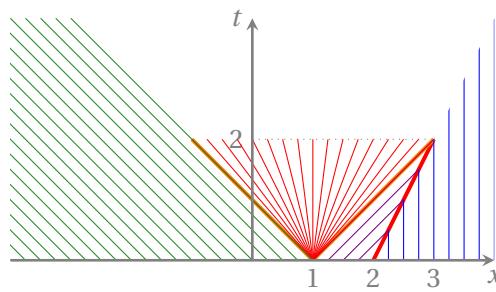
- Pour déterminer l'équation de l'onde de choc qui a pied en $(2, 0)$ on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2.$$

Ces considérations sont valables jusqu'à ce que l'onde de choc et l'onde de raréfaction se touchent, c'est-à-dire jusqu'à $t = 2$. Donc la solution pour $0 < t < 2$ est

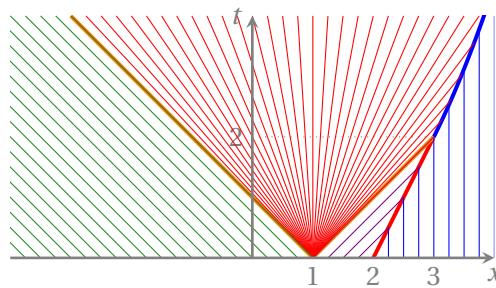
$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1 - t, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 - t < x \leq t + 1, \\ 0, & \text{si } t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 2. \end{cases}$$



- Pour $t > 2$ on continue à avoir une onde de choc mais l'état gauche n'est plus constant car il est donné par la raréfaction i.e. $u_L = 1 - \frac{s(t)-1}{t}$ donc le nouveau choc a pied en $(3, 2)$ et vérifie

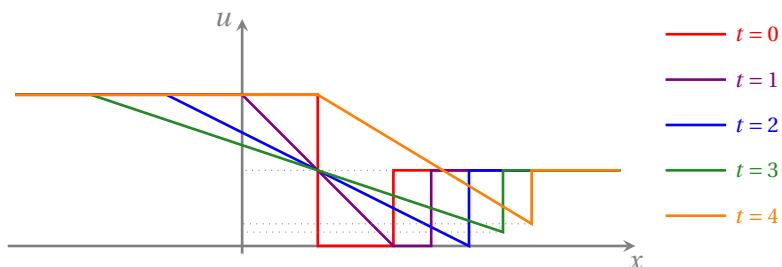
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{0 - \left(\frac{s(t)-1}{t}\right)^2}{2(0 - \frac{s(t)-1}{t})} = \frac{s(t)-1}{2t} \\ s(2) = 3 \end{cases}$$

d'où l'équation $x = 1 + \sqrt{2t}$.



L'unique solution faible entropique pour $t > 0$ est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1 - t, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 - t < x < \min\{1 + t, 1 + \sqrt{2t}\}, \\ 0, & \text{si } 1 + t \leq x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 2 \text{ et } t < 2, \\ 1, & \text{si } x > 1 + \sqrt{2t} \text{ et } t \geq 2. \end{cases}$$



Exercice 2.11 (Un modèle de trafic avec une donnée initiale affine par morceaux)

On introduit une variante du modèle décrivant le trafic dans un tunnel basé sur une densité normalisée. Soit $u(t, x) \equiv \varrho(t, x)/\varrho_m$ la densité normalisée (on a $0 \leq u \leq 1$).

- Montrer que u vérifie l'équation

$$\partial_t u + \partial_x (v_m(u - u^2)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

2. Calculer explicitement la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (v_m(u - u^2)) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{12}x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{3}{4}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Correction

1. L'équation du trafic routier est

$$0 = \partial_t \varrho + \partial_x \left(v_m \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_m} \right) \varrho \right)$$

donc on a

$$0 = \varrho_m \partial_t u + \partial_x (v_m (1 - u) \varrho_m u) = \varrho_m [\partial_t u + \partial_x (v_m (u - u^2))].$$

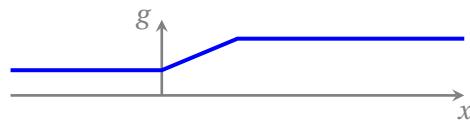
On obtient donc l'EDP

$$\partial_t u + \partial_x (v_m (u - u^2)) = 0.$$

Si u est régulière on a la forme quasi-linéaire

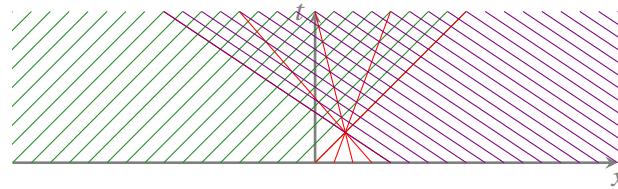
$$\partial_t u + v_m (1 - 2u) \partial_x u = 0.$$

2. Le graphe de la donnée initiale est le suivant :



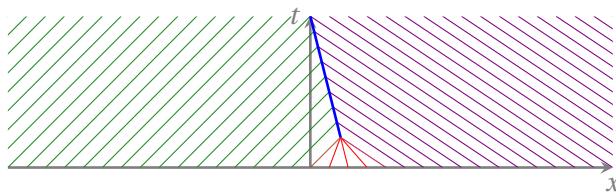
On a $q(u) = v_m(u - u^2)$ donc $q'(u) = v_m(1 - 2u)$. La caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a pour équation

$$x = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + v_m(1 - 2g(\xi))t = \begin{cases} \xi + \frac{1}{3}v_m t, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\xi\right)v_m t, & \text{si } 0 < \xi < 1, \\ \xi - \frac{1}{2}v_m t, & \text{si } \xi > 1. \end{cases}$$



On voit que les caractéristiques s'intersectent. Le point de départ de cette intersection est le point avec la plus petite coordonnée temporelle pour laquelle deux caractéristiques s'intersectent pour $0 < \xi < 1$. Ce point a coordonnées

$$(\bar{x}, \bar{t}) = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5v_m} \right).$$



Pour calculer l'équation de l'onde de choc on utilise la condition de Rankine-Hugoniot. Soit $x = s(t)$ l'équation de l'onde de choc qui sort du point (\bar{x}, \bar{t}) . À droite de ce point on a $u_R = 3/4$, à gauche $u_L = 1/3$, donc

$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = -\frac{1}{12} v_m.$$

On a donc l'EDO

$$\begin{cases} s'(t) = -\frac{1}{12} v_m, \\ s(\frac{6}{5v_m}) = \frac{2}{5}, \end{cases}$$

d'où l'équation

$$s(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} v_m t.$$

Pour résumer :

- pour $x < \min\left\{\frac{1}{3} v_m t, \frac{1}{2} - \frac{1}{12} v_m t\right\}$ on transporte la donnée $u(t, x) = \frac{1}{3}$;
- pour $x > \max\left\{1 - \frac{1}{2} v_m t, \frac{1}{2} - \frac{1}{12} v_m t\right\}$ on transporte la donnée $u(t, x) = \frac{3}{4}$;
- pour $0 \leq t \leq \frac{6}{5v_m}$ et $\frac{1}{3} v_m t < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{12} v_m t$ on transporte la donnée

$$\begin{aligned} u &= g(x - q'(u)t) = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5(x - q'(u)t)}{12} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5(x - (v_m(1 - 2u))t)}{12} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5x - 5v_m t + 10v_m u}{12} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } u = \frac{5x - 5v_m t + 4}{(12 - 10v_m)}.$$

On a donc tous les ingrédients pour écrire la solution :

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x < \min\left\{\frac{1}{3} v_m t, \frac{1}{2} - \frac{1}{12} v_m t\right\}, \\ \frac{4+5x-5v_m t}{2(6-5v_m t)}, & \text{si } \frac{1}{3} v_m t < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{12} v_m t, \\ \frac{3}{4}, & \text{si } x > \max\left\{1 - \frac{1}{2} v_m t, \frac{1}{2} - \frac{1}{12} v_m t\right\}. \end{cases}$$

Exercice 2.12 (Trafic dans un tunnel)

Soit $\rho \equiv \rho(t, x)$ la densité des voitures et $q \equiv q(\rho)$ le flux des voitures. Un modèle qui décrit la vitesse des voitures dans un tunnel est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (q(\rho)) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $q(\rho) = \rho v(\rho)$ et $v \equiv v(\rho)$ la vitesse des voitures ainsi définie :

$$v(\rho) = \begin{cases} v_m, & \text{si } 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \ln\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right), & \text{si } \rho_c \leq \rho \leq \rho_m, \end{cases}$$

et $\lambda \equiv (v_m)/(\ln(\rho_m/\rho_c))$. Les constantes v_m et ρ_m représentent respectivement la vitesse maximale, la densité maximale et ρ_c la densité critique en dessous de laquelle les voitures peuvent voyager à la vitesse maximale. (Valeurs vraisemblables sont $v_m = 90 \text{ km h}^{-1}$, $\rho_m = 110 \text{ voitures/km}$ et $\rho_c = 7 \text{ voitures/km}$ qui donnent $\lambda \approx 32,727272$.)

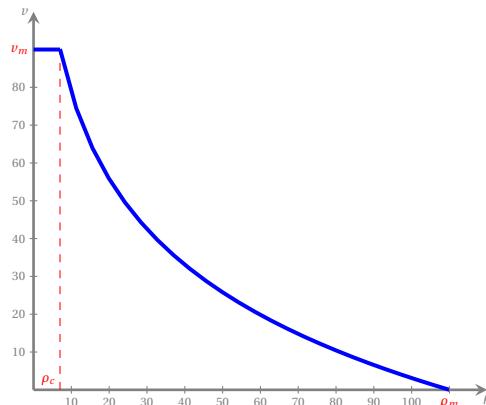
Supposons que l'entrée du tunnel est en $x = 0$ et qu'on ouvre le tunnel à l'instant $t = 0$; supposons de plus que précédemment les voitures s'étaient accumulées en un bouchon. La donnée initiale est donc

$$g(x) = \begin{cases} \rho_m, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Calculer la densité et la vitesse du trafic et les dessiner dans les plans (x, ρ) et (x, v) pour $t = 0$ et pour $\bar{t} > 0$.
2. Déterminer et dessiner dans le plan (t, x) la trajectoire d'une voiture qu'à l'instant initiale se trouve en $x = \bar{x} < 0$ et calculer à quel instant elle rentre dans le tunnel.

Correction

1. Le graphe de la vitesse en fonction de la densité est le suivant (remarquons que v est continue) :



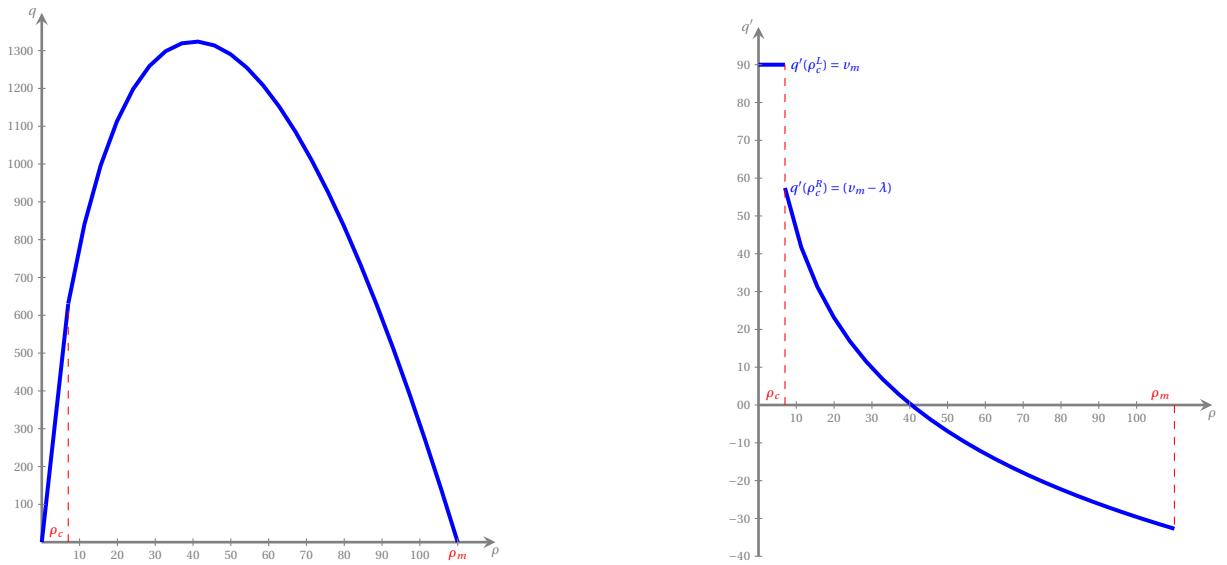
Le flux q s'écrit

$$q(\rho) = \begin{cases} v_m \rho, & \text{si } 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \rho \ln\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right), & \text{si } \rho_c \leq \rho \leq \rho_m, \end{cases}$$

donc

$$q'(\rho) = \begin{cases} v_m, & \text{si } 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \left[\ln\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right) - 1 \right], & \text{si } \rho_c \leq \rho \leq \rho_m. \end{cases}$$

Les graphes de q et q' en fonction de la densité sont les suivants (remarquons le saut de q' en ρ_c) :

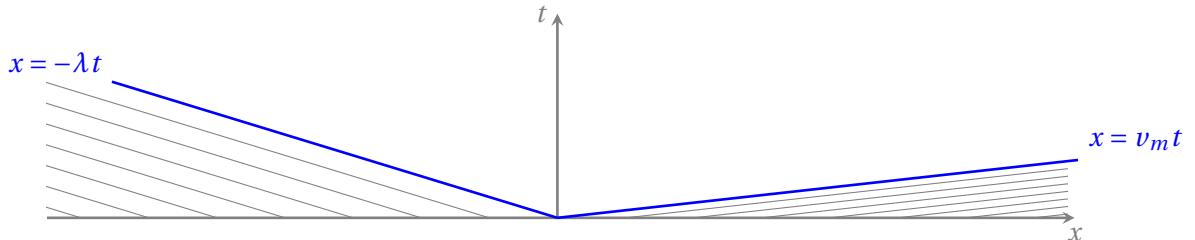


Le saut de q' en ρ_c est

$$[q'(\rho_c)] = q'(\rho_c^R) - q'(\rho_c^L) = (v_m - \lambda) - v_m = -\lambda.$$

La caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a équation

$$x = \xi + q'(g(\xi))t = \begin{cases} \xi - \lambda t, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi + v_m t, & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$



On peut donc écrire la solution au moins pour certaines parties du plan :

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_m, & \text{si } x < -\lambda t, \\ ?, & \text{si } -\lambda t < x < v_m t, \\ 0, & \text{si } x > v_m t. \end{cases}$$

Sachant que q' est discontinue en $\rho = \rho_c$, on va donc étudier ρ séparément sur

$$S_1 \equiv \{(t, x) : -\lambda t < x < v_m t, \rho_c < \rho(t, x) < \rho_m\} = \{(t, x) : -\lambda t < x < (v_m - \lambda)t\}$$

et

$$S_2 \equiv \{(t, x) : -\lambda t < x < v_m t, 0 < \rho(t, x) < \rho_c\} = \{(t, x) : (v_m - \lambda)t < x < v_m t\}.$$

- Étude dans S_1 : pour $\rho_c < \rho(t, x) < \rho_m$ on a $q''(\rho) = -\lambda/\rho < 0$. Puisque ρ est décroissante on cherche une solution sous forme d'onde de rarefaction, centrée en $(0, 0)$, qui se colle avec continuité avec la droite $x = -\lambda t$ (de cette manière elle vérifie aussi la condition d'entropie). Cette onde a équation

$$\rho(t, x) = (q')^{-1}(x/t) = \rho_m \exp\left(-1 - \frac{x}{\lambda t}\right).$$

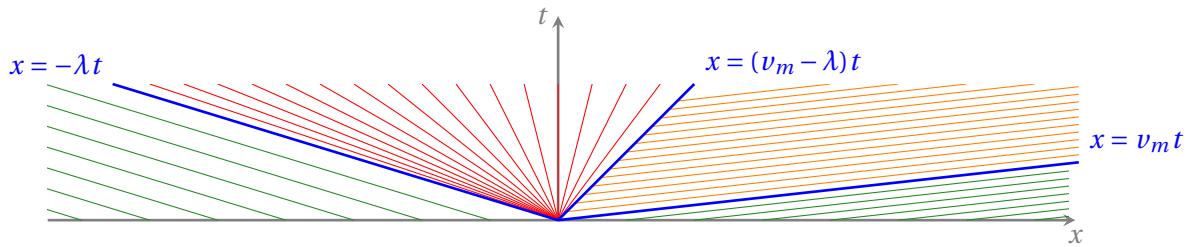
- Étude dans S_2 : pour $\rho(t, x) < \rho_c$ on a $q'(\rho) = v_m$. Par conséquent ρ est constante le long des lignes

caractéristiques du type

$$x = v_m t + k.$$

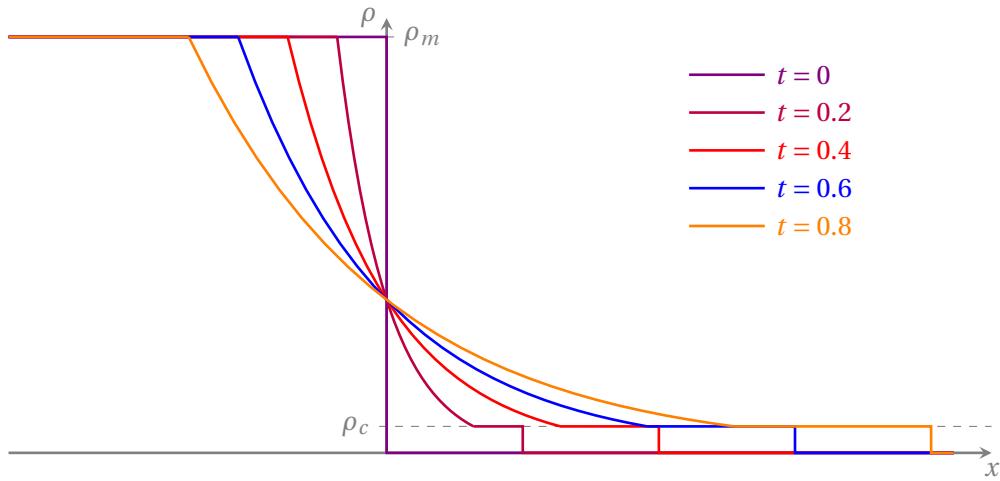
Ces caractéristiques sortent de la droite $x = (v_m - \lambda)t$ et sur cette droite, qui appartient à la région S_1 , la densité vaut

$$\rho(t, x) = \rho((v_m - \lambda)t, t) = \rho_m \exp\left(-1 - \frac{(v_m - \lambda)t}{\lambda t}\right) = \rho_m \exp\left(-\frac{v_m}{\lambda}\right) = \rho_c.$$



En résumé, on a

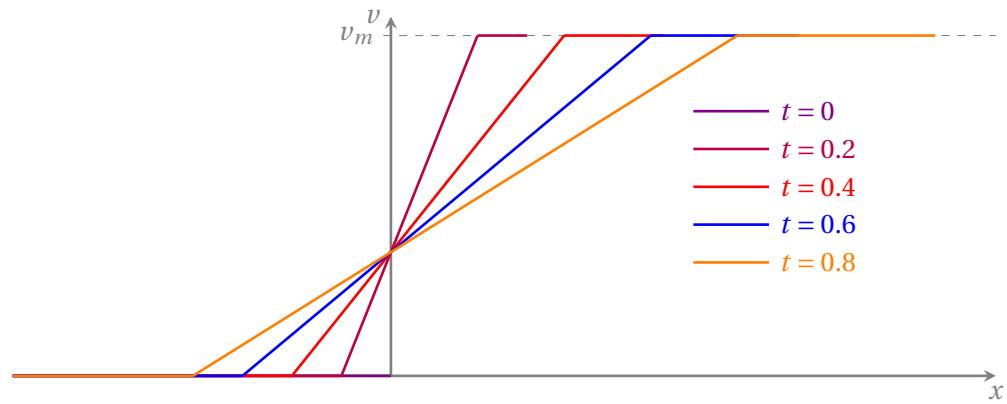
$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_m, & \text{si } x < -\lambda t, \\ \rho_m \exp\left(-1 - \frac{x}{\lambda t}\right), & \text{si } -\lambda t < x < (v_m - \lambda)t, \\ \rho_c, & \text{si } (v_m - \lambda)t < x < v_m t, \\ 0, & \text{si } x > v_m t. \end{cases}$$



Pour un temps fixé, on voit que la densité décroît de la densité maximale (vitesse nulle) graduellement jusqu'à la densité critique qui permet la vitesse maximale. On remarque la discontinuité de la densité pour $x = v_m t$.

2. Considérons une voiture qu'à l'instant $t = 0$ se trouve en $x = \bar{x} < 0$. La voiture restera immobile jusqu'à l'instant $t_0 = |\bar{x}|/\lambda$. À cet instant elle rentre dans la région S_1 où la vitesse est donnée par

$$v(\rho(t, x)) = \lambda + \frac{x}{t}.$$



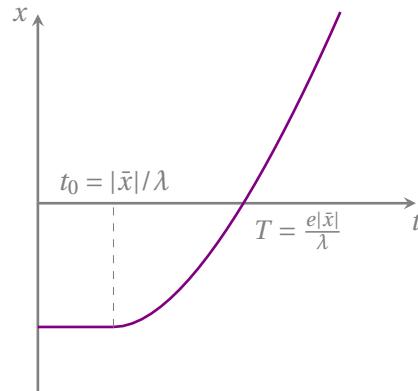
Si on indique par $x = x(t)$ la trajectoire de la voiture, on a

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda + \frac{x(t)}{t}, \\ x(t_0) = \bar{x}. \end{cases}$$

On obtient

$$x(t) = \lambda t \left(\ln \left(\frac{\lambda t}{|\bar{x}|} \right) - 1 \right).$$

La voiture entre donc dans le tunnel à l'instant T pour lequel $x(T) = 0$, c'est-à-dire $T = \frac{e|\bar{x}|}{\lambda}$.



Exercice 2.13 (Modèle LWR avec deux feux tricolore)

Soit $u \equiv u(t, x)$ la densité des voitures et $q \equiv q(u)$ le flux des voitures après normalisation. Le modèle LWR devient

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (q(u)) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $q(u) = u(1 - u)$.

Supposons qu'en $x = -\beta$ et en $x = \alpha$ sont placés deux feux tricolore, avec α et β deux constantes satisfaisant $\alpha + \beta = 1$ et $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

On suppose que les deux feux tricolore sont rouges et passent au vert à $t = 0$. On considère la donnée initiale suivante

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta, \\ 0, & \text{si } -\beta \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \alpha, \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte pour $\alpha = \frac{1}{2}$.
2. Calculer la solution exacte pour $\alpha = \frac{1}{4}$.
3. Considérons une voiture qui se trouve en $x = \alpha \in]0, \alpha[$ à l'instant $t = 0$. Quelle sera sa trajectoire ?
Après combien de temps elle franchira le feu situé en $x = \alpha$?

Correction

On a

$$q(u) = u(1-u) \quad q'(u) = 1 - 2u \quad (q')^{-1}(\theta) = \frac{1-\theta}{2} \quad \theta = \frac{x-x_0}{t-t_0}.$$

Courbes caractéristiques :

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + q'(g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))t = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + (1 - 2g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))t$$



Cas $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. La donnée initiale est

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En traçant les courbes caractéristiques

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + (1 - 2g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))t = \begin{cases} \xi_{\hat{t}, \hat{x}} - t, & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < -\frac{1}{2}, \\ \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + t, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ \xi_{\hat{t}, \hat{x}} - t, & \text{si } 0 \leq \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < \frac{1}{2}, \\ \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + t, & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

on remarque que pour $t = \hat{t}$ proche de 0 on a 4 états constants séparés par une onde de raréfaction, une onde de choc et encore une onde de raréfaction :

- la première onde de raréfaction est centrée en $x = -\beta$ et est comprise entre la droite d'équation $x = -\beta - t$ et la droite d'équation $x = -\beta + t$; dans la raréfaction la solution vaut $(q')^{-1}\left(\frac{x-(-\beta)}{t}\right) = \frac{1-\frac{x-(-\beta)}{t}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}$;
- la deuxième onde de raréfaction est centrée en $x = \alpha$ et est comprise entre la droite d'équation $x = \alpha - t$ et la droite d'équation $x = \alpha + t$; dans la raréfaction la solution vaut $(q')^{-1}\left(\frac{x-\alpha}{t}\right) = \frac{1-\frac{x-\alpha}{t}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}$;
- le choc a vitesse $s'(t) = (q(1) - q(0)) / (1 - 0) = 0$ et est centré en $x = 0$ il a donc pour équation la droite verticale $x = 0$.

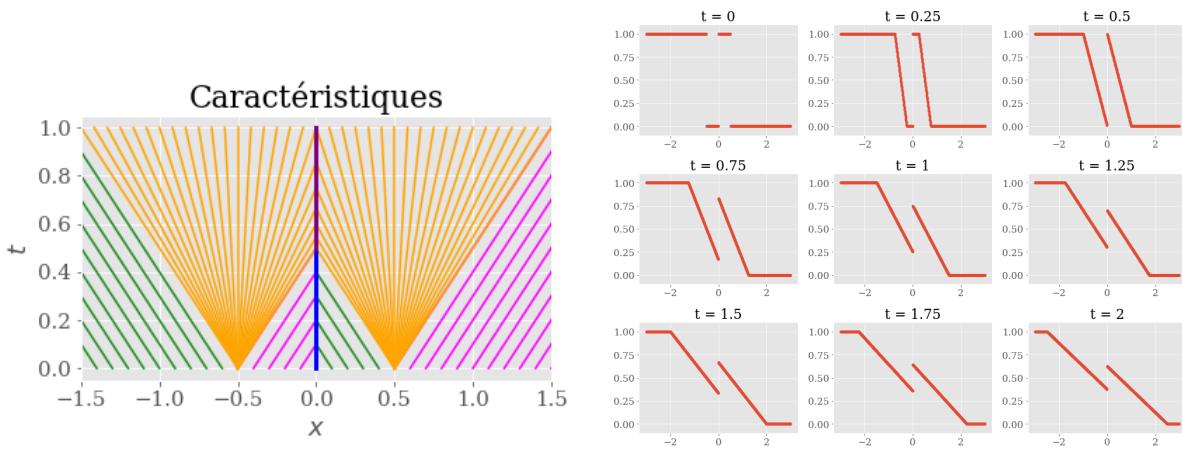
À partir de $t = \alpha$ les deux raréfactions ainsi que le choc entrent en collision; plus précisément la droite $x = -\beta + t = -\alpha + t$, la droite $x = 0$ et la droite $x = \alpha - t$ s'intersectent au point $(t, x) = (\alpha, 0)$. Il y a un nouveau choc qui satisfait le problème de Cauchy

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q\left(\frac{1}{2} - \frac{s(t)+\beta}{2t}\right) - q\left(\frac{1}{2} - \frac{s(t)-\alpha}{2t}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{s(t)+\beta}{2t} - \frac{1}{2} - \frac{s(t)-\alpha}{2t}}, & \rightsquigarrow s(t) = 0. \\ s(\alpha) = 0 \end{cases}$$

On a donc la solution

$$\text{Si } t < \alpha, \quad u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < -\beta + t \\ 0, & \text{si } -\beta + t \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \alpha - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } \alpha - t \leq x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t. \end{cases}$$

$$\text{sinon} \quad u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } 0 < x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t. \end{cases}$$



Cas $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}$. La donnée initiale est

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\frac{3}{4}, \\ 0, & \text{si } -\frac{3}{4} \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{si } x \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

En traçant les courbes caractéristiques

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + (1 - 2g(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}))t = \begin{cases} \xi_{\hat{t}, \hat{x}} - t, & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < -\frac{3}{4}, \\ \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + t, & \text{si } -\frac{3}{4} \leq \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0, \\ \xi_{\hat{t}, \hat{x}} - t, & \text{si } 0 \leq \xi_{\hat{t}, \hat{x}} < \frac{1}{4}, \\ \xi_{\hat{t}, \hat{x}} + t, & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

on remarque que pour $t = \hat{t}$ proche de 0 on a 4 toujours états constants séparés par une onde de raréfaction, une onde de choc et encore une onde de raréfaction :

- la première onde de raréfaction est centrée en $x = -\beta$ et est comprise entre la droite d'équation $x = -\frac{3}{4} - t$ et la droite d'équation $x = -\frac{3}{4} + t$; dans la raréfaction la solution vaut $(q')^{-1}\left(\frac{x-(-\beta)}{t}\right) = \frac{1-\frac{x-(-\beta)}{t}}{2}$;

- la deuxième onde de raréfaction est centrée en $x = \alpha$ et est comprise entre la droite d'équation $x = \frac{1}{4} - t$ et la droite d'équation $x = \frac{1}{4} + t$; dans la raréfaction la solution vaut $(q')^{-1}\left(\frac{x-\alpha}{t}\right) = \frac{1-\frac{x-\alpha}{t}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}$;
- le choc a vitesse $s'(t) = (q(1) - q(0)) / (1 - 0) = 0$ et est centré en $x = 0$ il a donc pour équation la droite verticale $x = 0$.

À partir de $t = \alpha$ la raréfaction centrée en α entre en collision avec le choc; plus précisément la droite d'équation $x = \alpha - t$ et la droite $x = 0$ se croisent au point $(t, x) = (\alpha, 0)$. On a donc la solution

$$\text{Si } t \leq \alpha, \quad u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < -\beta + t \\ 0, & \text{si } -\beta + t \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \alpha - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } \alpha - t \leq x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t. \end{cases}$$

Pour $t > \alpha$, il y a un nouveau choc qui satisfait le problème de Cauchy

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q\left(\frac{1}{2} - \frac{s(t)-\alpha}{2t}\right) - q(0)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{s(t)-\alpha}{2t}\right) - 0}, \\ s(\alpha) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} s'(t) = \frac{s(t)+t-\alpha}{2t}, \\ s(\alpha) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow s(t) = \alpha + t - 2\sqrt{\alpha t}.$$

Ceci tant que la première raréfaction ne rencontre pas ce choc. La raréfaction centrée en $-\beta$ entre en collision avec le choc $s(t) = \alpha + t - 2\sqrt{\alpha t}$ au point $(t, x) = \left(\frac{1}{4\alpha}, \alpha - 1 + \frac{1}{4\alpha}\right)$. On a donc la solution

$$\text{Si } t \leq \alpha, \quad u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < -\beta + t \\ 0, & \text{si } -\beta + t \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \alpha - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } \alpha - t \leq x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t. \end{cases}$$

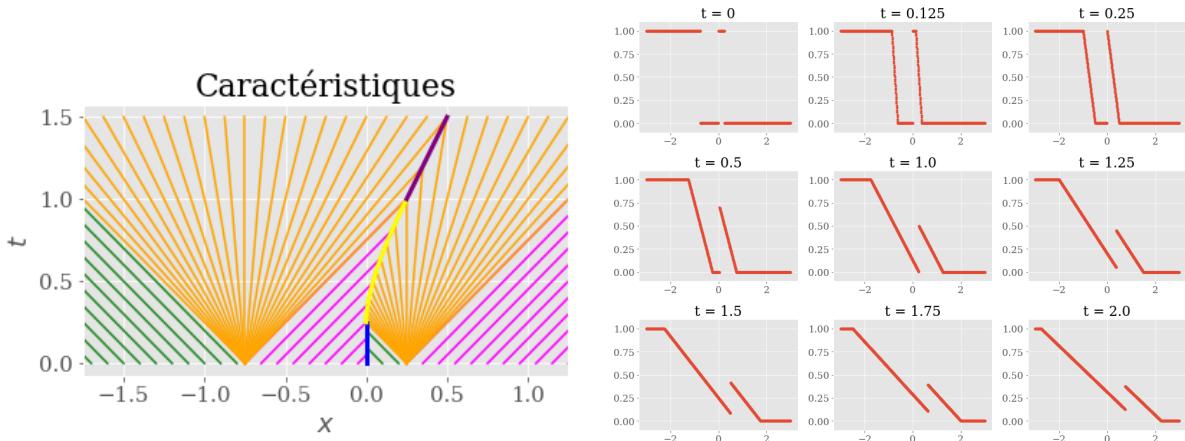
$$\text{si } \alpha < t < \frac{1}{4\alpha}, \quad u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < -\beta + t \\ 0, & \text{si } -\beta + t \leq x < \alpha + t - 2\sqrt{\alpha t}, \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } \alpha + t - 2\sqrt{\alpha t} \leq x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t. \end{cases}$$

À partir de $t = \frac{1}{4\alpha}$ il y a un nouveau choc qui satisfait le problème de Cauchy

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q\left(\frac{1}{2} - \frac{s(t)-\alpha}{2t}\right) - q\left(\frac{1}{2} - \frac{s(t)+\beta}{2t}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{s(t)-\alpha}{2t} - \frac{1}{2} - \frac{s(t)+\beta}{2t}}, \\ s\left(\frac{1}{4\alpha}\right) = \alpha - 1 + \frac{1}{4\alpha} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} s'(t) = \frac{\frac{1}{2} - \alpha + s(t)}{t}, \\ s\left(\frac{1}{4\alpha}\right) = \alpha - 1 + \frac{1}{4\alpha} \end{cases} \rightsquigarrow s(t) = \alpha - \frac{1}{2} + (1 - 2\alpha)t = \left(t - \frac{1}{2}\right)(1 - 2\alpha).$$

En conclusion la solution est

$$\begin{aligned}
 \text{Si } t \leq \alpha, \quad u(t, x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < -\beta + t \\ 0, & \text{si } -\beta + t \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \alpha - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } \alpha - t \leq x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t; \end{cases} \\
 \text{si } \alpha < t \leq \frac{1}{4\alpha}, \quad u(t, x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < -\beta + t \\ 0, & \text{si } -\beta + t \leq x < \alpha + t - 2\sqrt{\alpha t}, \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } \alpha + t - 2\sqrt{\alpha t} \leq x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t; \end{cases} \\
 \text{sinon} \quad u(t, x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x < -\beta - t, \\ \frac{1}{2} - \frac{x+\beta}{2t}, & \text{si } -\beta - t \leq x < \left(t - \frac{1}{2}\right)(1 - 2\alpha), \\ \frac{1}{2} - \frac{x-\alpha}{2t}, & \text{si } \left(t - \frac{1}{2}\right)(1 - 2\alpha) \leq x < \alpha + t \\ 0, & \text{si } x \geq \alpha + t. \end{cases}
 \end{aligned}$$



Trajectoire d'une voiture. Considérons maintenant une voiture qui se trouve en $x = \zeta \in]0, \alpha[$ à l'instant $t = 0$.

Ce véhicule, se trouvant dans la région à densité maximale, ne se déplacera pas jusqu'au moment $t_1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha - \zeta$ où le signal du feu vert (placé en $x = \alpha$) lui parvient.

À partir de ce moment, le véhicule entre dans la région de raréfaction et se déplace à la vitesse

$$v(u(t, x)) = 1 - u(t, x) = \frac{1}{2} + \frac{x - \alpha}{2t} \quad t \geq t_1.$$

Ainsi, en dénotant par $x = x_\zeta(t)$ la position du véhicule, nous devons résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'_\zeta(t) = \frac{1}{2} + \frac{x_\zeta(t) - \alpha}{2t}, \\ x_\zeta(t_1) = \zeta \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad x_\zeta(t) = \alpha + t - 2\sqrt{(\alpha - \zeta)t}.$$

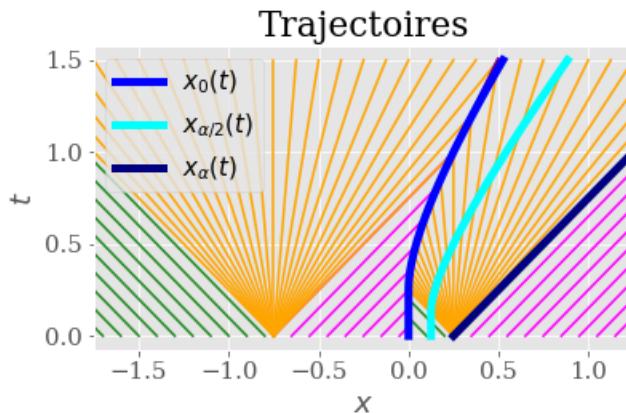
Puisque $\alpha + t - 2\sqrt{(\alpha - \zeta)t} < \alpha + t$, la trajectoire ne croisera jamais la caractéristique $x = \alpha + t$ et ne quittera donc jamais la région de raréfaction. Ainsi la trajectoire d'un véhicule initialement situé en $x = \zeta \in]0, \alpha[$ est

$$x_\zeta(t) = \begin{cases} \zeta, & \text{si } t < \alpha - \zeta \\ \alpha + t - 2\sqrt{(\alpha - \zeta)t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons maintenant que le feu passe au rouge à l'instant t_r . Notre conducteur pourra-t-il franchir le feu avant? Il suffit de calculer le temps qu'il lui faut pour atteindre $x = \alpha$. Puisque $x_\zeta(t) = 0$ à l'instant $t_2 = 4(\alpha - \zeta)$, le conducteur pourra franchir le feu avant qu'il passe à nouveau au rouge ssi $t_r > t_2$, i.e. ssi $t_r > 4(\alpha - \zeta)$.

Notons que la trajectoire d'une voiture se trouvant en $x = 0$ à l'instant initial coïncide avec le choc car $x_{\zeta=0}(t) \equiv s(t)$.

Notons que la trajectoire d'une voiture se trouvant en $x = \alpha$ à l'instant initial est $x_{\zeta=\alpha}(t) = \alpha + t$ pour tout t (ce qui est évident car pour $x > \alpha$ la densité est nulle et donc la vitesse est maximale égale à 1).



Exercice 2.14 (Fluide dans un tube poreux)

Considérons un tube cylindrique, infiniment long, placé le long de l'axe x , contenant un fluide se déplaçant vers la droite. On note $\rho = \rho(t, x)$ la densité du fluide, et supposons que la vitesse en chaque point dépend de la densité selon $v = \rho/2$. Supposons en outre que la paroi du tube soit constituée d'un matériau poreux qui fuit au taux $H = k\rho^2$ (masse par unité de longueur, par unité de temps). Il s'agit d'un modèle de transport. Le taux de fuite H conduit à la loi de conservation

$$\partial_t \rho + \partial_x q(\rho) = H(\rho).$$

En raison de la nature convective du mouvement, le flux est décrit par

$$q(\rho) = \rho v(\rho) = \frac{\rho^2}{2}$$

ce qui donne l'équation

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(\frac{\rho^2}{2} \right) = -k\rho^2.$$

Calculer la solution avec la donnée initiale $\rho(0, x) = 1$

Correction

L'équation de la caractéristique passant par le point (\hat{t}, \hat{x}) satisfait le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'(\varrho(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))) \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases}$$

Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la restriction de la fonction ϱ à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$r_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} r'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \partial_t \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= \partial_t \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + q'(\varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))) \partial_x \varrho(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = -k r_{\hat{t}, \hat{x}}^2(t), \end{aligned}$$

avec $r_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = 1$, autrement dit

$$\begin{cases} r'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = -k r_{\hat{t}, \hat{x}}^2(t), \\ r_{\hat{t}, \hat{x}}^2(0) = 1 \end{cases} \rightsquigarrow r_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \frac{1}{1 + kt}.$$

En (\hat{t}, \hat{x}) on a

$$\varrho(\hat{t}, \hat{x}) = r_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \frac{1}{1 + k\hat{t}} \quad \forall (\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

On peut enfin écrire explicitement l'équation de la caractéristique passant par le point (\hat{t}, \hat{x}) :

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = q'(r_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = r_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \frac{1}{1 + kt} \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x} \end{cases} \rightsquigarrow \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kt) + \left(\hat{x} - \frac{1}{k} \ln(1 + k\hat{t}) \right).$$

3.

Équations non-linéaires : méthodes numériques (volumes finis)

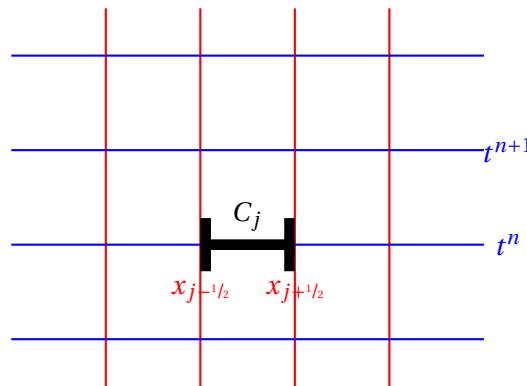
Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = u_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La première étape de toute approximation numérique consiste à discréteriser le domaine de calcul à la fois dans l'espace et dans le temps. Pour simplifier, nous considérons une discréétisation uniforme du domaine spatial \mathbb{R} avec un pas d'espace $\Delta x > 0$ et une discréétisation uniforme du domaine temporel \mathbb{R}^+ avec un pas de temps $\Delta t > 0$.

DF = valeur ponctuelle \rightsquigarrow VF = valeur moyenne. La méthode des différences finies est basée sur l'approximation des valeurs ponctuelles de la solution d'une EDP, autrement dit u_j^n est une approximation de la valeur ponctuelle $u(t^n, x_j)$. On verra que cette approche n'est pas adaptée aux lois de conservation car les solutions ne sont pas continues et les valeurs ponctuelles peuvent ne pas avoir de sens. Nous devons alors changer d'approche.

Notons C_j la maille (= cellule = volume de contrôle) j dont son point milieu est $x_j = j\Delta x$, autrement dit C_j est l'intervalle $[x_{j-1/2}; x_{j+1/2}]$.



Soit maintenant $u_j(t^n)$ une approximation de la valeur moyenne de $u(t^n, x)$ sur la maille $[x_{j-1/2}; x_{j+1/2}]$ à l'instant t^n :

$$u_j(t^n) \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t^n, x) dx \quad (\text{constante}).$$

La solution approchée sera donc une solution constante par morceaux.

Dérivée en temps. À partir d'une donnée initiale, nous définissons $u_j(t^0)$ et utilisons maintenant une procédure d'évolution temporelle pour construire l'approximation $u_j(t^1)$ à partir de $u_j(t^0)$, puis $u_j(t^2)$ et ainsi de suite. En général, nous construisons $u_j(t^{n+1})$ à partir de $u_j(t^n)$ dans une méthode à deux niveaux, mais on peut généraliser à plusieurs niveaux. Pour simplifier, on peut approcher la dérivée temporelle par une différence finie :

$$u'_j(t) \approx \frac{u_j(t^{n+1}) - u_j(t^n)}{\Delta t}.$$

Dérivée en espace. L'interprétation de valeur moyenne sur une cellule est naturelle puisque la forme intégrale de la loi de conservation décrit précisément l'évolution temporelle des intégrales telles que celles apparaissant dans cette définition : $u_j(t)$ évolue alors selon

$$u'_j(t) = -\frac{1}{\Delta x} [q(u(t, x_{j+\frac{1}{2}})) - q(u(t, x_{j-\frac{1}{2}}))]$$

ce qui suggère un schéma de la forme

$$\frac{u_j(t^{n+1}) - u_j(t^n)}{\Delta t} + \frac{q(u(t, x_{j+\frac{1}{2}})) - q(u(t, x_{j-\frac{1}{2}}))}{\Delta x} = 0.$$

Cependant, nous pouvons réécrire l'EDP sous une forme non-conservative quasi-linéaire comme suit :

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \partial_t u + c(u) \partial_x u = 0$$

avec $c(u) = q'(u)$. On obtient une sorte d'équation de transport avec une vitesse non constante et qui dépend de la solution elle-même. On pourrait donc essayer d'étendre les schémas vus pour l'équation de transport.

Ci-dessous nous allons voir des exemples de schémas construits à partir de cette forme non conservative et des problèmes que cette écriture engendre lorsque la solution est discontinue.

3.1. Un schéma basé sur la formulation quasi-linéaire (non-conservative)

Dans la suite on notera

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad u_j^n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t^n, x) dx.$$

On peut généraliser le principe du schéma upwind en prenant comme critère le signe de $c_j^n \approx c(u)$. Par analogie au cas du transport on peut écrire le schéma upwind sous la forme

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)c_j^n & \text{si } c_j^n > 0, \\ u_j^n - \alpha(u_{j+1}^n - u_j^n)c_j^n & \text{si } c_j^n < 0, \end{cases}$$

avec $c_j^n \approx q'(u(t^n, x_j))$. Plusieurs choix sont possibles pour c_j^n , par exemple :

$$\begin{aligned} c_j^n &= q'(u_{j-1}^n), & c_j^n &= q'\left(\frac{u_{j-1}^n + u_j^n}{2}\right), & c_j^n &= \frac{q'(u_{j-1}^n) + q'(u_j^n)}{2}, \\ c_j^n &= q'(u_j^n), & c_j^n &= q'\left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right), & c_j^n &= \frac{q'(u_{j+1}^n) + q'(u_j^n)}{2}, & c_j^n &= q'(u_{j+1}^n). \end{aligned}$$

Avant de vérifier le comportement de tous ces schémas dans un cas simple, introduisons la notion de conservativité d'un schéma :

3.1 Définition

On dit qu'un schéma est **conservatif** si ¹

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^{n+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n.$$

L'exercice suivant montre que la conservativité du schéma numérique est une condition nécessaire pour la capture des solutions discontinues entropiques.

Exercice 3.1 (Un exemple de schéma non conservatif)

On considère l'équation de Burger, *i.e.* l'EDP avec $q(u) = u^2/2$, avec des conditions aux bords de type Neumann. On lui associe les deux problèmes de Riemann

$$\text{Cas 1 : } u_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases} \quad \text{Cas 2 : } u_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous la condition de stabilité

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\sup_j |c_j^n|},$$

représenter les résultats numériques obtenus avec les différents choix de c_j^n et les comparer à la solution exacte. Commenter les résultats.

Correction

Pour satisfaire la condition de stabilité on prendra $dt = 0.999 \Delta x / \max(\text{abs}(c_j^n))$ (mis à jour à chaque pas de temps).

- La solution exacte du premier problème de Riemann présente une détente :

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x \leq t, \\ 1, & x > t. \end{cases}$$

Une solution faible (non entropique) de ce problème de Riemann est

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}t, \\ 0, & x > \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

Les solutions approchées sont très différentes.

- Le choix $c_j^n = q' \left(\frac{u_{j-1}^n + u_j^n}{2} \right)$ et le choix $c_j^n = \frac{q'(u_{j-1}^n) + q'(u_j^n)}{2}$ capturent la détente,
 - les autres choix de c_j^n génèrent des chocs qui avancent à des vitesses différentes de $\frac{1}{2}$, autrement-dit on n'a même pas une solution faible (car la condition de Rankine-Hugoniot n'est pas satisfaite).
- La solution exacte du deuxième problème de Riemann présente un choc de vitesse $\frac{1}{2}$:

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}t, \\ 0, & x > \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

- En effet

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (\Delta x u_j^n) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t^n, x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(t^n, x) dx$$

Les solutions approchées sont à nouveau très différentes.

- Le choix $c_j^n = q'(u_{j-1}^n)$ génère un choc qui avance avec une vitesse supérieure à $\frac{1}{2}$,
- le choix $c_j^n = q'\left(\frac{u_{j-1}^n + u_j^n}{2}\right)$ et le choix $c_j^n = \frac{q'(u_{j-1}^n) + q'(u_j^n)}{2}$ génèrent un choc qui avance à la bonne vitesse $\frac{1}{2}$ (en réalité les deux formulent donnent la même expression),
- les autres choix de c_j^n génèrent un choc stationnaire.

Autrement dit, seul un choix approche une solution faible (*i.e.* qui vérifie RH).

En résumé, même si la condition de stabilité est satisfaite, seul un choix de c_j^n capture la bonne solution et ce pour les deux données initiales. Nous remarquons que, pour cette particulière EDP, $q'(u) = u$ ainsi ce choix permet de réécrire le schéma sous la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2}.$$

Seul ce choix particulier donne un schéma conservatif. Pour cet exemple donc la conservativité est nécessaire pour le calcul de solutions discontinues.

3.2. Schéma de type “Volumes finis” (basé sur la formulation conservative)

Pour construire un schéma conservatif nous allons introduire la notion de “volumes finis”.

L'idée de base des schémas Volumes-Finis est de diviser le domaine spatial en cellules (ou encore “volumes de contrôles”) et de former les équations discrètes à partir de la forme intégrale des équations, écrite pour chaque cellule : lorsqu'on intègre l'EDP sur un “volume” $C_j \subset \mathbb{R}$ élémentaire, on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_{C_j} u(t, x) dx + \int_{\partial C_j} q(u) \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

La “masse” dans le volume C_j évolue comme la différence des flux entrant et sortant.

Pour construire la partition en cellules, on définit

$$C_j \stackrel{\text{def}}{=} \left[x_0 + \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta x; x_0 + \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta x \right]$$

dont le point milieu est $x_j = x_0 + j \Delta x$.

En appelant

$$x_{j \pm \frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \left(j \pm \frac{1}{2} \right) \Delta x$$

les extrémités de la cellule C_j , on peut écrire la relation de conservation intégrale pour cette cellule sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t, x) dx \right) + q(u(t, x_{j+\frac{1}{2}})) - q(u(t, x_{j-\frac{1}{2}})) = 0.$$

On peut approcher la dérivée temporelle par un Euler explicite, ce qui donne

$$\frac{\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t^{n+1}, x) dx - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t^n, x) dx}{\Delta t} + q(u(t^n, x_{j+\frac{1}{2}})) - q(u(t^n, x_{j-\frac{1}{2}})) = 0.$$

Pour construire une méthode numérique à partir de cette relation, on choisit comme inconnues du problème discret les valeurs moyennes de u sur chaque cellule au temps t^n :

$$u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t^n, x) dx$$

ce qui suggère le schéma

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \alpha [q(u(t^n, x_{j+\frac{1}{2}})) - q(u(t^n, x_{j-\frac{1}{2}}))] = 0.$$

Notons que ce choix diffère du cas des Différences-Finies où l'inconnue discrète u_j^n était une approximation de la valeur ponctuelle $u(t^n, x_j)$.

Les schémas Volumes Finis se différencient selon la façon d'approcher $q(u(t^n, x_{j+\frac{1}{2}}))$, typiquement par une contribution qui dépend de u_j^n et u_{j+1}^n :

$$q(u(t^n, x_{j+\frac{1}{2}})) \approx g(u_j(t), u_{j+1}(t))$$

où g est une fonction régulière dite **flux numérique**. Les différents schémas se caractériseront par la définition du flux numérique.

3.2 Définition

On appelle "schéma *Volumes Finis* (VF)" un schéma qui s'écrit sous la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha [g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)] \quad \text{avec} \quad \Delta t \leq \text{cfl} \frac{\Delta x}{\sup_j |g'(u_j^n)|}.$$

où g est une fonction régulière dite *Flux Numérique*.

Il faut noter que le pas de temps n'est pas fixé une fois pour toute au début du calcul, comme pour les équations de transport, mais varie au cours de l'évolution, et doit être calculé à chaque niveau t^n , même si, pour simplifier les notations, on note toujours Δt .

Avant d'introduire les notions de consistance et convergence, voici quelques remarques générales. Soit un schéma convergent :

- si le schéma est **non conservatif**, on peut converger vers des solutions qui ne sont pas des solutions faibles (par exemple, on converge vers une solution discontinue mais la vitesse de la discontinuité ne satisfait pas la relation de saut de Rankine-Hugoniot) ;
- si le schéma est **conservatif**, on converge vers une solution faible (*i.e.* les discontinuités satisfont à la relation de saut de Rankine-Hugoniot) mais cette solution peut être non entropique (par exemple, la solution approchée présente un choc au lieu d'une détente).

Pour qu'un schéma conservatif converge vers la seule solution entropique, il faudra ajouter d'autres conditions.

3.3 Définition (Conservativité, consistance, monotonie)

1. Par construction, **les schémas VF sont conservatifs**.
2. Un schéma VF est dit **consistant** avec l'EDP si et seulement si la fonction **flux numérique** vérifie $g(u, u) = q(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.²

2. La notion de consistance utilisée pour les schémas Différences-Finies était basée sur les développements de Taylor et ne convient pas au cadre des lois de conservations non-linéaires car les solutions peuvent être discontinues.

3. Notons $H(L, C, R) \stackrel{\text{def}}{=} C - \alpha(g(C, R) - g(L, C))$. On dit que le schéma est **monotone** si H est croissante selon chaque variable.

L'utilité de ces nouvelles définitions (schémas conservatifs et consistants) réside dans le fait que si un schéma **conservatif et consistant** (avec la loi de conservation étudiée) converge, alors il va automatiquement converger vers une **solution faible** de cette même loi de conservation (une discontinuité avancera à la vitesse qui respecte la relation de Rankine-Hugoniot). La notion de **monotonie** sera nécessaire pour garantir la convergence vers une **solution faible entropique**.

Pour étudier la convergence on introduit une fonction constante par morceaux associée à la suite $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$:

$$w_{\Delta t, \Delta x}(x, t) = u_j^n \text{ pour tout } (x, t) \in]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\times]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[.$$

Convergence vers une solution faible

- le schéma est stable L^∞
 - $w_{\Delta t, \Delta x}(x, t) \xrightarrow{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} u^*(x, t)$ p.p.
 - le schéma est conservatif et consistant (par exemple un schéma VF tel que $g(u, u) = q(u)$)
- alors u^* est une solution faible.

Attention

- si le schéma est non conservatif, la limite u^* peut ne pas être une solution faible (exemple : schéma upwind qui génère des choc qui ne vérifient pas la condition de RH)
- si le schéma est conservatif et vérifie les hypothèses ci-dessus, la limite u^* est une solution faible mais peut ne pas être la solution faible entropique (exemple : schéma de Lax-Wendroff qui génère un choc qui vérifie la condition de RH là où il y a une détente).

Convergence des schémas monotones

Si un schéma est conservatif, consistant et monotone alors

- il converge vers l'unique solution faible entropique;
- il est exactement d'ordre 1 ;
- il vérifie le principe du maximum local :

$$\min_{j-1 \leq i \leq i+1} u_i^n \leq H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq \max_{j-1 \leq i \leq i+1} u_i^n, \quad \forall j \in \mathbb{Z};$$

- il est TVD (*total variation diminishing*) :

$$\|H(\mathbf{u})\|_{BV} \leq \|\mathbf{u}\|_{BV}$$

où on a noté $\|\mathbf{u}\|_{BV} = \sum_j |u_j - u_{j-1}|$.



Les différents schémas se caractérisent par la définition du flux numérique g qui est une approximation du flux q . Voici quelques exemples :

1 des schéma Upwind “conservatifs” :

- nous pouvons choisir par exemple

$$g(L, R) = q\left(\frac{L+R}{2}\right)$$

ce qui conduit bien à un schéma conservatif et consistant. Malheureusement, si nous utilisons ce schéma dans le cas linéaire (pour l'équation d'avection), nous obtenons le schéma explicite centré, qui est instable. Ce choix n'est donc pas la bonne généralisation du schéma décentré; un autre choix pourrait être

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R)}{2}$$

menant au même résultat;

- on cherche alors à récupérer le décentrement : on décentre à gauche si les caractéristiques se propagent localement de gauche à droite, et on décentre à droite dans le cas contraire. Pour calculer la pente des caractéristiques on a deux choix possibles :

$$g(L, R) = \begin{cases} q(L) & \text{si } q'\left(\frac{L+R}{2}\right) \geq 0, \\ q(R) & \text{si } q'\left(\frac{L+R}{2}\right) < 0, \\ \frac{q(L)+q(R)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

ou encore

$$g(L, R) = \begin{cases} q(L) & \text{si } (q(R) - q(L))(R - L) \geq 0, \\ q(R) & \text{sinon} \end{cases}$$

2 le schéma de Rusanov (Lax-Friedrichs en une étape) :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) + \frac{L-R}{\alpha}}{2}$$

3 le schéma de Lax-Wendroff :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) - \alpha(q(R) - q(L))q'\left(\frac{L+R}{2}\right)}{2}$$

4 le schéma de Engquist-Osher :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) - \int_L^R |q'(z)| dz}{2}$$

5 le schéma de Godunov : si on dénote $w_{L,R}(\frac{x}{t})$ la solution exacte du problème de Riemann à deux états donnés par L (gauche) et R (droite), le flux numérique s'écrit

$$g(L, R) = q(w_{L,R}(x/t = 0))$$

Exercice 3.1 (Schéma de Engquist-Osher)

Utilisons le schéma de Engquist-Osher pour approcher la solution de l'équation de Burgers.

1. Montrer qu'il est consistant.
2. Montrer qu'il est monotone sous condition CFL.
3. Montrer que si la condition initiale u_j^0 est positive pour tout $j \in \mathbb{Z}$, alors la solution approchée u_j^n l'est aussi pour tout n .
4. Montrer que ce schéma coïncide avec le schéma décentré dans les zones où u_j^n ne change pas de signe.

Correction

1. L'équation de Burgers correspond au flux $q(u) = \frac{u^2}{2}$ ainsi $q'(u) = u$ et

$$\int_L^R |q'(z)| dz = \int_L^R |z| dz = \left[\frac{z^2}{2} \text{signe}(z) \right]_L^R = \frac{R^2}{2} \text{signe}(R) - \frac{L^2}{2} \text{signe}(L) = \begin{cases} \frac{R^2 - L^2}{2} & \text{si } L > 0, R > 0 \\ -\frac{R^2 + L^2}{2} & \text{si } L > 0, R < 0 \\ \frac{R^2 + L^2}{2} & \text{si } L < 0, R > 0 \\ \frac{L^2 - R^2}{2} & \text{si } L < 0, R < 0 \end{cases}$$

Le flux numérique s'écrit alors

$$\begin{aligned} g(L, R) &= \frac{q(L) + q(R) - \int_L^R |q'(z)| dz}{2} = \frac{\frac{L^2}{2} + \frac{R^2}{2} - \int_L^R |z| dz}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{L^2 + R^2}{2} - \frac{R^2}{2} \text{signe}(R) + \frac{L^2}{2} \text{signe}(L) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \text{signe}(L)}{2} L^2 + \frac{1 - \text{signe}(R)}{2} R^2 \right) \end{aligned}$$

donc

$$g(L, R) = \begin{cases} \frac{L^2}{2} & \text{si } L > 0, R > 0 \\ \frac{L^2 + R^2}{2} & \text{si } L > 0, R < 0 \\ 0 & \text{si } L < 0, R > 0 \\ \frac{R^2}{2} & \text{si } L < 0, R < 0 \end{cases}$$

Le schéma est consistant car

$$g(u, u) = \frac{u^2}{2} = q(u).$$

2. Le schéma est monotone car, si on définit

$$H(L, C, R) \stackrel{\text{def}}{=} C - \alpha (g(C, R) - g(L, C)) = C - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{L^2}{2} + \int_L^C |z| dz - \int_C^R |z| dz \right)$$

on a

$$\begin{aligned} \partial_L H &= \frac{\alpha}{2} (L + |L|) \geq 0 \\ \partial_C H &= 1 - \alpha |C| \geq 0 \iff \alpha \leq \frac{1}{|C|} \\ \partial_R H &= \frac{\alpha}{2} (|R| - R) \geq 0 \end{aligned}$$

Le schéma est donc monotone sous condition CFL $\sup_j \frac{\Delta t}{\Delta x} |u_j^n| \leq 1$. On en déduit que le schéma est entropique.

3. Pour la positivité, travaillons par récurrence. Si $u_j^n \geq 0$ pour tout j , alors d'après la monotonie de H on a $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) > H(0, 0, 0) = 0$.

4. Enfin, si $u \geq 0$, alors $q'(u) = u \geq 0$, le flux s'écrit alors $g(L, R) = \frac{L^2}{2}$ ce qui donne $H(L, C, R) = C - \alpha(g(C, R) - g(L, C)) = C - \alpha \frac{C^2 - L^2}{2}$, soit encore

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2}$$

ce qui correspond à un schéma décentré à gauche. De même, pour une zone où $u \leq 0$, on trouve le schéma décentré à droite.

Exercice 3.2 (Schéma de Lax-Wendroff)

Utilisons le schéma de Lax-Wendroff pour approcher la solution de l'équation de Burgers.

1. Montrer qu'il est consistant.
2. Montrer qu'il n'est pas entropique en l'appliquant à la donnée initiale

$$u_j^0 = \begin{cases} w & \text{si } j < 0, \\ -w & \text{sinon.} \end{cases}$$

Correction

Le flux numérique du schéma de Lax-Wendroff est

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) - \alpha(q(R) - q(L))q'\left(\frac{L+R}{2}\right)}{2}.$$

L'équation de Burgers correspond au flux $q(u) = \frac{u^2}{2}$ ainsi $q'(u) = u$.

1. On a bien $g(u, u) = \frac{q(u) + q(u) - \alpha(q(u) - q(u))q'\left(\frac{u+u}{2}\right)}{2} = q(u)$ donc le schéma est consistant avec l'EDP.
2. En appliquant le schéma on obtient $u_j^n = u_j^0$ pour tout j : la solution approchée est un choc stationnaire. Si $w > 0$ la solution exacte présente effectivement un choc d'équation $s(t) = 0$ pour tout t donc la solution approchée vérifie bien les relations de saut de Rankine-Hugoniot et capture la solution faible entropique. Cependant, dans le cas $w < 0$, on a $u_L < u_R$ et la solution faible entropique est une détente (le choc stationnaire est bien une solution faible mais elle n'est pas entropique).

Exercice 3.3 (Schéma de Godunov pour l'équation de Burgers)

Montrer que, dans le cas du flux de Burgers, le flux du schéma de Godunov vérifie

$$g(L, R) = \begin{cases} \max\{q(L), q(R)\} & \text{si } L > R, \\ q(L) & \text{si } L \geq 0, \\ q(0) & \text{si } L < 0 < R, \\ q(R) & \text{sinon.} \end{cases}$$

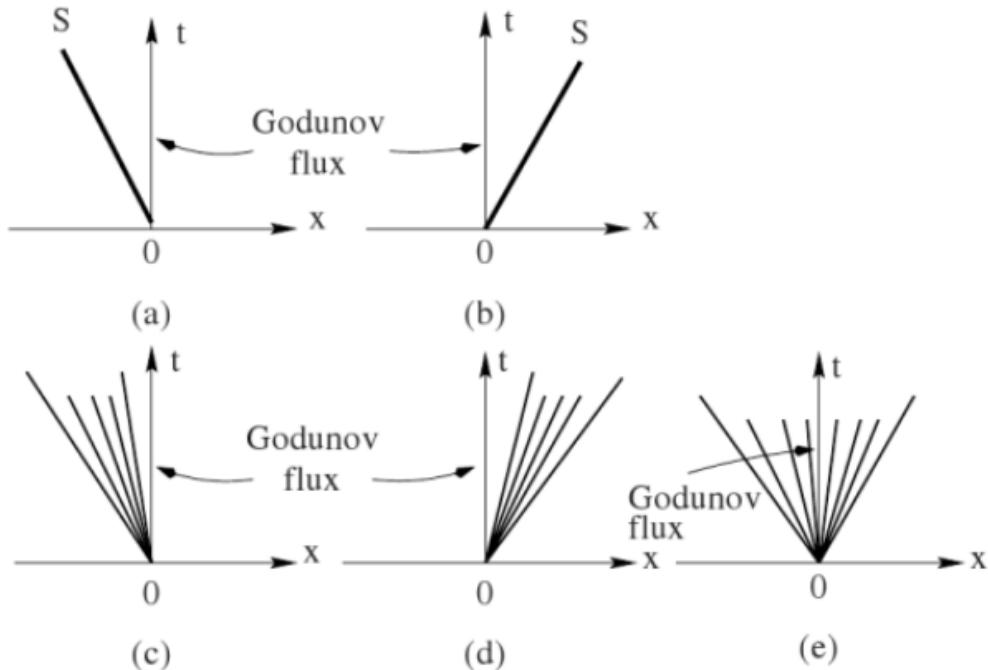
Correction

Soit $w_{L,R}(x/t)$ la solution exacte du problème de Riemann $u_{\text{init}}(x) = L$ si $x < 0$ et $u_{\text{init}}(x) = R$ si $x > 0$. Si $L > R$ la solution est un choc de vitesse $S'(t) = \frac{q(R) - q(L)}{R - L} t = \frac{L+R}{2}$, sinon la solution est une détente. La solution

complète s'écrit alors

$$w_{L,R}(x/t) = \begin{cases} \begin{cases} L & \text{si } x/t \leq S'(t), \\ R & \text{si } x/t \geq S'(t), \end{cases} & \text{si } L > R, \\ \begin{cases} L & \text{si } x/t \leq L, \\ 0 & \text{si } L < x/t < R, \\ R & \text{si } x/t \geq R, \end{cases} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on note $w_{L,R}(0)$ la solution exacte évaluée le long de la droite $x/t = 0$, on doit alors considérer cinq possibles patterns :



Alors

$$w_{L,R}(0) = \begin{cases} \begin{cases} L & \text{si } 0 \leq \frac{L+R}{2}, \\ R & \text{si } 0 \geq \frac{L+R}{2}, \end{cases} & \text{si } L > R, \\ \begin{cases} L & \text{si } 0 \leq L (\leq R), \\ 0 & \text{si } L < 0 < R, \\ R & \text{si } 0 \geq R (\geq L), \end{cases} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que, pour le cas $L > R$, on a $\frac{L+R}{2} \geq 0$ ssi $q(L) \geq q(R)$ car

$$\text{signe}\left(\frac{L+R}{2}\right) = \text{signe}\left(\frac{(L+R)(L-R)}{2}\right) = \text{signe}\left(\frac{L^2 - R^2}{2}\right) = \text{signe}(q(L) - q(R)).$$

Dans le cas $L > R$ on a alors $q(w_{L,R}(0)) = \max\{q(L), q(R)\}$.

Exercice 3.4 (Schéma de Godunov)

Montrer que, dans le cas d'un flux q strictement convexe, le flux du schéma de Godunov vérifie

$$g(L, R) \stackrel{\text{def}}{=} q(w_{L,R}(0)) = \begin{cases} \max_{R \leq s \leq L} q(s) & \text{si } R < L, \\ \min_{L \leq s \leq R} q(s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fait, il est possible de montrer que ce résultat reste vrai même sans l'hypothèse de convexité sur q .

Correction

- Si $L > R$ on sait que la solution entropique est un choc se propageant à la vitesse $\dot{s} = \frac{q(R) - q(L)}{R - L}$ et

$$q(w_{L,R}(0)) = \begin{cases} q(L) & \text{si } \dot{s} > 0, \\ q(R) & \text{si } \dot{s} < 0. \end{cases}$$

\dot{s} est la pente de la corde reliant les points $(L, q(L))$ et $(R, q(R))$; comme q est convexe et que $L > R$, on a deux cas possibles :

- si $\dot{s} > 0$ alors $q(R) < q(L)$ donc $q(L) = \max_{R \leq s \leq L} q(s)$;
- si $\dot{s} < 0$ alors $q(R) > q(L)$ donc $q(R) = \max_{R \leq s \leq L} q(s)$.

Dans les deux cas on a bien $q(w_{L,R}(0)) = \max_{R \leq s \leq L} q(s)$.

- Si $L < R$ on sait que la solution présente une détente comprise entre $q'(L)$ et $q'(R)$. De plus, on sait que q' est une fonction croissante. Trois cas se présentent alors selon la position de la détente par rapport à l'interface considérée

- Si $q' > 0$ sur $[L; R]$ alors $0 < q'(L) < q'(R)$ donc $q(w_{L,R}(0)) = q(L)$. Comme q est croissante alors $q(L) = \min_{L \leq s \leq R} q(s)$.
- Si $q' < 0$ sur $[L; R]$ alors $q'(L) < q'(R) < 0$ donc $q(w_{L,R}(0)) = q(R)$. Comme q est décroissante alors $q(R) = \min_{L \leq s \leq R} q(s)$.
- Si q' change de signe sur $[L; R]$ alors il existe un $C \in]L; R[$ tel que $q'(C) = 0$ et $q'(L) < 0 < q'(R)$. Dans ce cas $q(w_{L,R}(0)) = q((q')^{-1}(0)) = q(C)$. Comme q est convexe, $q(C) = \min_{L \leq s \leq R} q(s)$.

En conclusion :

$$w_{L,R}(0) = \begin{cases} L & \text{si } q'(L) \geq 0, q'(R) \geq 0, \\ R & \text{si } q'(L) \leq 0, q'(R) \leq 0, \\ L & \text{si } q'(R) \leq 0 \leq q'(L), \frac{q(R) - q(L)}{R - L} > 0, \\ R & \text{si } q'(R) \leq 0 \leq q'(L), \frac{q(R) - q(L)}{R - L} < 0, \\ C & \text{si } q'(L) < 0 < q'(R), \end{cases}$$

où C est telle que $q'(C) = 0$ (on parle de rarefaction transsonique et le point C est appelé point sonique). Par exemple, pour l'équation de Burgers on a $C = 0$.

Exercice 3.2

On considère l'équation de Burgers avec des conditions aux bords de type Neumann.

Implémenter les schémas et comparer les solutions numériques obtenues avec la solution exacte pour les problèmes de Riemann suivants :

1. un choc obtenu avec la donnée initiale $u_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La solution numérique converge-t-elle vers une solution faible? Autrement dit, est-ce que la vitesse de l'onde de choc numérique est correcte pour tous les schémas?

2. une détente obtenue avec la donnée initiale $u_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

La solution numérique converge-t-elle vers une solution faible? Et vers une solution faible entropique? Les schémas sont-ils monotones?

Pour les simulations on prendra le temps finale $T = 4$, une grille de 50 mailles; on testera avec $\text{cfl}=0.9$, puis avec $\text{cfl}=1.1$. Que peut-on conclure à propos de la stabilité?

On pourra s'inspirer des simulations de la page <https://perso.ensta-paris.fr/~haddar/Cours/ENSTA/SIMUL/Burgers.html>

Correction

- Le schéma de Lax-Friedrichs est consistant et d'ordre 1, monotone sous contrainte $\text{CFL} < 1$ et stable sous la même contrainte. La méthode de Lax-Friedrichs approche donc la solution faible entropique.
- Le schéma de Lax-Wendroff est d'ordre 2 en espace et 1 en temps, il est stable sous contrainte $\text{CFL} < 1$, mais il n'est pas monotone. La solution approchée fournie par la méthode de Lax-Wendroff présente des **discontinuités qui ne sont pas entropiquement admissibles**: la solution faible approchée par le schéma n'est pas entropique. Visiblement, avoir un schéma conservatif et consistant n'est pas assez pour "électionner" la bonne solution (entropique!).
- Le schéma de Engquist-Osher est consistant et d'ordre 1 (en temps et en espace), monotone sous contrainte $\text{CFL} < 1$ et stable sous la même contrainte. Cette méthode approche donc la solution faible entropique.
- Le schéma de Godunov est consistant et d'ordre 1 en temps et en espace, il est monotone sous contrainte $\text{CFL} < 1$.



Exercice 3.3

On a vu que, même si $u_{\text{init}} \in C^1(\mathbb{R})$, la solution présente un choc en un temps fini. Le montrer numériquement sur les exemples étudiés.



Exercice 3.4

On considère l'équation de Burgers avec des conditions aux bords de type Neumann.

Implémenter les schémas et comparer les solutions numériques obtenues avec la solution exacte pour les doubles problèmes de Riemann suivants :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 0 & \text{si } x \in]2; 3[, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 0 & \text{si } x \in]2; 3[, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 2 & \text{si } x \in]2; 3[, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 0 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 1 & \text{si } x \in]2; 3[, \end{cases}$$

Exercice 3.5 (Méthode MUSCL (Van Leer))

La méthode MUSCL (pour "monotonic upwind scheme for conservation laws") de Van Leer est une méthode d'interpolation générique permettant d'augmenter la précision tout en empêchant l'apparition d'oscillations parasites.

On part d'un schéma conservatif de base de la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

avec

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

où g est une formule de flux numérique donnée. On considère ici le cas où g est le flux du schéma décentré avec la correction de Harten et Hyman. On remplace $F_{j+\frac{1}{2}}^n$ par

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_{j+1/2}^{n,-}, u_{j+1/2}^{n,+})$$

où $u_{j+1/2}^{n,-}$ et $u_{j+1/2}^{n,+}$ sont des interpolations affines de u_{j-1}^n , u_j^n et u_{j+1}^n :

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{n,-} &= u_j^n + \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n)\varphi(r_j) \\ u_{j+1/2}^{n,+} &= u_j^n - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n)\varphi(1/r_{j+1}) \end{aligned}$$

où $r_j = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}$. La fonction φ s'appelle limiteur de pente et est destinée à empêcher l'apparition d'oscillations. Plus précisément on a

$$u_{j+1/2}^{n,\pm} \in [\min\{u_j^n, u_{j+1}^n\}; \max\{u_j^n, u_{j+1}^n\}]$$

ssi

1. $\varphi(r) \leq 0$ pour $r \leq 0$
2. $\varphi(r) \in [0; 2r]$ pour $r \in [0; 1]$
3. $\varphi(r) \leq 2$ pour $r \geq 1$.

Exemple : la fonction

$$\text{minmod}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ r & \text{si } 0 < r < 1, \\ 1 & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

Implémenter et tester le schéma MUSCL avec l'équation de Burgers et les données initiales des exercices précédents. Calculer numériquement la variation totale de la suite $(u_j)_j^n$:

$$\sum_j |u_j^n - u_{j-1}^n|$$

Correction

TO DO <https://jeanpierre-croisille.perso.math.cnrs.fr/M2-1415/TD4.pdf>

4.

Contrôles continus

4.1. Contrôle Continu 2022

Exercice 4.1 (Équation non-linéaire, étude théorique)

Soit $\rho \equiv \rho(x, t) \geq 0$ la densité de voitures sur une route. Supposons que l'évolution de la densité soit décrite par l'équation de conservation

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(v_m \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

où $\rho_m > 0$ est la densité maximale de voitures qui correspond à un bouchon (vitesse nulle) et $v_m > 0$ la vitesse maximale permise sur la route. Considérons la donnée initiale

$$\rho(0, x) = \rho_{\text{init}}(x) \equiv \begin{cases} a\rho_m, & \text{si } x < 0, \\ \frac{\rho_m}{2}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Décrire, en fonction du paramètre $a \in]0; 1]$, l'évolution de ρ pour $t > 0$.

Correction

Le flux est défini comme

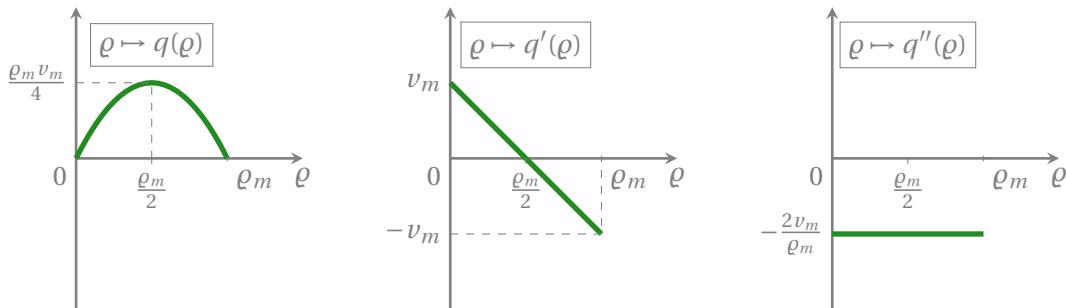
$$q(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) \rho > 0,$$

donc

$$q'(\rho) = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m} \right) = \frac{v_m}{\rho_m} (\rho_m - 2\rho) \quad (\text{décroissant}), \quad q''(\rho) = -\frac{2v_m}{\rho_m} < 0 \quad (\text{constant}),$$

ainsi

- q est une fonction croissante sur $[0, \frac{\rho_m}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\rho_m}{2}, \rho_m]$; q est une fonction strictement concave de la densité;
- q' est une fonction décroissante qui s'annule en $\frac{\rho_m}{2}$.



La caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a pour équation

$$\chi(t) = \xi + q'(\varrho_{\text{init}}(\xi))t = \xi + v_m \left(1 - 2 \frac{\varrho_{\text{init}}(\xi)}{\varrho_m} \right) t = \begin{cases} \xi + v_m(1-2a)t, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi, & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$

Pour $\xi > 0$, les caractéristiques sont des droites verticales. Par conséquent, si les caractéristiques pour $\xi < 0$ ont pente positive, on a la génération d'un choc, sinon une onde de raréfaction. **Le flux étant concave, on a un choc si $\varrho_L < \varrho_R$, une détente si $\varrho_L > \varrho_R$.**

- Si $a < \frac{1}{2}$, alors $\varrho_L < \varrho_R$: on a un choc (solution faible entropique). En utilisant la relation de Rankine-Hugoniot on trouve que la vitesse d'avancement de ce choc est

$$\begin{aligned} s'(t) &= \frac{q(\varrho_R) - q(\varrho_L)}{\varrho_R - \varrho_L} = \frac{v_m \varrho_R \left(1 - \frac{\varrho_R}{\varrho_m} \right) - v_m \varrho_L \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_m} \right)}{\varrho_R - \varrho_L} \\ &= \frac{v_m \frac{\varrho_m}{2} \left(1 - \frac{\frac{\varrho_m}{2}}{\varrho_m} \right) - v_m a \varrho_m \left(1 - \frac{a \varrho_m}{\varrho_m} \right)}{\frac{\varrho_m}{2} - a \varrho_m} = \frac{v_m \frac{\varrho_m}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) - v_m a \varrho_m (1-a)}{\left(\frac{1}{2} - a \right) \varrho_m} \\ &= v_m \frac{\frac{1}{4} - a(1-a)}{\frac{1}{2} - a} = v_m \frac{\frac{1}{4} - a + a^2}{\frac{1}{2} - a} = v_m \frac{\left(\frac{1}{2} - a \right)^2}{\frac{1}{2} - a} = v_m \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{aligned}$$

avec $s(0) = 0$ d'où $s(t) = v_m \left(\frac{1}{2} - a \right) t$. La solution s'écrit

$$\varrho(x, t) = \begin{cases} a \varrho_m, & \text{si } x < v_m \left(\frac{1}{2} - a \right) t, \\ \frac{\varrho_m}{2}, & \text{si } x > v_m \left(\frac{1}{2} - a \right) t. \end{cases}$$

- Si $a > \frac{1}{2}$, alors $\varrho_L > \varrho_R$: on a une détente dans la région du demi-espace $t > 0$ qui n'est pas rejointe par les caractéristiques. L'onde de raréfaction centrée en $(0, 0)$ et contenue dans l'ensemble

$$q'(\varrho_L) \leq \frac{x}{t} \leq q'(\varrho_R) \quad \rightsquigarrow \quad v_m(1-2a) \leq \frac{x}{t} \leq 0$$

a pour équation

$$\varrho(t, x) = (q')^{-1} \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{\varrho_m}{2} \left(1 - \frac{1}{v_m} \frac{x}{t} \right).$$

On a donc

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} a \varrho_m, & \text{si } x < v_m(1-2a)t, \\ \frac{\varrho_m}{2} \left(1 - \frac{1}{v_m} \frac{x}{t} \right), & \text{si } v_m(1-2a)t < x < 0, \\ \frac{\varrho_m}{2}, & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

- Si $a = 1/2$ toutes les caractéristiques sont parallèles et la solution est constante en temps et en espace.



Exercice 4.2 (Équation non-linéaire, étude numérique (VF))

On s'intéresse au schéma de Murman-Roe pour l'approximation de la solution d'une équation hyperbolique non linéaire. Soit f une application régulière de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , **strictement convexe**. On considère l'équation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0. \tag{4.1}$$

1. Soient u_L et u_R deux états. Montrer qu'il existe un unique $u^*(u_L, u_R)$ compris entre u_L et u_R tel que

$$f(u_R) - f(u_L) = f'(u^*(u_L, u_R))(u_R - u_L).$$

2. Considérons le schéma VF suivant

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F(u_i^n, u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n, u_i^n)}{\Delta x} = 0$$

où le flux numérique est

$$F(a, b) \equiv \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{|f'(u^*(a, b))|}{2}(b - a), \quad f'(u^*(u_L, u_R)) = \begin{cases} \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} & \text{si } u_R \neq u_L \\ f'(u_R) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer qu'il est consistant et que

$$F(a, b) = \begin{cases} f(a), & \text{si } f'(u^*(a, b)) > 0, \\ f(b), & \text{si } f'(u^*(a, b)) < 0, \\ f(a) = f(b), & \text{si } f'(u^*(a, b)) = 0. \end{cases}$$

3. Soient u_L et u_R tels que $u_L \neq u_R$ et $f(u_L) = f(u_R)$. Montrer que la fonction

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < 0, \\ u_R, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation (4.1). Sous quelle condition elle est une solution entropique?

4. Montre que le schéma préserve la solution stationnaire construite à la question précédente, i.e. montrer que si

$$u_i^0 = \begin{cases} u_L, & \text{si } i < 0, \\ u_R, & \text{si } i \geq 0, \end{cases}$$

alors $u_i^n = u_i^0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le schéma n'est pas entropique.

Correction

f est strictement convexe donc f' est strictement croissante.

1. L'existence de u^* résulte du théorème des accroissement finis : si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. L'unicité de u^* résulte de la stricte monotonie de f' .¹
2. Il est consistant car $F(a, a) = f(a)$.

De plus, si $f'(u^*(a, b)) > 0$ alors

$$F(a, b) = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{f'(u^*(a, b))}{2}(b - a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{2}(b - a) = f(a),$$

si $f'(u^*(a, b)) < 0$ alors

$$F(a, b) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{f'(u^*(a, b))}{2}(b - a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{2}(b - a) = f(b),$$

1. Sinon, l'existence et l'unicité résultent du théorème de la bijection : si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .

si $f'(u^*(a, b)) = 0$ alors $f(a) = f(b)$ et donc

$$F(a, b) = \frac{f(a) + f(b)}{2} = f(a) = f(b).$$

3. La solution proposée est une discontinuité stationnaire. Elle vérifie bien évidemment l'EDP de part et d'autre de la discontinuité. Pour qu'elle soit une solution faible il faut de plus qu'elle vérifie la condition de Rankine-Hugoniot. Cette condition s'écrit

$$s'(t) = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}.$$

Puisque $f(u_R) = f(u_L)$ on a bien $s'(t) = 0$ pour tout t , c'est-à-dire un choc stationnaire : la fonction est bien une solution faible.

Cette solution est entropique au sens de Laxssi $q'(u_R) < s'(t) < q'(u_L)$. Le flux étant strictement convexe, q' est une fonction croissante donc la solution est entropiquessi $u_L > u_R$.

Par exemple, si on considère l'équation de Burgers, on a $q(u) = u^2/2$ qui est un flux strictement convexe.

- Si $u_L = 1$ et $u_R = -1$ on a $f(u_L) = f(u_R)$ et la vitesse de l'onde calculée par la relation de Rankine-Hugoniot donne $s'(t) = \frac{u_L + u_R}{2} = 0$. De plus, $q'(u_R) < s'(t) < q'(u_L)$, donc la solution faible est entropique.
- Si $u_L = -1$ et $u_R = 1$ on a encore $f(u_L) = f(u_R)$ et la vitesse de l'onde calculée par la relation de Rankine-Hugoniot donne encore $s'(t) = \frac{u_L + u_R}{2} = 0$. Cependant, $q'(u_R) > s'(t) > q'(u_L)$, donc la solution faible n'est pas entropique. La "bonne" solution dans ce cas est une raréfaction.

4. La solution au point précédente est caractérisée par $f(u_R) = f(u_L)$ donc le flux numérique se réduit à $F(a, b) = \frac{f(a)+f(b)}{2} = f(a) = f(b)$. Alors

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(u_i^n, u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n, u_i^n)) = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(u_i^n) - F(u_i^n)) = u_i^n$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $u_L < u_R$, il est possible de construire deux solutions faibles : l'une avec deux états séparés par une onde de raréfaction et l'autre avec deux états séparés par un choc. Cependant, seule la raréfaction est une solution faible entropique mais le schéma construira la discontinuité stationnaire.

4.2. Contrôle Continu 2023

Exercice 4.3

Considérons $\rho \equiv \rho(x, t) \geq 0$ comme la densité de voitures sur une route. Supposons que l'évolution de la densité soit gouvernée par le modèle LWR donné par l'équation suivante :

$$\partial_t \rho + \partial_x q(\rho) = 0, \quad q(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \rho, \quad (4.2)$$

où $\rho_m > 0$ est la densité maximale de voitures qui correspond à un bouchon (vitesse nulle) et $v_m > 0$ la vitesse maximale permise sur la route.

Partie 1 Calculer de manière très succincte la solution exacte des deux problèmes de Riemann suivants :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{init}}(x) &= \begin{cases} \frac{\rho_m}{2} & \text{si } x < 0, \\ \rho_m & \text{si } x > 0; \end{cases} & \rho_{\text{init}}(x) &= \begin{cases} \rho_m & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On appellera $\rho_c(t, x)$ la solution associée à la première donnée initiale et $\rho_d(t, x)$ la solution associée à la deuxième.

Partie 2 Supposons qu'un feu tricolore est placé en $x = 0$. À l'instant $t = 0$, le feu passe au rouge. Avant le feu, les voitures ont une densité de $\frac{\rho_m}{2}$, après le feu la route est libre. Si on considère le feu rouge comme la queue d'un bouchon, l'évolution de la densité au cours du temps est donnée par

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_c(t, x) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad t \in [0; 2]. \quad (4.3)$$

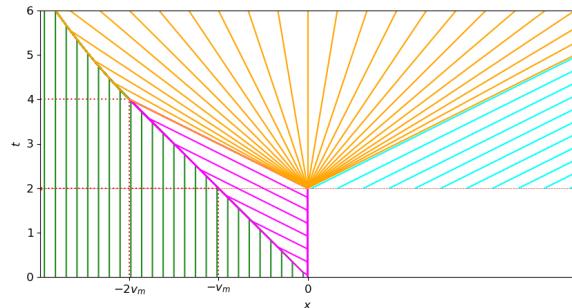
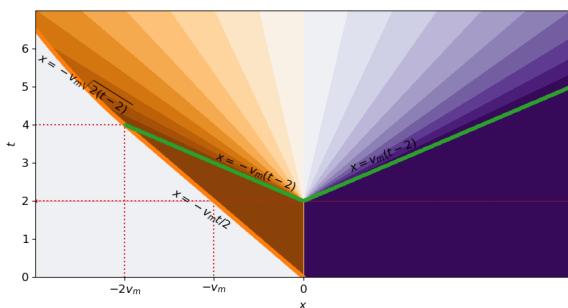
- À l'instant $t = 2$, le feu rouge passe au vert. Pour étudier l'évolution de la densité au cours du temps, on considère alors la donnée initiale

$$\rho_{\text{init}}(t = 2, x) = \begin{cases} \rho_c(2, x) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Notons qu'il s'agit maintenant d'un double problème de Riemann car $\rho_c(2, x)$ est constante par morceaux ainsi on a deux discontinuités, l'une en $x_0 < 0$ et l'autre en $x_1 = 0$. Calculer, pour $t \in [2; 4]$, la solution exacte (*indice* : elle est constituée de trois états constants séparés par un choc et une détente).

- À partir de $t = 4$, le choc et la détente du point précédent commencent à interagir. Calculer la solution exacte à partir de ce moment.

Aide : à gauche, courbes de niveau de la solution avec les équations des ondes; à droite, courbes caractéristiques.



Correction

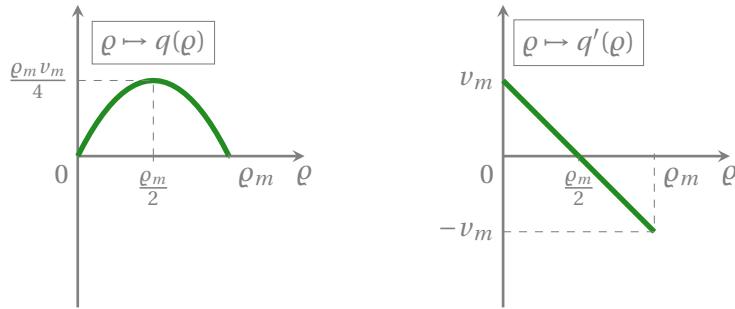
Le flux du modèle LWR vérifie

$$q(\varrho) = v_m \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_m}\right) \varrho = \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_m - \varrho) \varrho, \quad q'(\varrho) = v_m \left(1 - \frac{2\varrho}{\varrho_m}\right) = \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_m - 2\varrho).$$

Le flux étant concave, on a un choc si $\varrho_L < \varrho_R$, une détente si $\varrho_L > \varrho_R$.

De plus,

$$\zeta = q'(\varrho) \iff \varrho(\zeta) = (q')^{-1}(\zeta) = \frac{\varrho_m}{2v_m} (v_m - \zeta).$$



Partie 1 La caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a pour équation

$$\chi(t) = \xi + q'(\varrho_{\text{init}}(\xi)) t = \xi + \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_m - 2\varrho_{\text{init}}(\xi)) t.$$

- Cas “c” : la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a pour équation

$$\chi(t) = \begin{cases} \xi, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi - v_m t, & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

ainsi, pour $\xi < 0$ les caractéristiques sont des droites verticales tandis que pour $\xi > 0$ elles ont pente négative. La solution est constante par morceaux et la vitesse de la discontinuité vérifie la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(\varrho_R) - q(\varrho_L)}{\varrho_R - \varrho_L} = \frac{q(\varrho_m) - q(\frac{\varrho_m}{2})}{\varrho_m - \frac{\varrho_m}{2}} = \frac{0 - \frac{\varrho_m v_m}{4}}{\varrho_m - \frac{\varrho_m}{2}} = -\frac{v_m}{2} \\ s(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow s(t) = -\frac{v_m}{2} t.$$

La solution s’écrit

$$\varrho_c(t, x) = \begin{cases} \frac{\varrho_m}{2} & \text{si } x < -\frac{v_m}{2} t, \\ \varrho_m & \text{si } x > -\frac{v_m}{2} t. \end{cases}$$

- Cas “d” : la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a pour équation

$$\chi(t) = \begin{cases} \xi - v_m t, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi + v_m t, & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

ainsi, pour $\xi < 0$ les caractéristiques sont des droites de pente $q'(\varrho_L) = q'(\varrho_m) = -v_m$ tandis que pour $\xi > 0$ elles ont pente $q'(\varrho_R) = q'(0) = v_m$. La solution est donc une fonction continue constituée de deux états constants reliés par une détente. La détente est comprise entre la droite $x = q'(\varrho_L) t = -v_m t$

et la droite $x = q'(\varrho_R)t = v_m t$. Dans la détente, les caractéristiques ont pour équation $x = mt$ avec $m \in [-v_m; v_m]$ et l'on a

$$\varrho(t, x) = (q')^{-1} \left(\frac{x-0}{t-0} \right) = \frac{\varrho_m}{2v_m} \left(v_m - \frac{x}{t} \right).$$

On conclut que la solution est

$$\varrho_d(t, x) = \begin{cases} \varrho_m & \text{si } x \leq -v_m t, \\ \frac{\varrho_m}{2v_m} \left(v_m - \frac{x}{t} \right) & \text{si } -v_m t < x < v_m t \\ \frac{\varrho_m}{2} & \text{si } x \geq v_m t. \end{cases}$$

Partie 2

- Pour $t \in [0; 2]$ l'évolution de la densité au cours du temps est

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \frac{\varrho_m}{2} & \text{si } x < -\frac{v_m}{2} t, \\ \varrho_m & \text{si } -\frac{v_m}{2} t < x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad t \in [0; 2]. \quad (4.5)$$

- Pour $t \in [2; 4]$ on considère $\varrho(2, x)$ comme la nouvelle donnée "initiale" :

$$\varrho(t=2, x) = \begin{cases} \frac{\varrho_m}{2} & \text{si } x < -v_m, \\ \varrho_m & \text{si } -v_m < x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Il s'agit d'un double problème de Riemann.

La caractéristique de pied $(\xi, 2)$ a pour équation

$$\chi(t) = \xi + q'(\varrho(2, \xi))(t-2) = \xi + \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_m - 2\varrho(2, \xi)) (t-2) = \begin{cases} \xi, & \text{si } \xi < -v_m, \\ \xi - v_m(t-2), & \text{si } -v_m < \xi < 0, \\ \xi + v_m(t-2), & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$

- Au voisinage du point $(-v_m, 2)$ on a $\varrho_L = \frac{\varrho_m}{2} < \varrho_R = \varrho_m$: la solution aura un choc pour $t > 2$. En utilisant la relation de Rankine-Hugoniot on retrouve la même vitesse d'avancement du choc qu'au point précédent, c'est-à-dire $-\frac{v_m}{2}$ avec $s(2) = -v_m$ ainsi $s(t) = -\frac{v_m}{2}t$ (le choc pour $t \in [2; 4]$ a la même équation que pour $t \in [0; 2]$).
- Au voisinage du point $(0, 2)$ on a $\varrho_L = \varrho_m > \varrho_R = 0$: la solution contiendra une détente comprise entre la droite $x = 0 + q'(\varrho_L)(t-2)$ et $x = 0 + q'(\varrho_R)(t-2)$. Dans la détente, les caractéristiques ont pour équation $x = 0 + m(t-2)$ avec $m \in [-v_m; v_m]$ et l'on a

$$\varrho(t, x) = (q')^{-1} \left(\frac{x-0}{t-2} \right) = \frac{\varrho_m}{2v_m} \left(v_m - \frac{x}{t-2} \right).$$

On conclut que la solution est

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \frac{\varrho_m}{2} & \text{si } x < -\frac{v_m}{2} t, \\ \varrho_m, & \text{si } -\frac{v_m}{2} t < x < -v_m(t-2), \\ \frac{\varrho_m}{2v_m} \left(v_m - \frac{x}{t-2} \right), & \text{si } -v_m(t-2) < x < v_m(t-2), \\ 0, & \text{si } x > v_m(t-2), \end{cases} \quad t \in [2; 4].$$

- À l'instant $t = 4$ le choc et la raréfaction entrent en collision :

$$\begin{cases} x = -\frac{v_m}{2} t \\ x = -v_m(t-2) \end{cases} \iff \begin{cases} t = 4 \\ x = -2v_m \end{cases}$$

Il faut alors calculer un nouveau choc entre l'état gauche (constant) $\varrho_L = \varrho_m/2$ et l'état droit (non constant) $\varrho_R = \frac{\varrho_m}{2v_m} \left(v_m - \frac{x}{t-2} \right)$. Notons que

$$\begin{aligned} q(\varrho_R) - q(\varrho_L) &= \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_m - \varrho_R) \varrho_R - \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_m - \varrho_L) \varrho_L \\ &= \frac{v_m}{\varrho_m} [\varrho_m (\varrho_R - \varrho_L) - (\varrho_R^2 - \varrho_L^2)] \\ &= \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_R - \varrho_L) [\varrho_m - (\varrho_R + \varrho_L)] \\ &= \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_R - \varrho_L) [\varrho_L - \varrho_R] \\ &= \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_R - \varrho_L) \left[\frac{\varrho_m}{2} - \frac{\varrho_m}{2v_m} \left(v_m - \frac{x}{t-2} \right) \right] \\ &= \frac{v_m}{\varrho_m} (\varrho_R - \varrho_L) \frac{\varrho_m}{2} \left[1 - \frac{1}{v_m} \left(v_m - \frac{x}{t-2} \right) \right] \\ &= \frac{v_m}{2} (\varrho_R - \varrho_L) \left[\frac{1}{v_m} \frac{x}{t-2} \right] \\ &= (\varrho_R - \varrho_L) \frac{x}{2(t-2)} \end{aligned}$$

ainsi le choc vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(\varrho_R) - q(\varrho_L)}{\varrho_R - \varrho_L} = \frac{s(t)}{2(t-2)} \\ s(4) = -2v_m \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad s(t) = -v_m \sqrt{2(t-2)}.$$

En conclusion, la solution s'écrit

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \frac{\varrho_m}{2} & \text{si } x < -v_m \sqrt{2(t-2)}, \\ \frac{\varrho_m}{2v_m} \left(v_m - \frac{x}{t-2} \right), & \text{si } -v_m \sqrt{2(t-2)} < x < v_m(t-2), \quad t > 4. \\ 0, & \text{si } x > v_m(t-2). \end{cases}$$

4.3. Contrôle Continu 2024

Exercice 4.4 (Cas linéaire)

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t w - tx\partial_x w = t, & t > 0 \\ w(t=0, x) = w_{\text{init}}(x) = x^2. \end{cases}$$

Suggestion : les solutions de l'EDO $y'(t) = -ty(t)$ sont de la forme $y(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$.

Correction

Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une particule située en \hat{x} à l'instant \hat{t} . La courbe $(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))$, dite *courbe caractéristique*, vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = -tx\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t), & t > 0 \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases} \quad (4.7)$$

On a donc

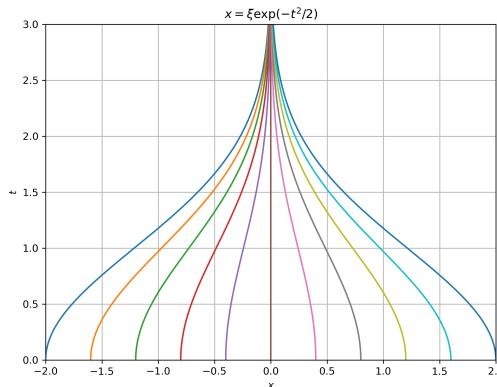
$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x}e^{(\hat{t}^2 - t^2)/2}.$$

On notera $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \hat{x}e^{\hat{t}^2/2}$ le pied de la caractéristique.

Pour tracer les caractéristiques on remarque que

$$x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x}e^{\hat{t}^2/2}e^{-t^2/2} = \xi_{\hat{t}, \hat{x}}e^{-t^2/2}$$

ainsi on a les courbes suivantes



Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t)\partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) - t\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)\partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = t \end{aligned}$$

donc

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \frac{\hat{t}^2}{2} + W_{\hat{t}, \hat{x}}(0)$$

ainsi

$$\begin{aligned} w(\hat{t}, \hat{x}) &= W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \frac{\hat{t}^2}{2} + W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \frac{\hat{t}^2}{2} + w(0, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) \\ &= \frac{\hat{t}^2}{2} + w_{\text{init}}(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) = \frac{\hat{t}^2}{2} + w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) = \frac{\hat{t}^2}{2} + w_{\text{init}}\left(\hat{x}e^{\hat{t}^2/2}\right). \\ &= \frac{\hat{t}^2}{2} + \hat{x}^2 e^{\hat{t}^2}. \end{aligned}$$

Exercice 4.5 (Cas non linéaire)

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & \text{avec } q(u) = e^u, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Calculez l'unique solution faible entropique $u(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ en utilisant la méthode des caractéristiques pour les données initiales suivantes (attention à la position de la discontinuité initiale) :

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases} & \textcircled{2} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 2 & \text{si } x > 1, \end{cases} & \textcircled{3} \quad g(x) = \begin{cases} \ln(3) & \text{si } x < 0, \\ \ln(2) & \text{si } 0 < x < 1, \\ \ln(1) & \text{si } x > 1, \end{cases} \end{array}$$

Correction

On a

$$q(u) = e^u \text{ (convexe)}, \quad q'(u) = e^u, \quad q'(u) = \frac{x - x_0}{t - t_0} \text{ ssi } u = \ln\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right).$$

Considérons la condition initiale

$$g(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < x_0, \\ u_R, & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + \exp(g(\xi))t = \begin{cases} \xi + e^{u_L}t, & \xi < x_0, \\ \xi + e^{u_R}t, & \xi > x_0. \end{cases}$$

Cas $u_L < u_R$: la donnée initiale du problème de Riemann a un saut croissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique est la solution avec l'onde de raréfaction :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x \leq x_0 + e^{u_L}t, \\ \ln\left(\frac{x - x_0}{t}\right), & \text{si } x_0 + e^{u_L}t < x < x_0 + e^{u_R}t, \\ u_R, & \text{si } x \geq x_0 + e^{u_R}t. \end{cases}$$

Notons que la solution est toujours bien définie car dans la détente est définie pour $x \geq x_0 + e^{u_L}t > x_0$.

Cas $u_L = u_R$: la condition initiale est continue et constante, la solution entropique est la solution constante.

Cas $u_L > u_R$: la donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(x_0, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{e^{u_R} - e^{u_L}}{u_R - u_L}$$

avec la donnée initiale $s(0) = x_0$. On trouve donc $x = s(t) = x_0 + \frac{e^{u_R} - e^{u_L}}{u_R - u_L} t$ ainsi

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < s(t), \\ u_R, & \text{si } x > s(t). \end{cases}$$

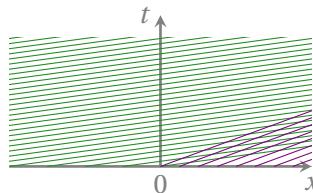


Cas 1. Considérons la donnée initiale

$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} 2, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donc

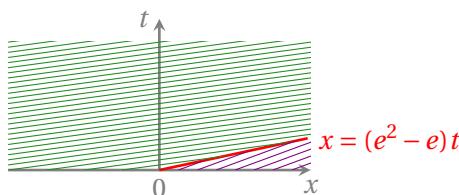
$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi)) t = \xi + \exp(g(\xi)) t = \begin{cases} \xi + e^2 t, & \xi < 0, \\ \xi + e t, & \xi > 0. \end{cases}$$



La donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(x, t) = (0, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{e^{u_R} - e^{u_L}}{u_R - u_L} = e^2 - e$$

avec la donnée initiale $s(0) = 0$. On trouve donc $x = s(t) = (e^2 - e)t$.



La solution est donc

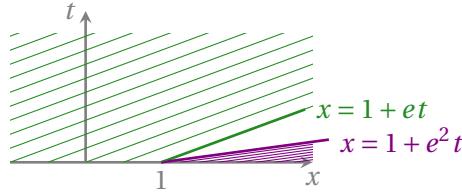
$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & x < (e^2 - e)t, \\ 1, & x > (e^2 - e)t. \end{cases}$$

Cas 2. Considérons la donnée initiale

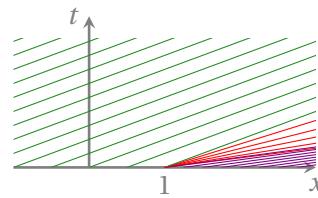
$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1, \\ 2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est cette fois-ci

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + \exp(g(\xi))t = \begin{cases} \xi + et, & \xi < 1, \\ \xi + e^2 t, & \xi > 1. \end{cases}$$



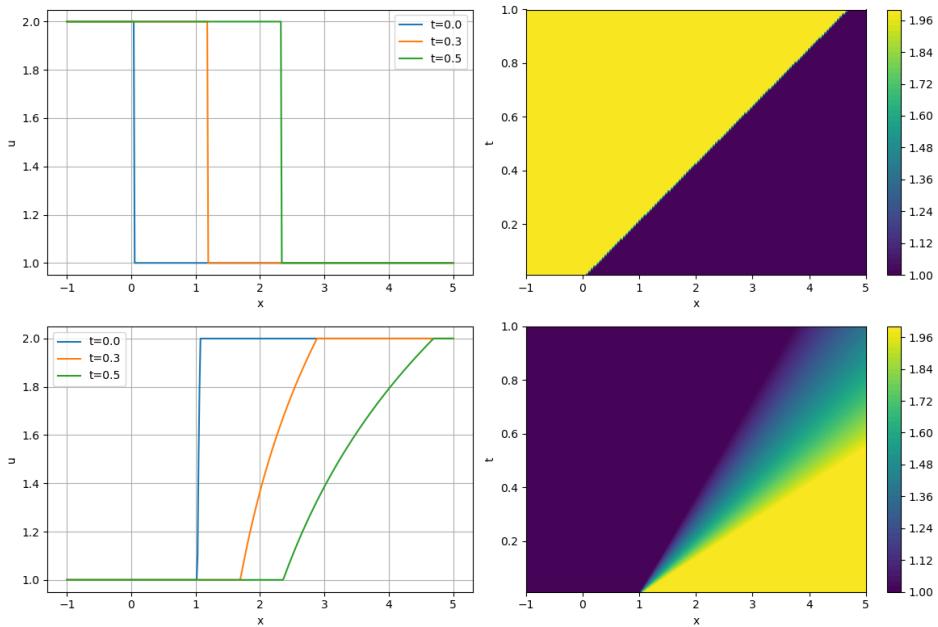
Pour $\xi = 1$ on a les deux caractéristiques d'équation $x = 1 + et$ et $x = 1 + e^2 t$ qui délimitent une zone qui n'est pas rejointe par des caractéristiques. En effet, la donnée initiale du problème de Riemann a un saut croissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique est une solution régulière qui présente une onde de raréfaction qui part en $(x, t) = (1, 0)$. Dans la raréfaction on a $q'(u) = \frac{x-1}{t}$. Comme $q'(u) = e^u$ alors $u(t, x) = \ln\left(\frac{x-1}{t}\right)$.



La solution est donc

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 + et, \\ \ln\left(\frac{x-1}{t}\right), & 1 + et < x < 1 + e^2 t \\ 2, & x \geq 1 + e^2 t. \end{cases}$$

Notons que la solution est toujours bien définie car dans la détente on a toujours $x > 1$.



Cas 3. Double problème de Riemann : considérons la donnée initiale

$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} u_L \stackrel{\text{def}}{=} \ln(3) \text{ si } x < 0, \\ u_M \stackrel{\text{def}}{=} \ln(2) \text{ si } 0 < x < 1, \\ u_R \stackrel{\text{def}}{=} \ln(1) \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + \exp(g(\xi))t = \begin{cases} \xi + 3t, & \xi < 0, \\ \xi + 2t, & \text{si } 0 < \xi < 1, \\ \xi + t, & \xi > 0. \end{cases}$$

Au voisinage de $x = 0$ la donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(x, t) = (0, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s_1(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'_1(t) = \frac{q(u_M) - q(u_L)}{u_M - u_L} = \frac{e^{u_M} - e^{u_L}}{u_M - u_L} = \frac{2-3}{\ln(2) - \ln(3)} = \frac{1}{\ln(3/2)} \\ s_1(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow s_1(t) = \frac{1}{\ln(3/2)}t.$$

Au voisinage de $x = 1$ la donnée initiale du problème de Riemann a encore un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(x, t) = (1, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s_2(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'_2(t) = \frac{q(u_R) - q(u_M)}{u_R - u_M} = \frac{e^{u_R} - e^{u_M}}{u_R - u_M} = \frac{1-2}{\ln(1) - \ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \\ s_2(0) = 1 \end{cases} \rightsquigarrow s_2(t) = 1 + \frac{1}{\ln(2)}t.$$

Les deux chocs s'intersectent en (t^*, x^*) :

$$t^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\frac{1}{\ln(3/2)} - \frac{1}{\ln(2)}} = \frac{\ln(2)\ln(3/2)}{\ln(2) - \ln(3/2)} = \frac{\ln(2)\ln(3/2)}{\ln(4/3)}, \quad x^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(2)}{\ln(4/3)}.$$

En résumé, pour $t \in [0, t^*]$, la solution s'écrit

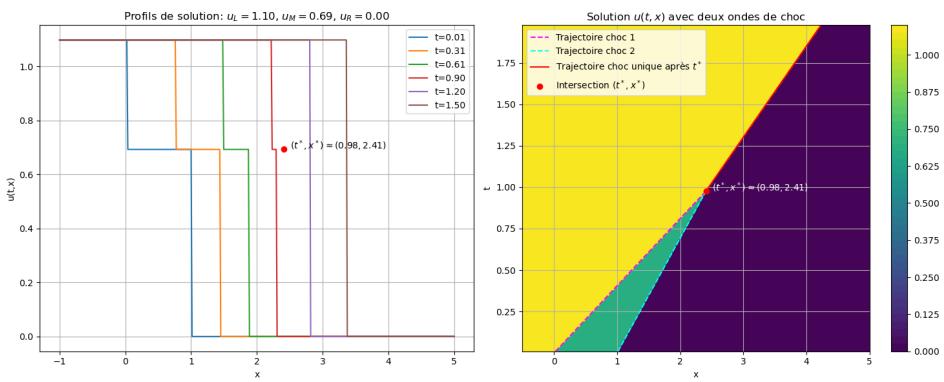
$$u(t, x) = \begin{cases} \ln(3), & x < s_1(t), \\ \ln(2), & s_1(t) < x < s_2(t), \\ 0, & x > s_2(t); \end{cases}$$

pour $t \geq t^*$, la solution s'écrit

$$u(t, x) = \begin{cases} \ln(3), & x < s_3(t), \\ 0, & x > s_3(t), \end{cases}$$

avec $s_3(t)$ solution de

$$\begin{cases} s'_3(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{e^{u_R} - e^{u_L}}{u_R - u_L} = \frac{3-1}{\ln(3)} = \frac{2}{\ln(3)} \\ s_3(t^*) = x^* \end{cases} \rightsquigarrow s_3(t) = x^* + \frac{2}{\ln(3)}(t - t^*).$$



4.4. Contrôle Continu 2025

Exercice 4.6 (Équation linéaire)

Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t w + tx \partial_x w = x, & t > 0, \\ w(t=0, x) = \sin(x). \end{cases}$$

Suggestion : les solutions de l'EDO $y'(t) = ty(t)$ sont de la forme $y(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$.

Correction

Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une particule située en \hat{x} à l'instant \hat{t} . La courbe caractéristique $(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))$ vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = t \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t), & t > 0, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \hat{x}. \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, dont la solution explicite est

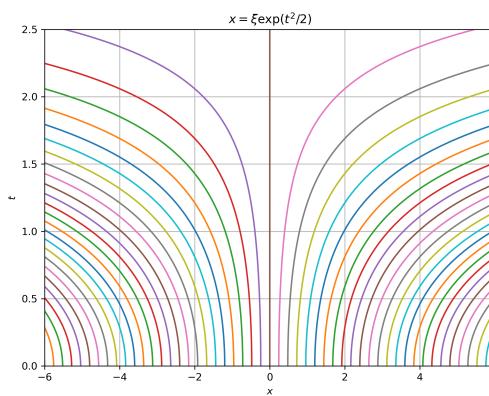
$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x} e^{(t^2 - \hat{t}^2)/2}.$$

On note $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \hat{x} e^{-\hat{t}^2/2}$ le pied de la caractéristique.

Pour visualiser l'évolution des caractéristiques, on observe que

$$x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x} e^{-\hat{t}^2/2} e^{t^2/2} = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} e^{t^2/2},$$

On trace alors les courbes paramétrées par ξ d'équation $x = \xi e^{t^2/2}$, soit encore la courbe $x = 0$ et les courbes $t = \pm \sqrt{2 \ln(\frac{x}{\xi})}$:



Maintenant, définissons

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)).$$

Le long de la caractéristique, la dérivée totale de $W_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ vaut

$$\begin{aligned} W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + t \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} e^{t^2/2} \end{aligned}$$

Si on intègre entre 0 et t on trouve

$$\int_0^t W'_{\hat{t}, \hat{x}}(s) \, ds = \int_0^t \xi_{\hat{t}, \hat{x}} e^{s^2/2} \, ds$$

ce qui donne

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \int_0^t e^{s^2/2} \, ds + W_{\hat{t}, \hat{x}}(0).$$

Finalement, on évalue $W_{\hat{t}, \hat{x}}$ en \hat{t} et on obtient

$$w(\hat{t}, \hat{x}) = W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \int_0^{\hat{t}} e^{s^2/2} \, ds + w(0, \xi_{\hat{t}, \hat{x}}) = \hat{x} e^{-\hat{t}^2/2} \int_0^{\hat{t}} e^{s^2/2} \, ds + \sin(\hat{x} e^{-\hat{t}^2/2}).$$

Ce résultat étant valable pour tout $\hat{t} \geq 0$ et pour tout $\hat{x} \in \mathbb{R}$, on conclut que

$$w(t, x) = x e^{-t^2/2} \int_0^t e^{s^2/2} \, ds + \sin(x e^{-t^2/2}).$$

Remarque : il n'existe pas de primitive élémentaire pour $e^{s^2/2}$. Autrement dit, on ne peut pas l'exprimer avec des fonctions standards (polynômes, exponentielles, logarithmes, trigonométriques, etc.).

Exercice 4.7 (Équation non linéaire)

On considère l'équation de Burgers $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$ avec la condition initiale suivante

$$u_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Considérons les trois fonctions

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < t/2, \\ 1 & \text{si } x > t/2, \end{cases} \quad u_2(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < t, \\ 1 & \text{si } x > t, \end{cases} \quad u_3(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x < t \\ 1 & \text{si } x > t. \end{cases}$$

Pour chaque fonction indiquer si c'est une solution faible, faible entropique, forte.

Correction

1. Solution u_1

- La fonction u_1 est **constante par morceaux** et possède une discontinuité.
- Les deux parties constantes satisfont trivialement l'EDP.
- La discontinuité se propage à la vitesse $\frac{1}{2}$ ce qui est conforme à la **relation de Rankine–Hugoniot** :

$$s'(t) = \frac{q(1) - q(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

∴ u_1 est donc une **solution faible**.

La discontinuité n'est **pas entropique**, car la condition de Lax impose

$$q'(u_R) < s'(t) < q'(u_L).$$

Or, pour $q(u) = u^2/2$, on a $q'(u) = u$, donc $q'(u_R) = 1$ et $q'(u_L) = 0$.

2. Solution u_2

- La fonction u_2 est également **constante par morceaux** et discontinue.
- Les deux parties constantes satisfont trivialement l'EDP.
- La discontinuité se propage à la vitesse 1. Cette vitesse **ne respecte pas** la relation de Rankine–Hugoniot.

$\rightsquigarrow u_2$ n'est **pas une solution faible**.

3. Solution u_3

- La fonction u_3 est de classe \mathcal{C}^0 (continue).
- Les deux parties constantes satisfont trivialement l'EDP.
- Pour $0 < x < t$, on a :

$$\partial_t u_3 + \partial_x q(u_3) = \partial_t \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{x}{t} \partial_x \left(\frac{x}{t} \right) = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2} = 0.$$

$\rightsquigarrow u_3$ est une **solution forte**.

Exercice 4.8 (Équation non linéaire, double problème de Riemann)

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{3} u(4-u) \right) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 3, & 0 < x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Tracer les caractéristiques et en déduire la solution.

Suggestion :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x) \quad \rightsquigarrow \quad y(x) = C e^{-A(x)} + B(x) e^{-A(x)}$$

avec $A(x)$ une primitive de $\frac{b(x)}{a(x)}$ et $B(x)$ une primitive de $\frac{g(x)}{a(x)} e^{A(x)}$.

Correction

On étudie l'équation de conservation

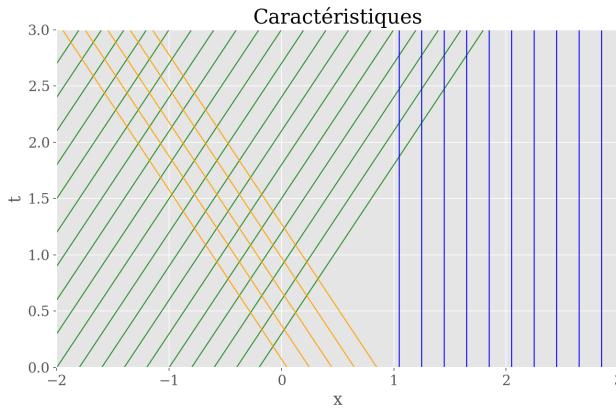
$$\partial_t u + \partial_x (q(u)) = 0 \quad \text{avec} \quad q(u) = \frac{1}{3} u(4-u), \quad q'(u) = \frac{2}{3}(2-u), \quad q''(u) = -\frac{2}{3} < 0,$$

donc le flux est **concave**.

Caractéristiques paramétrées par ξ :

On aura un choc de pied ($t = 0, x = x_0 = 0$) et une détente de pied ($t = 0, x = x_1 = 1$).

$$\chi(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \begin{cases} \xi + q'(1)t = \xi + \frac{2}{3}t, & \xi < 0, \\ \xi + q'(3)t = \xi - \frac{2}{3}t, & 0 < \xi < 1, \\ \xi + q'(2)t = \xi, & \xi > 1. \end{cases}$$



Étude des discontinuités initiales

- De $u_L = 1$ à $u_M = 3$ en $x = x_0 = 0$:

Saut croissant et flux concave \Rightarrow onde de choc.

Vitesse du choc (condition de Rankine–Hugoniot) :

$$s'_1(t) = \frac{q(u_M) - q(u_L)}{u_M - u_L} = \frac{q(3) - q(1)}{3 - 1} = \frac{1 - 1}{2} = 0,$$

avec $s_1(0) = x_0 = 0$ donc $s_1(t) \equiv 0$: choc stationnaire.

- De $u_M = 3$ à $u_R = 2$ en $x = x_1 = 1$:

Saut décroissant et flux concave \Rightarrow onde de raréfaction.

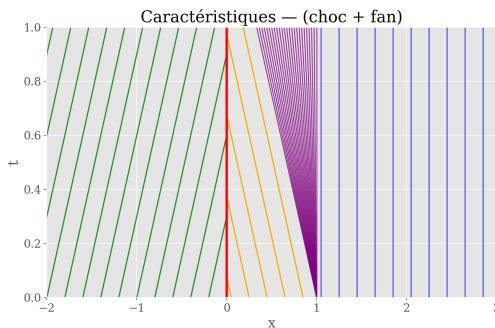
La raréfaction occupe la région

$$x \in [x_1 + q'(u_M)t, x_1 + q'(u_R)t] = [1 + q'(3)t, 1 + q'(2)t] = [1 - \frac{2}{3}t, 1].$$

Dans cette zone on a $q'(u) = \frac{x-1}{t}$, donc

$$u(t, x) = 2 - \frac{3}{2} \frac{x-1}{t}.$$

Conclusion sur les discontinuités initiales



$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 3, & 0 < x < 1 - \frac{2}{3}t, \\ 2 - \frac{3}{2} \frac{x-1}{t}, & 1 - \frac{2}{3}t < x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

À $t = \frac{3}{2}$, la borne gauche de la rarefaction (d'équation $x = 1 - \frac{2}{3}t$) atteint la caractéristique $x = 0$: interaction avec le choc stationnaire.

Étude des discontinuités après interaction : de $u_L = 1$ à u_{rar} .

Soit $s_2(t)$ la position du choc de pied ($t = \frac{3}{2}, x = 0$). À droite du choc, l'état est

$$u_{\text{rar}}(t) = 2 - \frac{3}{2} \frac{s(t) - 1}{t}.$$

La condition de Rankine–Hugoniot devient

$$s'_2(t) = \frac{q(3) - q(u_{\text{rar}}(t))}{3 - u_{\text{rar}}(t)} = \frac{(u_{\text{rar}}(t) - 3)(u_{\text{rar}}(t) - 1)}{3(3 - u_{\text{rar}}(t))} = \frac{1 - u_{\text{rar}}(t)}{3} = \frac{1}{2} \frac{s(t) - 1}{t} + \frac{1}{3}$$

ce qui donne l'EDO

$$s'_2(t) - \frac{1}{2t} s_2(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2t}.$$

Avec $s_2(\frac{3}{2}) = 0$, on obtient la solution explicite

$$s_2(t) = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \sqrt{t} + \frac{2}{3} t + 1, \quad t \geq \frac{3}{2}.$$

Explication : il s'agit d'une EDO linéaire du premier ordre de la forme $2xy'(x) - y(x) = g(x)$. On a

$$a(x) = 2x, \quad b(x) = -1, \quad g(x) = \frac{2x}{3} - 1$$

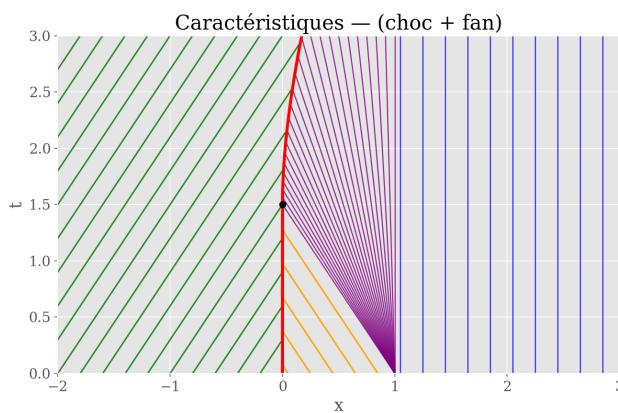
donc

$$A(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(x)}{2} = -\ln(\sqrt{x}), \quad B(x) = \int \frac{g(x)}{a(x)} e^{A(x)} dx = \int \frac{\frac{2x}{3} - 1}{2x} e^{-\ln(\sqrt{x})} dx = \int \frac{2}{3} x^{-1/2} - \frac{1}{2} x^{-3/2} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ainsi

$$y(x) = C e^{-A(x)} + B(x) e^{-A(x)} = C \sqrt{x} + \frac{2}{3} x + 1$$

Avec $y(3/2) = 0$ on trouve $C = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$.



Pour $t \geq \frac{3}{2}$

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < -\frac{2\sqrt{6}}{3} \sqrt{t} + \frac{2}{3} t + 1, \\ 2 - \frac{3}{2} \frac{x-1}{t}, & -\frac{2\sqrt{6}}{3} \sqrt{t} + \frac{2}{3} t + 1 < x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

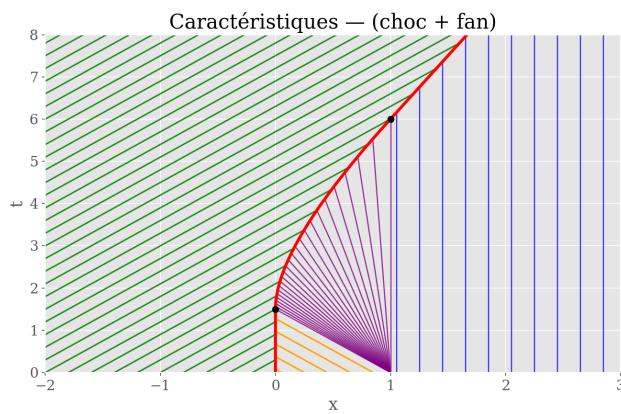
À $t = 6$, le choc atteint la caractéristique $x = 1$: un nouveau choc entre deux états constants.

Étude de la discontinuité après la deuxième interaction : de $u_L = 1$ à $u_R = 2$.

Soit $s_3(t)$ la position du choc de pied ($t = 6, x = 1$). La condition de Rankine–Hugoniot devient

$$s'_3(t) = \frac{q(2) - q(1)}{2 - 1} = \frac{1}{3}$$

avec $s_3(6) = 1$, on obtient $s_3(t) = \frac{1}{3}(t - 6) + 1$.

Pour $t \geq 6$

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{3}(t-6) + 1 \\ 2, & x > \frac{1}{3}(t-6) + 1. \end{cases}$$

Conclusion

- Si $t < \frac{3}{2}$

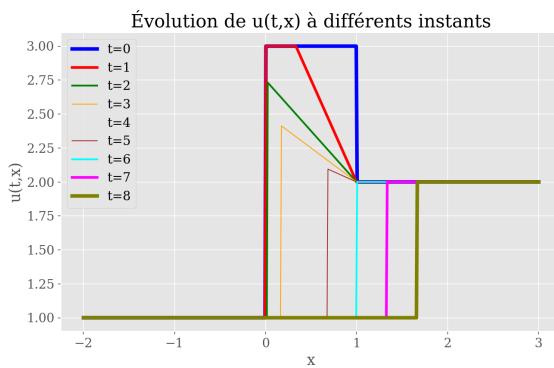
$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 3, & 0 < x < 1 - \frac{2}{3}t, \\ 2 - \frac{3}{2} \frac{x-1}{t}, & 1 - \frac{2}{3}t < x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

- Si $\frac{3}{2} \leq t < 6$

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < -\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{t} + \frac{2}{3}t + 1, \\ 2 - \frac{3}{2} \frac{x-1}{t}, & -\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{t} + \frac{2}{3}t + 1 < x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

- Si $t \geq 6$

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{3}(t-6) + 1 \\ 2, & x > \frac{1}{3}(t-6) + 1. \end{cases}$$



Deuxième partie

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET NON-LINÉAIRES

5.

Systèmes hyperboliques de lois de conservations : théorie mathématique

Dans ce cours, nous ne considérons que des systèmes de lois de conservation en une dimension d'espace :

$$\partial_t \mathbf{W}(t, x) + \partial_x \mathbf{q}(\mathbf{W}(t, x)) = \mathbf{0}.$$

Inconnues L'inconnue $\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est un vecteur à p composantes représentant les quantités conservées (variables d'état). Par exemple, dans un problème de dynamique des fluides, il s'agira de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Plus précisément, $W_j(t, x)$, la j -ème composante de \mathbf{W} , est la fonction de densité pour la j -ème variable d'état, avec l'interprétation suivante : $\int_{x_1}^{x_2} W_j(t, x) dx$ est la quantité totale de cette variable d'état qui se trouve dans l'intervalle $[x_1; x_2]$ à l'instant t . Les variables d'état W_j changeront généralement au fur et à mesure que le temps évolue. Le fait que les composantes W_j soient conservées signifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} W_j(t, x) dx$ doit être constant à chaque instant t .

Flux Le flux de la j -ème composante est donné par une fonction $q_j(\mathbf{W}(t, x))$. La fonction $\mathbf{q}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ dont la j -ème composante est $q_j(\mathbf{W})$ est appelée fonction de flux pour le système de lois de conservation. La principale hypothèse sous-jacente est que la connaissance de la valeur de $\mathbf{W}(t, x)$ à un moment donné nous permet de déterminer le taux d'écoulement, ou flux, de chaque variable d'état à (t, x) . Généralement, les fonctions q_j sont des fonctions non linéaires de \mathbf{W} , ce qui conduit à des systèmes d'EDP non linéaires. En général, il n'est pas possible de dériver des solutions exactes à ces équations, d'où la nécessité de concevoir et d'étudier des méthodes numériques pour leur résolution approchée.

Condition initiale L'EDP doit être complétée par des conditions initiales (et éventuellement des conditions aux limites si le domaine spatial est borné). Le problème le plus simple est le problème de valeur initiale pur, ou problème de Cauchy, dans lequel l'EDP est valable pour $-\infty < x < +\infty$ et $t \geq 0$. Dans ce cas, nous devons spécifier uniquement les conditions initiales :

$$\mathbf{W}(0, x) = \mathbf{W}_{\text{init}}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La résolution d'un problème de Riemann dans le cas des systèmes hyperboliques utilise conjointement les différents outils des chapitres précédents, permettant de caractériser les ondes de chocs et les détentes associées à chaque champ vraiment non-linéaire, ainsi que les discontinuités de contact associées aux champs linéairement dégénérés (\approx transport).

5.1. Introduction

Pour $p \geq 1$ on cherche l'unique fonction

$$\begin{aligned}\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \mathbf{W}(t, x)\end{aligned}$$

solution (faible entropique) du système d'EDPs (écrit sous forme conservative)

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x (\mathbf{q}(\mathbf{W})) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{W}(0, x) = \mathbf{W}_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.1)$$

avec le flux

$$\begin{aligned}\mathbf{q}: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{W} &\mapsto \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} q_1(\mathbf{W}) \\ q_2(\mathbf{W}) \\ \vdots \\ q_p(\mathbf{W}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pour des solutions régulières on peut réécrire le système sous différentes formes non conservative, typiquement la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

où

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}_{\mathbf{W}}(\mathbf{q}(\mathbf{W})) = \left[\frac{\partial q_i}{\partial w_j} \right]_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial_{w_1} q_1 & \partial_{w_2} q_1 & \dots & \partial_{w_p} q_1 \\ \partial_{w_1} q_2 & \partial_{w_2} q_2 & \dots & \partial_{w_p} q_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_{w_1} q_p & \partial_{w_2} q_p & \dots & \partial_{w_p} q_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Hyperbolicité Considérons la matrice jacobienne $\mathbf{q}'(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{q})$ de la fonction flux \mathbf{q} . C'est une matrice de taille $p \times p$. Nous étudierons les problèmes pour lesquels cette matrice jacobienne a la propriété suivante : pour chaque valeur de \mathbf{W} ,

1. ses valeurs propres sont réelles;
2. la matrice est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble complet de p vecteurs propres linéairement indépendants.

Un système qui satisfait cette condition est dit hyperbolique.

 **EXEMPLE 5.1 (ÉQUATIONS DE ONDES ET ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN : $p = 2$, FLUX LINÉAIRE)** Considérons le cas d'un système de $p = 2$ EDP avec un flux linéaire $\mathbf{q}(\mathbf{W}) = \mathbb{A}\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ avec $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ constante :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A} \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

Les équations de ondes et les équations de Cauchy-Riemann en sont un exemple.

- Équation des ondes :

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On verra que ce système est hyperbolique.

Notons que cela équivaut à

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x w_2 = 0 \\ \partial_t w_2 + \partial_x w_1 = 0 \end{cases}$$

Si on dérive les deux équations par rapport à t (resp. à x) on obtient les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2 = 0, \\ \partial_{tt} w_2 + \partial_{tx} w_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2 = 0 \\ \partial_{xt} w_2 + \partial_{xx} w_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $(\partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2) - (\partial_{xt} w_2 + \partial_{xx} w_1) = 0$ et $(\partial_{tt} w_2 + \partial_{tx} w_1) - (\partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 - \partial_{xx} w_1 = 0 \\ \partial_{tt} w_2 - \partial_{xx} w_2 = 0 \end{cases}$$

- Équation de Cauchy-Riemann :

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On verra que ce système est non hyperbolique.

Notons que cela équivaut à

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x w_2 = 0 \\ \partial_t w_2 - \partial_x w_1 = 0 \end{cases}$$

Si on dérive les deux équations par rapport à t (resp. à x) on obtient les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2 = 0 \\ \partial_{tt} w_2 - \partial_{tx} w_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2 = 0 \\ \partial_{xt} w_2 - \partial_{xx} w_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $(\partial_{tt} w_1 + \partial_{tx} w_2) - (\partial_{xt} w_2 - \partial_{xx} w_1) = 0$ et $(\partial_{tt} w_2 - \partial_{tx} w_1) + (\partial_{xt} w_1 + \partial_{xx} w_2) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_1 + \partial_{xx} w_1 = 0 \\ \partial_{tt} w_2 + \partial_{xx} w_2 = 0 \end{cases}$$

 EXEMPLE 5.2 (LE P-SYSTÈME ET LE SYSTÈME DE SAINT-VENANT : $p = 2$, FLUX NON-LINÉAIRE) Considérons le cas de $p = 2$ EDP avec un flux non-linéaire :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x (\mathbf{q}(\mathbf{W})) = \mathbf{0}$$

soit encore

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} q_1(w_1, w_2) \\ q_2(w_1, w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un exemple typique de ce type de système est le p -système qui décrit la dynamique des gaz isentropiques en coordonnées lagrangiennes. On note $\tau > 0$ le volume spécifique et u la vitesse; soit $v \mapsto p(v) > 0$ la pression du gaz. Les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement donnent le système :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} -u \\ p(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple typique est le système de Saint-Venant qui décrit un écoulement d'eau sous l'hypothèse de faible profondeur. On note $h \geq 0$ la hauteur d'eau et u la vitesse; soit $g > 0$ la constante de gravité. Le système s'écrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 EXEMPLE 5.3 (LE SYSTÈME D'EULER : $p = 3$, FLUX NON-LINÉAIRE) Considérons le cas de $p = 3$ EDP avec un

flux non-linéaire :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x (\mathbf{q}(\mathbf{W})) = \mathbf{0}$$

soit encore

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} q_1(w_1, w_2, w_3) \\ q_2(w_1, w_2, w_3) \\ q_3(w_1, w_2, w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'exemple le plus connu de ce type de système est celui qui décrit la dynamique des gaz (équations d'Euler).

On note $\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho E)$ où ρ est la densité spécifique, u la vitesse et $E = \frac{1}{2}u^2 + e$ l'énergie totale, e étant l'énergie spécifique. La conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale nous donnent le système suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p(\rho, e) \\ (\rho E + p(\rho, e))u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.2. Hyperbolicité d'un système

Introduisons maintenant la notion de système de lois de conservation hyperbolique. Pourquoi l'hyperbolicité ? Un problème est bien posé (au sens de Hadamard) s'il admet une unique solution qui dépend continûment des données. Il se trouve que l'hyperbolicité est une condition nécessaire (pas suffisante) pour que le problème de Cauchy d'un système de lois de conservation soit bien posé.

5.1 Définition

- On dit que le système (5.1) est **hyperbolique** si la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{q}(\mathbf{W})) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est diagonalisable sur \mathbb{R} (autrement dit, elle admet p valeurs propres réelles, comptés avec leur multiplicité, et p vecteurs propres). Nous noterons ces valeurs propres par ordre croissant :

$$\lambda_1(\mathbf{W}) \leq \lambda_2(\mathbf{W}) \leq \dots \leq \lambda_p(\mathbf{W}).$$

- Si les valeurs propres sont tous distinctes, on dit que le système est **strictement hyperbolique**.

La notion d'hyperbolicité est invariante par changement de variables.

Dans le cas scalaire ($p = 1$) c'est toujours évident car $\mathbb{A}(\mathbf{W}) = q'(u)$.

Dans le cas d'un système il faut étudier la matrice \mathbb{A} . Par exemple, le système de Cauchy-Riemann est un exemple de système non hyperbolique, le système des ondes est un exemple de système strictement hyperbolique.



EXEMPLE 5.4 (ÉQUATION DES ONDES) Considérons le système de $p = 2$ équations

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $\mathbf{q}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$ ainsi $\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et le système se réécrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mathbb{B} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbb{B} admet les deux valeurs propres $\lambda_1 = -1 < \lambda_2 = 1$: il est strictement hyperbolique. On peut prendre comme vecteurs propres à droite respectivement $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et on vérifie qu'on a bien $\mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$.

 EXEMPLE 5.5 (SYSTÈME DE CAUCHY-RIEMANN) Considérons le système de $p = 2$ équations

$$\partial_y \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\mathbf{q}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$ ainsi $\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et le système se réécrit

$$\partial_y \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mathbb{B} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbb{B} admet les deux valeurs propres complexes $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$: le système n'est donc pas hyperbolique.

Forme conservative d'un système Dans le cas scalaire ($p = 1$), toute forme non-conservative admet une forme conservative car il suffit de définir

$$q(w) = \int q'(\sigma) \, d\sigma.$$

Dans le cas général ($p \geq 2$), ce n'est pas toujours possible. Par exemple, considérons le système de $p = 2$ équations en $d = 1$ dimensions d'espace suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S'il existe une forme conservative alors il existe une fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{q}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (w_1, w_2) &\mapsto \begin{pmatrix} q_1(w_1, w_2) \\ q_2(w_1, w_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \nabla_{\mathbf{W}} \begin{pmatrix} q_1(w_1, w_2) \\ q_2(w_1, w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{w_1} q_1(w_1, w_2) & \partial_{w_2} q_1(w_1, w_2) \\ \partial_{w_1} q_2(w_1, w_2) & \partial_{w_2} q_2(w_1, w_2) \end{pmatrix}.$$

Les coefficients a , b , c et d sont alors liés par les deux relations suivantes

$$\begin{cases} \partial_{w_1 w_2} q_1 = \partial_{w_2} a = \partial_{w_1} b, \\ \partial_{w_1 w_2} q_2 = \partial_{w_2} c = \partial_{w_1} d. \end{cases}$$

5.3. Rappels : cas scalaire (i.e. $p = 1$), flux linéaire et flux non-linéaire

On a étudié la résolution de problèmes de Riemann associés aux équations en une dimension d'espace. Plus précisément, nous avons étudié les fonctions $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient (au sens faible) l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U} + \partial_x f(\mathcal{U}) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathcal{U}(0, x) = \begin{cases} \mathcal{U}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathcal{U}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

avec le flux $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

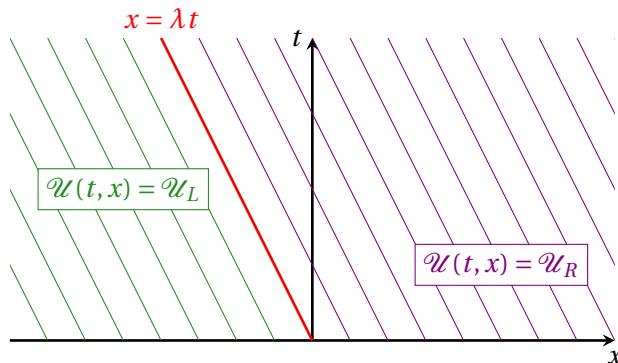
Nous avons considéré deux cas.

- Si le flux est linéaire, i.e. si $f(\mathcal{U}) = c\mathcal{U}$ avec $c \in \mathbb{R}$ constante, la solution du problème de Riemann est une discontinuité (de contact) qui avance à la vitesse $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} c = f'(\mathcal{U}) = f'(\mathcal{U}_L) = f'(\mathcal{U}_R)$:

$$\mathcal{U}(t, x) = \mathcal{U}(0, x - \lambda t) = \begin{cases} \mathcal{U}_L & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda, \\ \mathcal{U}_R & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda. \end{cases}$$

Notons que c'est une solution faible qui vérifie la relation de Rankine-Hugoniot car

$$s'(t) = \frac{f(\mathcal{U}_R) - f(\mathcal{U}_L)}{\mathcal{U}_R - \mathcal{U}_L} = c;$$



- Si le flux est non-linéaire, la solution du problème de Riemann est soit un choc, soit une détente. On calcule d'abord la vitesse d'une solution faible discontinue par la relation de saut de Rankine-Hugoniot :

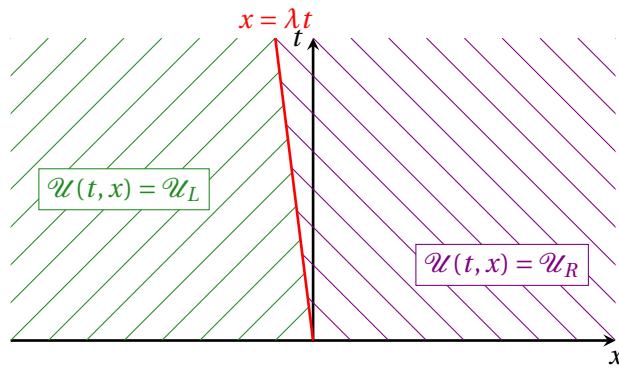
$$s'(t) = \frac{f(\mathcal{U}_R) - f(\mathcal{U}_L)}{\mathcal{U}_R - \mathcal{U}_L};$$

- si la solution faible ainsi obtenue est entropique, i.e. si on a la relation de Lax

$$f'(\mathcal{U}_R) < s'(t) < f'(\mathcal{U}_L)$$

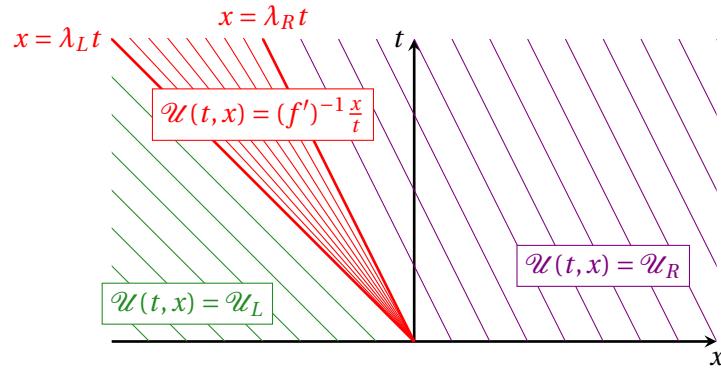
alors la solution entropique est un choc qui avance à la vitesse $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} s'(t)$:

$$\mathcal{U}(t, x) = \begin{cases} \mathcal{U}_L & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda, \\ \mathcal{U}_R & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda; \end{cases}$$



- sinon, la solution entropique est une détente comprise entre les caractéristiques de pente $\lambda_L \stackrel{\text{def}}{=} f'(\mathcal{U}_L)$ et $\lambda_R \stackrel{\text{def}}{=} f'(\mathcal{U}_R)$:

$$\mathcal{U}(t, x) = \begin{cases} \mathcal{U}_L & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_L, \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } \lambda_L < \frac{x}{t} < \lambda_R, \\ \mathcal{U}_R & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_R. \end{cases}$$



5.4. Cas d'un système ($p > 1$), flux linéaire

On s'intéresse à la résolution de problèmes de Riemann associés aux systèmes hyperboliques linéaires en une dimension d'espace. Plus précisément, on cherche une fonction

$$\begin{aligned}\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \mathbf{W}(t, x)\end{aligned}$$

qui vérifie (au sens faible) le système d'EDPs (dit "système de Friedrichs")

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{W}(0, x) = \mathbf{W}^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned}\mathbf{q}: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{W} &\mapsto \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \mathbb{B}\mathbf{W}\end{aligned}$$

Comme \mathbb{B} est constante, on peut réécrire ce système sous la forme linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B} \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}.$$

On suppose que la matrice \mathbb{B} est diagonalisable avec p valeurs propres réelles¹ (le système est strictement hyperbolique) et on note

- $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ ses valeurs propres,
- $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_p$ les correspondants vecteurs propres à droites.

On note \mathbb{P} la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres et \mathbb{D} la matrice diagonale avec les valeurs propres :

$$\mathbb{P} = [\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 | \dots | \mathbf{r}_p], \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix},$$

ainsi $\mathbb{B}\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{D}$. La matrice \mathbb{P} est inversible, on peut donc définir le vecteur $\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}^{-1}\mathbf{W}$. Comme $\mathbf{W} = \mathbb{P}\mathbf{I}$, l'EDP $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B} \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$ se réécrit comme suit :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B} \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \partial_t (\mathbb{P}\mathbf{I}) + \mathbb{B} \partial_x (\mathbb{P}\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{P} \partial_t \mathbf{I} + \mathbb{B} \mathbb{P} \partial_x \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \partial_t \mathbf{I} + \mathbb{P}^{-1} \mathbb{B} \mathbb{P} \partial_x \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

ainsi, puisque $\mathbb{P}^{-1} \mathbb{B} \mathbb{P} \equiv \mathbb{D}$, le système dans la variable \mathbf{I} est diagonalisé :

$$\partial_t \mathbf{I} + \mathbb{D} \partial_x \mathbf{I} = \mathbf{0}. \tag{5.2}$$

Si on note $\mathbf{I}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}^{-1}\mathbf{W}^0$ la donnée initiale pour le problème diagonalisé, on peut alors résoudre chaque EDP de transport (*i.e.* chaque ligne de ce système) séparément pour obtenir $\mathcal{I}_k(t, x) = \mathcal{I}_k^0(x - \lambda_k t)$ puis revenir aux variables initiales \mathbf{W} .

1. On peut considérer le cas de $m < p$ valeurs propres mais toujours dans le cas hyperbolique, cependant dans ce cas la méthode de construction de la solution du problème de Riemann doit être modifiée.



EXEMPLE 5.6 (ÉQUATION DES ONDES) Considérons le système de $p = 2$ équations

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec la donnée initiale

$$\begin{pmatrix} w_1^0 \\ w_2^0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} w_{1L} \\ w_{2L} \end{pmatrix} & \text{si } x < 0, \\ \begin{pmatrix} w_{1R} \\ w_{2R} \end{pmatrix} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On a $\mathbf{q}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$ ainsi $\operatorname{div}_{\mathbf{W}} \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le système se réécrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mathbb{B} \partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbb{B} admet les deux valeurs propres $\lambda_1 = -1 < \lambda_2 = 1$ et on peut prendre comme vecteurs propres à droite respectivement $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et on vérifie qu'on a bien $\mathbb{B} = \mathbb{P} \mathbb{D} \mathbb{P}^{-1}$.

On a

$$\mathbf{I} = \mathbb{P}^{-1} \mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -w_1 + w_2 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réécrit

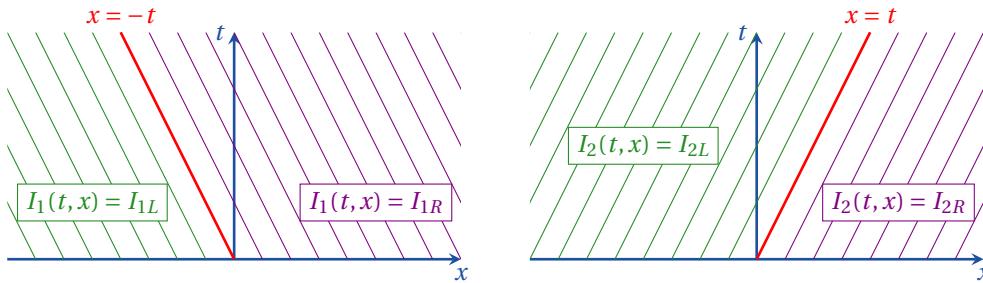
$$\partial_t \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

avec la donnée initiale

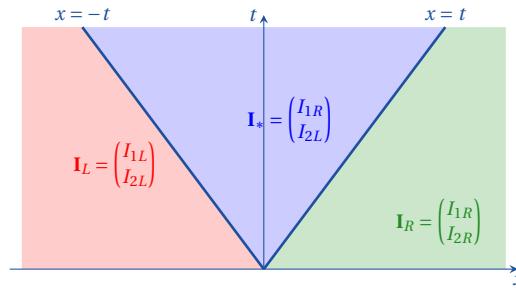
$$\begin{pmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} I_{1L} \\ I_{2L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-w_{1L} + w_{2L}) \\ \frac{1}{2}(w_{1L} + w_{2L}) \end{pmatrix} & \text{si } x < 0, \\ \begin{pmatrix} I_{1R} \\ I_{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-w_{1R} + w_{2R}) \\ \frac{1}{2}(w_{1R} + w_{2R}) \end{pmatrix} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La première équation est $\partial_t I_1 - \partial_x I_1 = 0$ dont la solution est $I_1(t, x) = I_1^0(x + t) = \begin{cases} I_{1L} & \text{si } x < -t \\ I_{1R} & \text{si } x > -t \end{cases}$.

La deuxième équation est $\partial_t I_2 + \partial_x I_2 = 0$ dont la solution est $I_2(t, x) = I_2^0(x - t) = \begin{cases} I_{2L} & \text{si } x < t \\ I_{2R} & \text{si } x > t \end{cases}$.



La solution est donc constituée de 3 états constants séparés par 2 discontinuités (de contact) :



On revient aux variables initiales :

$$\mathbf{W} = \mathbb{P}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -I_1 + I_2 \\ I_1 + I_2 \end{pmatrix}$$

- pour $x < -t$ on a

$$\mathbf{W}(t, x) = \mathbb{P}\mathbf{I}_L = \begin{pmatrix} -I_{1L} + I_{2L} \\ I_{1L} + I_{2L} \end{pmatrix} = \left(-\left(\frac{1}{2}(-w_{1L} + w_{2L})\right) + \left(\frac{1}{2}(w_{1L} + w_{2L})\right) \right) = \mathbf{W}_L$$

- pour $-t < x < t$ on a

$$\mathbf{W}(t, x) = \mathbb{P}\mathbf{I}_* = \begin{pmatrix} -I_{1R} + I_{2L} \\ I_{1R} + I_{2L} \end{pmatrix} = \left(-\left(\frac{1}{2}(-w_{1R} + w_{2R})\right) + \left(\frac{1}{2}(w_{1L} + w_{2L})\right) \right) = \left(\frac{(w_{1L} + w_{1R})}{2} + \frac{w_{2L} - w_{2R}}{2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_*$$

- pour $x > t$ on a

$$\mathbf{W}(t, x) = \mathbb{P}\mathbf{I}_R = \begin{pmatrix} -I_{1R} + I_{2R} \\ I_{1R} + I_{2R} \end{pmatrix} = \left(-\left(\frac{1}{2}(-w_{1R} + w_{2R})\right) + \left(\frac{1}{2}(w_{1R} + w_{2R})\right) \right) = \mathbf{W}_R$$

5.5. Cas d'un système ($p > 1$), flux non-linéaire

On s'intéresse à la résolution de problèmes de Riemann associés aux systèmes strictement hyperboliques non-linéaires en une dimension d'espace. Plus précisément, on cherche une fonction $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui vérifie (au sens faible entropique) le système d'EDPs

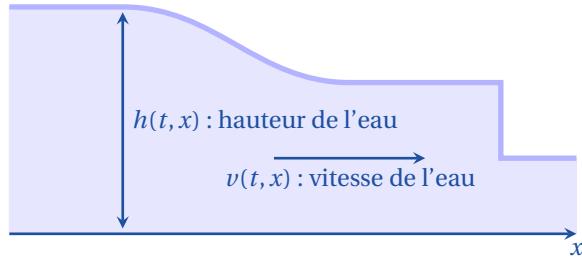
$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{q}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{V}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{V}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

Dans le cas d'un système *linéaire* de lois de conservation, les différentes ondes se propagent indépendamment les unes des autres : la solution est alors une superposition linéaire de ces ondes élémentaires. En revanche, lorsqu'il s'agit d'un système *non linéaire*, les ondes peuvent interagir entre elles de manière complexe, ce qui rend l'analyse et la résolution du problème de Riemann beaucoup plus délicates.

 **EXEMPLE 5.7 (SAINT-VENANT)** Pour illustrer ces notions, considérons le système des équations de Saint-Venant. Il s'agit d'un système de $p = 2$ équations modélisant l'écoulement d'une couche d'eau peu profonde, dans le cas unidimensionnel et sur un fond plat. On suppose que le fluide est incompressible et non visqueux, et que les effets de frottement (entre l'eau et l'air ou entre l'eau et le sol) sont négligés.

Les variables inconnues, dépendant du temps $t \geq 0$ et de la position $x \in \mathbb{R}$, sont $h(t, x) > 0$ la hauteur de la colonne d'eau et $v(t, x)$ la vitesse horizontale moyenne de l'écoulement. On note $g > 0$ la constante de gravité.

Sous ces hypothèses, l'écoulement est décrit par le système de Saint-Venant, également appelé *équations des eaux peu profondes* (*shallow water equations* en anglais) :



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x\left(hv^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5.3)$$

autrement dit

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} hv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ \frac{V_2^2}{V_1} + \frac{g}{2}V_1^2 \end{pmatrix}.$$

5.5.1. Hyperbolicité (stricte)

Pour des solutions régulières, un système de lois de conservation peut se réécrire sous forme quasi-linéaire :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

où $\mathbb{B}(\mathbf{W})$ désigne la matrice jacobienne du flux $\mathbf{q}(\mathbf{W})$.

Remarque : on peut bien sûr prendre $\mathbf{W} = \mathbf{V}$, mais cela n'est pas obligatoire : on peut choisir n'importe quel vecteur de variables \mathbf{W} . Toutefois, selon le choix effectué, la complexité des calculs peut varier de façon significative.

On suppose que le système est **strictement hyperbolique**, c'est-à-dire que, pour tout \mathbf{W} , la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{W})$ admet p valeurs propres réelles et distinctes, notées

$$\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \dots < \lambda_p(\mathbf{W}).$$



EXEMPLE 5.8 (SAINT-VENANT) Considérons à nouveau le système de Saint-Venant et écrivons-le sous une forme non conservative dans un autre jeu de variables que celles du vecteur \mathbf{V} .

Pour des solutions régulières, développons les dérivées du système (5.3) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \underline{v\partial_t h} + h\partial_t v + \underline{v\partial_x(hv)} + (hv)\partial_x v + gh\partial_x h = 0. \end{cases}$$

Ce système se réécrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t h + v\partial_x h + h\partial_x v = 0, \\ h(\partial_t v + v\partial_x v + g\partial_x h) = 0. \end{cases}$$

On en déduit la formulation quasi-linéaire suivante :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $\mathbf{W}^{\text{def}}(h, v)$, la matrice jacobienne s'écrit donc :

$$\mathbb{B}(\mathbf{W})^{\text{def}} \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix}.$$

On cherche les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de $\mathbb{B}(\mathbf{W})$, i.e. les solutions de l'équation caractéristique $\det(\mathbb{B}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbb{I}) = 0$:

$$(v - \lambda)^2 - hg = 0.$$

En ordonnant les valeurs propres de sorte que $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$, on obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W})^{\text{def}} v - \sqrt{gh} < \lambda_2(\mathbf{W})^{\text{def}} v + \sqrt{gh}.$$

Pour $h > 0$, ces valeurs propres sont réelles et distinctes : le système de Saint-Venant (5.3) est donc *strictement hyperbolique*.

À chaque valeur propre $\lambda_k(\mathbf{W})$ on associe un vecteur propre à droite $\mathbf{r}_k(\mathbf{W})$ et une vecteur propre à gauche $\mathbf{l}_k(\mathbf{W})$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{B}(\mathbf{W}) \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = \lambda_k(\mathbf{W}) \mathbf{r}_k(\mathbf{W}), \quad \mathbf{l}_k^T(\mathbf{W}) \mathbb{B}(\mathbf{W}) = \lambda_k(\mathbf{W}) \mathbf{l}_k^T(\mathbf{W}).$$

Si les vecteurs propres \mathbf{r}_k et \mathbf{l}_k sont normalisés, alors

$$\mathbf{l}_i^T(\mathbf{W}) \mathbf{r}_j(\mathbf{W}) = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Notons que si le flux \mathbf{q} est de classe \mathcal{C}^m , alors les valeurs propres λ_k ainsi que les vecteurs propres \mathbf{r}_k et \mathbf{l}_k sont de classe \mathcal{C}^{m-1} .



EXEMPLE 5.9 (SAINT-VENANT) Reprenons la matrice jacobienne

$$\mathbb{B}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà déterminé ses valeurs propres :

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = v - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2(\mathbf{W}) = v + \sqrt{gh}.$$

Cherchons maintenant une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. En résolvant $(\mathbb{B} - \lambda_k \mathbb{I}) \mathbf{r}_k = 0$, on peut par exemple choisir

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ce choix est arbitraire à une constante multiplicative près. Une autre base de vecteurs propres, plus simple et souvent utilisée, est donnée par

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, les vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sont linéairement indépendants et forment une base de \mathbb{R}^2 : ils diagonaliseront la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{W})$ selon

$$\mathbb{B}(\mathbf{W}) = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \mathbb{D}(\mathbf{W}) \mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}), \quad \mathbb{P}(\mathbf{W}) = [\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) | \mathbf{r}_2(\mathbf{W})], \quad \mathbb{D}(\mathbf{W}) = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{W}), \lambda_2(\mathbf{W})).$$

Les vecteurs propres à gauche $\mathbf{l}_k(\mathbf{W})$ satisfont

$$\mathbf{l}_k^T(\mathbf{W}) \mathbb{B}(\mathbf{W}) = \lambda_k(\mathbf{W}) \mathbf{l}_k^T(\mathbf{W}) \quad \text{ou encore} \quad \mathbb{B}^T(\mathbf{W}) \mathbf{l}_k(\mathbf{W}) = \lambda_k(\mathbf{W}) \mathbf{l}_k(\mathbf{W}).$$

On peut les choisir de manière à satisfaire la condition $\mathbf{l}_i^T(\mathbf{W}) \mathbf{r}_j(\mathbf{W}) = \delta_{ij}$. Un choix cohérent avec les vecteurs \mathbf{r}_k précédents (deuxième cas) est

$$\mathbf{l}_1^T(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{h}} & \frac{1}{2\sqrt{g}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_2^T(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{h}} & \frac{1}{2\sqrt{g}} \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathbf{l}_i^T(\mathbf{W}) \mathbf{r}_j(\mathbf{W}) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Ainsi, les matrices de passage et de diagonalisation s'écrivent

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) = [\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) \ \mathbf{r}_2(\mathbf{W})] = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} & \sqrt{h} \\ \sqrt{g} & \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1^T(\mathbf{W}) \\ \mathbf{l}_2^T(\mathbf{W}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{h}} & \frac{1}{\sqrt{g}} \\ \frac{1}{\sqrt{h}} & \frac{1}{\sqrt{g}} \end{pmatrix}.$$

Enfin, la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{W})$ admet la décomposition spectrale

$$\mathbb{B}(\mathbf{W}) = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \mathbb{D}(\mathbf{W}) \mathbb{P}(\mathbf{W})^{-1}, \quad \mathbb{D}(\mathbf{W}) = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{W}), \lambda_2(\mathbf{W})).$$

Remarque : le choix des vecteurs propres est défini à une constante multiplicative près. La normalisation utilisée ici est celle qui assure la condition $\mathbf{l}_i^T \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$, pratique pour la décomposition en champs caractéristiques ci-dessous.

5.5.2. Champs caractéristiques

Le triplet

$$(\lambda_k(\mathbf{W}), \mathbf{r}_k(\mathbf{W}), \mathbf{l}_k(\mathbf{W}))$$

est appelé k^{e} **champ caractéristique** du système.

5.2 Définition (Nature des champs caractéristiques)

Le k^{e} champ caractéristique est dit

- **vraiment non linéaire** (VNL en abrégé) si

$$\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_k(\mathbf{W})^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{W},$$

- **linéairement dégénéré** (LD en abrégé) si

$$\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_k(\mathbf{W})^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0 \quad \forall \mathbf{W}.$$

Remarque. Si la matrice \mathbb{B} est constante (cas d'un flux linéaire), alors tous les champs sont LD.

Ces notions sont invariantes par changement de variables : la classification en champs LD ou VNL ne dépend pas du jeu de variables choisi pour écrire le système.

Remarque 7 (Interprétation dans le cas scalaire) Pour $p = 1$, le système se réduit à

$$\partial_t w + \partial_x q(w) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{B}(w) \equiv \lambda(w) \equiv q'(w).$$

- Le champ est **LD** si et seulement si

$$\nabla \lambda(w)^T \cdot r(w) = 0 \quad \forall w,$$

c'est-à-dire $q''(w) = 0$ pour tout w . Cela signifie que $q'(w) = c$ constante et l'équation n'est rien d'autre que $\partial_t w + c \partial_x w = 0$, soit l'*équation de transport*.

- Le champ est **VNL** si et seulement si

$$\nabla \lambda(w)^T \cdot r(w) \neq 0 \quad \forall w,$$

c'est-à-dire $q''(w) \neq 0$ pour tout w . Cela signifie que $q'(w)$ n'est pas constant. Selon le signe de $q''(w)$, on observe alors la formation de *chocs* ou de *détentes*.



EXEMPLE 5.10 (SAINT-VENANT) Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques, calculons $(\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W})$ pour $k = 1, 2$.

On a

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = v - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2(\mathbf{W}) = v + \sqrt{gh}.$$

et, d'après le calcul direct,

$$(\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_1)^T \cdot \mathbf{r}_1 = \left(-\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{h}} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{h}} \sqrt{h} + \sqrt{g} = \frac{3}{2} \sqrt{g} \neq 0,$$

$$(\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_2)^T \cdot \mathbf{r}_2 = \left(\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{h}} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{h}} \sqrt{h} + \sqrt{g} = \frac{3}{2} \sqrt{g} \neq 0.$$

Les deux champs caractéristiques du système de Saint-Venant sont donc **vraiment non linéaires**.

Dans la suite on supposera que tous les champs caractéristiques du système considéré sont soit vraiment non-linéaires, soit linéairement dégénérés.

5.5.3. Problème de Riemann

Considérons un problème de Riemann, c'est-à-dire une condition initiale à deux états constants

$$\mathbf{V}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{V}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où \mathbf{V}_L et \mathbf{V}_R sont deux états constants proches l'un de l'autre dans \mathbb{R}^p . On cherche à résoudre le système de lois de conservation

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{q}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

sous cette donnée initiale discontinue.

Pour un système strictement hyperbolique, le problème de Riemann admet une **solution faible entropique unique**, composée **d'au plus $p + 1$ états constants \mathbf{V}_k reliés par au plus p ondes**, chacune appartenant à une famille caractéristique du système. Ces ondes peuvent être de trois natures :

- des **ondes de détente** (ou de raréfaction), correspondant à une variation continue le long d'un champ **vraiment non linéaire** (VNL);
- des **ondes de choc**, correspondant à une discontinuité satisfaisant les conditions de RANKINE–HUGONIOT et la condition d'admissibilité de LAX, également associées à un champ VNL;
- des **discontinuités de contact**, liées à un champ **linéairement dégénéré** (LD), le long desquelles les invariants de Riemann et l'entropie sont conservés.

Ainsi, pour un système strictement hyperbolique de taille p , la solution typique d'un problème de Riemann est constituée de $p + 1$ états constants

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_L, \quad \mathbf{V}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{V}_{p+1} = \mathbf{V}_R,$$

séparés par p ondes distinctes, chacune appartenant à une famille caractéristique différente. Ces ondes définissent la structure complète de la solution faible entropique, laquelle présente une dépendance autosimilaire par rapport à la variable $\zeta = x/t$.

 **EXEMPLE 5.11 (CAS DU SYSTÈME DE SAINT-VENANT)** Pour le système de Saint-Venant ($p = 2$), le problème de Riemann

$$(h, v)(0, x) = \begin{cases} (h_L, v_L), & x < 0, \\ (h_R, v_R), & x > 0, \end{cases}$$

admet une solution composée de trois états constants

$$\mathbf{V}_L = (h_L, v_L), \quad \mathbf{V}_* = (h_*, v_*), \quad \mathbf{V}_R = (h_R, v_R),$$

séparés par deux ondes appartenant respectivement aux familles caractéristiques associées aux vitesses

$$\lambda_1 = v - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = v + \sqrt{gh}.$$

Selon la configuration initiale, chaque onde peut être soit un **choc**, soit une **onde de détente** (rarefaction).

Ainsi, la solution complète du problème de Riemann pour Saint-Venant se compose de deux ondes (chocs ou détentes) séparées par un état intermédiaire (h_*, v_*) , dont les valeurs sont déterminées par la continuité des invariants de Riemann ou par les relations de Rankine–Hugoniot selon le type d'onde.

Remarque 8 (Solution autosimilaire) Nous cherchons des solutions invariantes par transformation d'échelle, dites **autosimilaires**. On introduit la *variable de similarité*

$$\zeta = \frac{x}{t}, \quad t > 0,$$

et l'on suppose que la solution ne dépend que de ζ , c'est-à-dire

$$\mathbf{V}(x, t) = \mathbf{V}(\zeta).$$

Cette hypothèse traduit le fait que les profils à différents instants ne diffèrent que par un facteur d'échelle : la solution est donc constante le long de chaque rayon $\zeta = \text{constante}$ dans le plan (x, t) .

Sous cette forme, le système $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{q}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$ se réécrit

$$-\zeta \frac{d\mathbf{V}}{d\zeta} + \frac{d\mathbf{q}(\mathbf{V})}{d\zeta} = 0 \implies (\mathbb{B}(\mathbf{V}) - \zeta \mathbb{I}) \frac{d\mathbf{V}}{d\zeta} = 0,$$

où $\mathbb{B}(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{q}(\mathbf{V})$.

Ainsi, en chaque point régulier de la solution, $\frac{d\mathbf{V}}{d\zeta}$ est un vecteur propre de $\mathbb{B}(\mathbf{V})$, associé à la valeur propre $\lambda_k(\mathbf{V}) = \zeta$ pour une certaine famille caractéristique k . Autrement dit, chaque portion régulière de la solution autosimilaire correspond à une **courbe intégrale** du champ propre \mathbf{r}_k associé à la famille caractéristique considérée.

5.5.4. Invariants de Riemann

Puisque le système est strictement hyperbolique, nous pouvons choisir un jeu de variables \mathbf{I} (non conservatives) qui rend le système diagonale. On pourra alors étudier chaque équation et superposer les solutions obtenues comme dans le cas linéaire. Nota bene : même si le système est diagonale, les équations ne sont pas indépendantes car chaque valeurs propres dépend en générale de toutes les composantes de \mathbf{I} .

On note

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) | \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) | \dots | \mathbf{r}_p(\mathbf{W})],$$

la matrice de passage dont les colonnes sont les vecteurs propres droits du jacobien $\mathbb{B}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{q}(\mathbf{W})$. On a alors la décomposition spectrale

$$\mathbb{B}(\mathbf{W}) \mathbb{P}(\mathbf{W}) = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \mathbb{D}(\mathbf{W}),$$

où $\mathbb{D}(\mathbf{W}) = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{W}), \dots, \lambda_p(\mathbf{W}))$ est la matrice diagonale des valeurs propres.

Changement de variables. Multiplions le système de conservation $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = 0$ par $\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W})$ à gauche :

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) \partial_t \mathbf{W} + \mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) \mathbb{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = 0.$$

En utilisant la relation précédente, il vient

$$[\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) \partial_t \mathbf{W}] + \mathbb{D}(\mathbf{W}) [\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W}] = 0.$$

Introduction des invariants de Riemann. Supposons qu'il existe un vecteur $\mathbf{I}(\mathbf{W}) = (I_1(\mathbf{W}), \dots, I_p(\mathbf{W}))^T$ tel que

$$\partial_t \mathbf{I}(\mathbf{W}) = \mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) \partial_t \mathbf{W}, \quad \text{et} \quad \partial_x \mathbf{I}(\mathbf{W}) = \mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W}.$$

En d'autres termes, on cherche une fonction \mathbf{I} vérifiant

$$\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{I}(\mathbf{W}) = \mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}).$$

Dans ce cas, le système devient simplement

$$\partial_t \mathbf{I}(\mathbf{W}) + \mathbb{D}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{I}(\mathbf{W}) = 0,$$

c'est-à-dire un système diagonal où chaque composante I_k évolue selon la vitesse caractéristique $\lambda_k(\mathbf{W})$.

Caractérisation différentielle. On rappelle que

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T(\mathbf{W}) \\ \mathbf{l}_2^T(\mathbf{W}) \\ \vdots \\ \mathbf{l}_p^T(\mathbf{W}) \end{bmatrix},$$

où les $\mathbf{l}_k(\mathbf{W})$ sont les vecteurs propres gauches normalisés par

$$\mathbf{l}_j^T(\mathbf{W}) \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = \delta_{jk}.$$

Ainsi, la condition précédente s'écrit

$$[\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{I}(\mathbf{W})]_j \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = \delta_{jk}.$$

Pour une famille caractéristique k fixée, les $p-1$ fonctions I_j d'indices $j \neq k$ sont telles que

$$(\nabla_{\mathbf{W}} I_j(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0.$$

Autrement dit, ces I_j restent constantes le long des intégrales du champ de vecteurs propre $\mathbf{r}_k(\mathbf{W})$: ce sont les

k -invariants de Riemann associés à la k -onde.

Chaque famille caractéristique possède donc $p-1$ invariants de Riemann, qui jouent un rôle essentiel dans la construction des détentes et dans la résolution du problème de Riemann.

5.3 Définition (Invariants de Riemann)

Pour un k -champ caractéristique, il existe exactement $p-1$ fonctions :

$$\left\{ \mathfrak{J}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{l}_j : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R} \mid j = 1, \dots, p, j \neq k \right\}$$

telles que

$$\nabla \mathfrak{J}_{k,j}^T(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0 \quad \forall \mathbf{W}.$$

Chaque fonction $\mathfrak{J}_{k,j}$ vérifiant cette relation est appelée un **k -invariant de Riemann**.

Quelques notations particulières :

- si $p = 2$, on note simplement \mathfrak{J}_k le seul invariant de Riemann associé à l'onde k ;
- si $p = 3$, on note \mathfrak{J}_k et \mathfrak{J}_k les deux invariants de Riemann associés à l'onde k .

Quelques remarques utiles :

- si le k^e champ est **linéairement dégénéré** (et non constant), alors la vitesse propre λ_k est elle-même un k -invariant de Riemann;
- chaque fonction $\mathfrak{J}_{k,j}$ est **constante le long d'une k -détente et à travers une k -discontinuité de contact**.



EXEMPLE 5.12 (SAINT-VENANT) Pour le système de Saint-Venant, les invariants de Riemann s'écrivent

$$\mathfrak{I}_1 = v + 2\sqrt{gh}, \quad \mathfrak{I}_2 = v - 2\sqrt{gh}.$$

Vérifions qu'ils sont bien des k -invariants de Riemann, c'est-à-dire que $(\nabla \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$.

$$\begin{aligned} (\nabla \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial h} \left(-\frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial v} \frac{2}{3} = 0, \\ (\nabla \mathfrak{I}_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial h} \frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} + \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial v} \frac{2}{3} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathfrak{I}_1 et \mathfrak{I}_2 sont bien conservés le long des trajectoires caractéristiques correspondantes.

5.5.5. Notion d'entropie

La notion d'**entropie** est fondamentale pour sélectionner une solution unique parmi les nombreuses solutions faibles possibles d'un système de lois de conservation.

5.4 Définition (Entropie)

Pour le système (5.1), une fonction

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{W} &\mapsto \eta(\mathbf{W}) \end{aligned}$$

est appelée **entropie** si elle est convexe (*i.e.* sa matrice Hessienne est semi-définie positive) et s'il existe une fonction **flux d'entropie**

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{W} &\mapsto \psi(\mathbf{W}) \end{aligned}$$

telle que

$$\nabla_{\mathbf{W}} \psi(\mathbf{W}) = \mathbb{B}(\mathbf{W})^T \nabla_{\mathbf{W}} \eta(\mathbf{W}),$$

où $\mathbb{B}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{q}(\mathbf{W})$ est la matrice jacobienne du flux.

Autrement dit, $\nabla_{\mathbf{W}} \eta$ doit former une différentielle exacte.

Cette propriété permet, pour des solutions régulières, de multiplier la loi de conservation (5.1) par $\nabla_{\mathbf{W}} \eta$ et d'obtenir une nouvelle loi de conservation :

$$\partial_t \eta(\mathbf{W}) + \partial_x \psi(\mathbf{W}) = 0.$$

Pour les solutions discontinues, cette égalité est remplacée par l'inégalité dite **entropique** :

$$\partial_t \eta(\mathbf{W}) + \partial_x \psi(\mathbf{W}) \leq 0.$$

Une solution faible \mathbf{W} est dite **entropique** si elle satisfait cette inégalité au sens des distributions.



EXEMPLE 5.13 (ENTROPIE POUR LE SYSTÈME DE SAINT-VENANT) Pour le système de Saint-Venant (5.3), on peut choisir comme entropie

$$\eta(h, v) = \frac{1}{2}hv^2 + \frac{g}{2}h^2,$$

et comme flux d'entropie associé

$$\psi(h, v) = \left(\frac{1}{2} v^2 + gh \right) hv.$$

On vérifie que

$$\nabla_{(h,v)} \psi(h, v) = \mathbb{B}(h, v)^T \nabla_{(h,v)} \eta(h, v),$$

avec $\mathbb{B}(h, v)$ la matrice jacobienne du flux du système quasi-linéaire. Ainsi, pour les solutions discontinues, l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \eta(h, v) + \partial_x \psi(h, v) \leq 0$$

permet de sélectionner la solution physique correcte, *i.e.* celle qui respecte les principes de la mécanique des fluides (pas de création d'énergie non physique).

5.5.6. Étude des ondes de choc

On appelle **choc** une solution faible discontinue d'un système de lois de conservation, qui satisfait à la fois les **relations de saut de Rankine-Hugoniot** et une **condition d'admissibilité** (critère entropique).

5.5 Théorème (Relations de Rankine-Hugoniot)

Soit \mathbf{W} une solution faible du système (5.1). Alors

1. \mathbf{W} est solution classique là où elle est de classe \mathcal{C}^1 (de part et d'autre de chaque discontinuité) ;
2. le long d'une courbe de discontinuité, \mathbf{W} vérifie les p équations

$$\llbracket \mathbf{q}(\mathbf{W}) \rrbracket_{\mathcal{J}}^d = \dot{\sigma} \llbracket \mathbf{W} \rrbracket_{\mathcal{J}}^d,$$

où $\dot{\sigma}$ est la vitesse de propagation du choc et la notation $\llbracket \mathcal{V} \rrbracket_{\mathcal{J}}^d \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_d - \mathcal{V}_{\mathcal{J}}$ désigne le saut à travers la discontinuité.

Notons que,

- pour $p = 1$ (par exemple, l'équation de Burgers), la vitesse $\dot{\sigma}$ se déduit directement des valeurs des états gauche et droit;
- pour $p > 1$, on dispose de p équations pour déterminer $\dot{\sigma}$ et vérifier l'admissibilité.

Une solution faible est dite **entropique** si, pour tout couple entropie-flux (η, ψ) ,

$$\llbracket \psi(\mathbf{W}) \rrbracket_{\mathcal{J}}^d \leq \dot{\sigma} \llbracket \eta(\mathbf{W}) \rrbracket_{\mathcal{J}}^d.$$

Comme il est difficile d'utiliser cette définition pour vérifier si un choc est entropique, on va introduire un critère d'admissibilité plus simple à vérifier :

5.6 Théorème (Condition d'admissibilité de Lax)

Soit une discontinuité entre $\mathbf{W}_{\mathcal{J}}$ et \mathbf{W}_d , se déplaçant à la vitesse $\dot{\sigma}$ et vérifiant les relations de Rankine-Hugoniot. Cette discontinuité est un **k -choc admissible** (*i.e.* une solution faible entropique) si

- le k -ième champ caractéristique est **VNL**;
- les valeurs propres locales satisfont

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{W}_d) &< \lambda_2(\mathbf{W}_d) < \dots < \lambda_k(\mathbf{W}_d) < \dot{\sigma} < \lambda_{k+1}(\mathbf{W}_d) < \dots < \lambda_p(\mathbf{W}_d) \\ \lambda_1(\mathbf{W}_{\mathcal{J}}) &< \lambda_2(\mathbf{W}_{\mathcal{J}}) < \dots < \lambda_{k-1}(\mathbf{W}_{\mathcal{J}}) < \dot{\sigma} < \lambda_k(\mathbf{W}_{\mathcal{J}}) < \dots < \lambda_p(\mathbf{W}_{\mathcal{J}}). \end{aligned}$$

Parmi les $2(p-1)$ inégalités, il suffit de vérifier les 4 suivantes

$$\lambda_{k-1}(\mathbf{W}_{\mathcal{J}}) < \dot{\sigma}, \quad \lambda_k(\mathbf{W}_d) < \dot{\sigma} < \lambda_k(\mathbf{W}_{\mathcal{J}}), \quad \dot{\sigma} < \lambda_{k+1}(\mathbf{W}_d).$$

La solution faible entropique reliant deux états $\mathbf{W}_{\mathcal{J}}$ (gauche) et \mathbf{W}_d (droit)² s'écrit alors

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_{\mathcal{J}} & \text{si } \frac{x}{t} < \dot{\sigma}_k, \\ \mathbf{W}_d & \text{si } \frac{x}{t} > \dot{\sigma}_k, \end{cases}$$

et l'on appelle cette discontinuité un **k -choc**.

2. On utilisera les indices \mathcal{J} et d car cela dépend de quels sont les états gauche et droit par rapport à l'onde. Par exemple, si on étudie un système de $p = 2$ EDP strictement hyperbolique, la solution du problème de Riemann est constituée de 3 états constants \mathbf{W}_L , \mathbf{W}_* et \mathbf{W}_R séparés par 2 ondes. Si on étudie la 1-onde on a $\mathcal{J} = L$ et $d = *$, si on étudie la 2-onde on a $\mathcal{J} = *$ et $d = R$.

De façon plus générale, le choc est décrit par $x = \sigma_k(t)$, avec $\sigma_k(0) = 0$ et $\dot{\sigma}_k(t)$ satisfaisant les relations de Rankine-Hugoniot. Si $\dot{\sigma}_k(t)$ est constant (dépendant uniquement des états gauche et droit), alors

$$\sigma_k(t) = \dot{\sigma}_k t.$$

 **EXEMPLE 5.14 (DEUX ONDES DE CHOC POUR LE SYSTÈME DE SAINT-VENANT)** Considérons le système de Saint-Venant avec des conditions initiales de Riemann

$$(h, v)(0, x) = \begin{cases} (h_L, v_L), & x < 0, \\ (h_R, v_R), & x > 0. \end{cases}$$

On cherche le cas particulier où la solution se compose exclusivement de deux ondes de choc, une de chaque famille (1-onde et 2-onde), séparant trois états constants

$$(h_L, v_L), \quad (h_*, v_*), \quad (h_R, v_R).$$

Chaque onde $k = 1, 2$ se propage à la vitesse $\dot{\sigma}_k$ et relie deux états constants $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ et $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ vérifiant les **relations de Rankine-Hugoniot** :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_k(h_d - h_g) = h_d v_d - h_g v_g, \\ \dot{\sigma}_k(h_d v_d - h_g v_g) = \left(h_d v_d^2 + \frac{g}{2} h_d^2\right) - \left(h_g v_g^2 + \frac{g}{2} h_g^2\right). \end{cases}$$

Notons que pour $k = 1$, l'état gauche est L et l'état droit $*$; pour $k = 2$, l'état gauche est $*$ et l'état droit R .

Ces deux équations permettent de relier les états \mathbf{W}_g et \mathbf{W}_d via la vitesse du choc $\dot{\sigma}_k$ et donc de calculer (h_*, v_*) en fonction des états (h_L, v_L) et (h_R, v_R) .

De plus, les **conditions d'admissibilité de Lax** imposent en outre :

$$\begin{array}{ll} \text{1-onde} & \lambda_1(h_*, v_*) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(h_L, v_L), \quad \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(h_*, v_*) \\ \text{2-onde} & \lambda_1(h_*, v_*) < \dot{\sigma}_2, \quad \lambda_2(h_*, v_*) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(h_R, v_R) \end{array}$$

et la solution (autosimilaire) est

$$(h, v)(t, x) = \begin{cases} (h_L, v_L), & x/t < \dot{\sigma}_1, \\ (h_*, v_*), & \dot{\sigma}_1 < x/t < \dot{\sigma}_2, \\ (h_R, v_R), & x/t > \dot{\sigma}_2. \end{cases}$$

5.5.7. Étude des discontinuités de contact

Considérons un champ caractéristique k linéairement dégénéré (LD). Une **k -discontinuité de contact** est une discontinuité qui relie deux états constants \mathbf{W}_g et \mathbf{W}_d et qui se propage à la vitesse

$$\dot{\sigma}_k = \lambda_k(\mathbf{W}_g) = \lambda_k(\mathbf{W}_d).$$

La solution autosimilaire s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_g, & x/t < \dot{\sigma}_k, \\ \mathbf{W}_d, & x/t > \dot{\sigma}_k, \end{cases}$$

et rappelle la solution d'une équation d'advection à vitesse constante.

Pour relier \mathbf{W}_g et \mathbf{W}_d , on peut procéder de deux manières équivalentes :

- **relations de Rankine-Hugoniot :**

$$[\![\mathbf{q}(\mathbf{W})]\!]_g^d = \dot{\sigma}_k [\![\mathbf{W}]\!]_g^d, \quad \sigma_k(0) = 0;$$

- **invariants de Riemann** (l'entropie et les k -invariants de Riemann sont conservés au travers d'une discontinuité de contact) :

$$\mathfrak{I}_k(\mathbf{W}_g) = \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}_d).$$

(Notons d'ailleurs que, comme le k^e champ est linéairement dégénéré, $\lambda_k(\mathbf{W})$ est un k -invariant de Riemann).

Remarque 9 Dans le système de Saint-Venant, les deux champs caractéristiques sont vraiment non linéaires (VNL). Il n'existe donc pas de discontinuités de contact : toutes les ondes sont soit des chocs, soit des raréfactions. La notion de k -discontinuité de contact s'applique uniquement aux systèmes possédant au moins un champ linéairement dégénéré.

5.5.8. Étude des ondes de détente et courbes intégrales

Lorsqu'une discontinuité n'est pas admissible, on cherche à construire une solution régulière associée à un champ caractéristique VNL. Cette solution est autosimilaire et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, de la forme

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_g, & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{W}_g), \\ \mathbf{V}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{si } \lambda_k(\mathbf{W}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_k(\mathbf{W}_d), \\ \mathbf{W}_d, & \text{si } \frac{x}{t} \geq \lambda_k(\mathbf{W}_d), \end{cases}$$

où $\mathbf{V}(\xi)$ est déterminée par la résolution de l'EDO en $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x/t$

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\xi} = \mathbf{r}_k(\mathbf{V}(\xi)), \quad \text{pour } \lambda_k(\mathbf{W}_g) < \xi < \lambda_k(\mathbf{W}_d).$$

Cette EDO définit la **courbe intégrale du k -champ**.

Le long d'une **k -détente**, les k -invariants de Riemann sont conservés. Rappelons que pour un champ k donné, il existe exactement $p - 1$ invariants de Riemann. En pratique, ces $p - 1$ relations permettent de déterminer la solution $\mathbf{V}(\xi)$ le long de la détente et de relier les états \mathbf{W}_g et \mathbf{W}_d de manière explicite.



EXEMPLE 5.15 (DÉTENTES POUR LE SYSTÈME DE SAINT-VENANT)

Considérons un problème de Riemann pour le système de Saint-Venant, avec un état gauche (h_L, v_L) et un état droit (h_R, v_R) .

- La 1-détente s'étend entre les droites

$$x = \lambda_1(\mathbf{W}_L)t \quad \text{et} \quad x = \lambda_1(\mathbf{W}_*)t,$$

avec $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ l'état à droite de la détente, et la vitesse locale le long de la détente est

$$\lambda_1(h) = v(h) - \sqrt{gh}, \quad h_L \leq h \leq h_*.$$

Dans cette 1-détente, l'invariant de Riemann

$$\mathfrak{I}_1 = v + 2\sqrt{gh}$$

est conservé, ce qui impose

$$v(h) = v_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh}, \quad h_L \leq h \leq h_*.$$

La relation précédente permet de calculer explicitement v_* pour un état droit donné h_* :

$$v_* = v(h_*) = v_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh_*}.$$

On peut tracer la 1-détente dans le plan (x, t) en utilisant la variable de similarité $\xi = x/t$:

$$\lambda_1(\mathbf{W}_L) \leq \xi \leq \lambda_1(\mathbf{W}_*), \quad \text{avec} \quad \xi = \lambda_1(h) = v(h) - \sqrt{gh}.$$

- De manière analogue, pour une 2-détente (si $h_* > h_R$), la conservation de l'invariant

$$\mathfrak{I}_2 = v - 2\sqrt{gh}$$

donne

$$v(h) = v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\sqrt{gh}, \quad h_* \leq h \leq h_R,$$

et la vitesse locale est

$$\lambda_2(h) = v(h) + \sqrt{gh}.$$



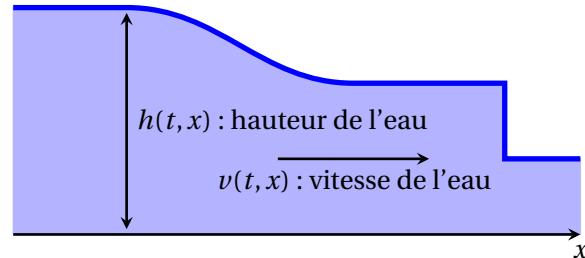
Illustrons tout d'abord la résolution du problème de Riemann pour les équations de Saint-Venant. Il s'agit d'un système de $p = 2$ équations associées à 2 champs caractéristiques vraiment non-linéaires. La solution d'un problème de Riemann associé à ces équations va donc impliquer un unique état intermédiaire, que nous nommerons \mathbf{W}_* , connecté à \mathbf{W}_L par une 1-onde et à \mathbf{W}_R par une 2-onde. Notons que les ondes associées à chacun de ces 2 champs ne peuvent être que des ondes de chocs ou de détentes.

Nous étudierons ensuite la résolution du problème de Riemann pour un système de $p = 2$ équations associées à 2 champs caractéristiques linéairement dégénérés. La solution d'un problème de Riemann associé à ces équations va donc impliquer un unique état intermédiaire, que nous nommerons \mathbf{W}_* , connecté à \mathbf{W}_L par une 1-discontinuité de contact et à \mathbf{W}_R par encore une 2-discontinuité de contact.

6.

Le système de Saint-Venant

Nous cherchons à modéliser l'écoulement d'eau sous l'hypothèse de faible profondeur dans le cas unidimensionnel avec un fond plat. De plus, nous supposons que l'eau se comporte comme un fluide incompressible et non visqueux, en négligeant les frottements entre l'air et l'eau ainsi qu'entre l'eau et le sol. Les variables inconnues, qui dépendent du temps $t \in [0; +\infty[$ et de l'espace $x \in \mathbb{R}$, sont $h \equiv h(t, x) > 0$ la hauteur de l'eau et $v \equiv v(t, x) \in \mathbb{R}$ sa vitesse horizontale (nous supposons qu'elle est uniforme sur toute la hauteur de l'eau). On note $g > 0$ la constante de gravité. En considérant une dimension spatiale et une topographie plate, ce type d'écoulement est modélisé par le système de Saint Venant, aussi connu sous le nom d'équations des eaux peu profondes ("shallow water" en anglais)



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + \frac{g}{2}h^2) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.1)$$

Dans ce chapitre

6.1 Étude du système	142
6.1.1 Forme non conservative	142
6.1.2 Nature des champs caractéristiques	143
6.1.3 Invariants de Riemann	143
6.1.4 Résumé	145
6.2 Étude du Problème de Riemann	146
6.2.1 Étude des détentes	147
6.2.2 Étude des chocs	150
6.2.3 Solution complète	154
6.2.4 Annexe : entropie	164

6.1. Étude du système

En écriture vectorielle, la forme conservative s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

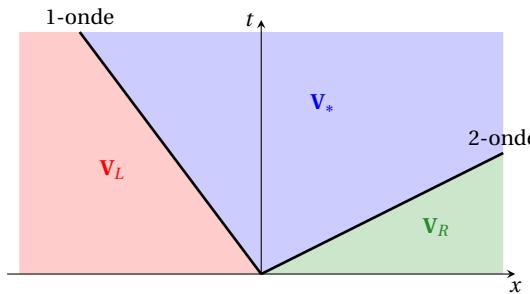
ayant défini

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} hv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse au problème de Riemann, c'est-à-dire à une condition initiale de la forme

$$\mathbf{V}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{V}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{V}_L = (h_L, h_L v_L)^T$ et $\mathbf{V}_R = (h_R, h_R v_R)^T$ sont deux états constants. La solution est constituée de trois états constants \mathbf{V}_L , \mathbf{V}_* et \mathbf{V}_R séparés par deux ondes. Ci-dessous on va calculer \mathbf{V}_* et les ondes qui séparent ces trois états constants.



6.1.1. Forme non conservative

Tout d'abord nous allons écrire une forme non-conservative dans un autre jeu de variables que celles du vecteur \mathbf{V} . On développe les dérivées du système (6.1) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ v\partial_t h + h\partial_t v + \cancel{v\partial_x(hv)} + (hv)\partial_x v + g h \partial_x h = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t h + v\partial_x h + h\partial_x v = 0, \\ h(\partial_t v + v\partial_x v + g\partial_x h) = 0 \end{cases}$$

et on trouve le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{W} \stackrel{\text{def}}{=} (h, v)$, alors le système (6.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

où la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix}.$$

On cherche les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$, *i.e.* les deux solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbb{I}) = 0$:

$$(v - \lambda)^2 - hg = 0.$$

Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. On obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} v - \sqrt{gh} < \lambda_2(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} v + \sqrt{gh}.$$

Pour $h > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (6.1) est strictement hyperbolique.

On cherche maintenant une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. On peut prendre comme vecteurs propres à droites les vecteurs

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}.$$

6.1.2. Nature des champs caractéristiques.

Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (\nabla \lambda_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v - \sqrt{gh})}{\partial h}(-\sqrt{h}) + \frac{\partial(v - \sqrt{gh})}{\partial v}\sqrt{g} = \frac{3}{2}\sqrt{g} \neq 0, \\ (\nabla \lambda_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v + \sqrt{gh})}{\partial h}\sqrt{h} + \frac{\partial(v + \sqrt{gh})}{\partial v}\sqrt{g} = \frac{3}{2}\sqrt{g} \neq 0. \end{aligned}$$

Les deux champs sont vraiment non linéaires. Le caractère véritablement non linéaire des valeurs propres implique que toutes les ondes sont soit des ondes de raréfaction soit des chocs (il n'y aura aucune discontinuité de contact).

6.1.3. Invariants de Riemann.

Comme $p = 2$, il existe $p - 1 = 1$ invariants de Riemann pour chaque champ caractéristique. Pour le système de Saint-Venant,

- dans la 1-onde, $\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = v + 2\sqrt{gh}$ est un invariant de Riemann,
- dans la 2-onde, $\mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = v - 2\sqrt{gh}$ est un invariant de Riemann.

Cela signifie que $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} (\nabla \mathfrak{J}_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial h}(-\sqrt{h}) + \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial v}\sqrt{g} = 0, \\ (\nabla \mathfrak{J}_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial h}\sqrt{h} + \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial v}\sqrt{g} = 0. \end{aligned}$$

Remarque 10 (Comment trouve-t-on les invariants de Riemann?) Comme $p = 2$ on doit trouver $p - 1 = 1$ invariant de Riemann pour chaque champ caractéristique, autrement dit on doit trouver $\mathfrak{J}_1(\mathbf{W})$ et $\mathfrak{J}_2(\mathbf{W})$ tels que $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$, ayant noté \mathfrak{J}_k l'invariant de Riemann du k^e champ caractéristique.

Parfois on peut intuiter les invariants de Riemann. Il suffit alors de vérifier que $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour confirmer l'intuition. Cependant, comment trouver les invariants dans le cas générale? Pour cela il faut tout d'abord trouver un vecteur $\mathbb{I}(\mathbf{W})$ pour lequel le système est diagonal, autrement-dit on cherche un vecteur $\mathbb{I}(\mathbf{W})$ tel que

$$\partial_t \mathbb{I} + \mathbb{D}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbb{I} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{W}) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\mathbf{W}) \end{pmatrix}.$$

Dans le champ $k = 1$ c'est la composante \mathbb{I}_2 qui est un invariant et dans le champ $k = 2$ c'est la composante \mathbb{I}_1 qui est un invariant, ainsi on posera

$$\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = \mathbb{I}_2, \quad \mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = \mathbb{I}_1.$$

- MÉTHODE 1 : on cherche une combinaison “astucieuse” des équations pour obtenir cette forme diagonale.

$$\begin{cases} \partial_t h + v \partial_x h + h \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + g \partial_x h + v \partial_x v = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 - \sqrt{\frac{g}{h}} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{\frac{g}{h}} L_1 \end{array}} \begin{cases} \partial_t v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h + \left(g - \sqrt{\frac{g}{h}} v\right) \partial_x h + \left(v - \sqrt{\frac{g}{h}} h\right) \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h + \left(g + \sqrt{\frac{g}{h}} v\right) \partial_x h + \left(v + \sqrt{\frac{g}{h}} h\right) \partial_x v = 0, \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \partial_t v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h - \sqrt{\frac{g}{h}}(v - \sqrt{gh}) \partial_x h + (v - \sqrt{gh}) \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h + \sqrt{\frac{g}{h}}(v - \sqrt{gh}) \partial_x h + (v + \sqrt{gh}) \partial_x v = 0, \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \left(\partial_t v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h\right) + (v - \sqrt{gh}) \left(\partial_x v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_x h\right) = 0, \\ \left(\partial_t v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h\right) + (v + \sqrt{gh}) \left(\partial_x v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_x h\right) = 0, \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \left(\partial_t v - 2\sqrt{g} \partial_t \sqrt{h}\right) + (v - \sqrt{gh}) \left(\partial_x v - 2\sqrt{g} \partial_x \sqrt{h}\right) = 0, \\ \left(\partial_t v + 2\sqrt{g} \partial_t \sqrt{h}\right) + (v - \sqrt{gh}) \left(\partial_x v + 2\sqrt{g} \partial_x \sqrt{h}\right) = 0, \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \partial_t(v - 2\sqrt{gh}) + (v - \sqrt{gh}) \partial_x(v - 2\sqrt{gh}) = 0, \\ \partial_t(v + 2\sqrt{gh}) + (v + \sqrt{gh}) \partial_x(v + 2\sqrt{gh}) = 0, \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{I}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v - 2\sqrt{gh} \\ v + 2\sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

- MÉTHODE 2 : si on note

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) = [\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) | \mathbf{r}_2(\mathbf{W})]$$

la matrice de changement de base (qui transforme le système en \mathbf{W} en le système diagonale de variable \mathbb{I}), alors

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbb{I}.$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial h} & \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial h} & \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Ici

$$\mathbb{P} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{h}{g}} & \sqrt{\frac{h}{g}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{-1} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{g}{h}} & 1 \\ \sqrt{\frac{g}{h}} & 1 \end{pmatrix},$$

ou, si on choisit le deuxième jeu de vecteurs propres,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} & \sqrt{h} \\ \sqrt{g} & \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{h}} & \frac{1}{\sqrt{g}} \\ \frac{1}{\sqrt{h}} & \frac{1}{\sqrt{g}} \end{pmatrix},$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial h} = -\frac{1}{2\sqrt{h}}, \quad &\rightsquigarrow \mathbb{I}_1(\mathbf{W}) = \int -\frac{1}{2\sqrt{h}} dh + f(v) = -\sqrt{h} + f(v) \\ &\rightsquigarrow \frac{1}{2\sqrt{g}} = \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial v} = f'(v) \quad \rightsquigarrow f(v) = \frac{1}{2\sqrt{g}} v \\ &\rightsquigarrow \mathbb{I}_1(\mathbf{W}) = -\sqrt{h} + \frac{1}{2\sqrt{g}} v = \frac{v - 2\sqrt{gh}}{2\sqrt{g}} \\ \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial h} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad &\rightsquigarrow \mathbb{I}_2(\mathbf{W}) = \int \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{h}} dh + f(v) = \sqrt{h} + f(v) \\ &\rightsquigarrow \frac{1}{2\sqrt{g}} = \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial v} = f'(v) \quad \rightsquigarrow f(v) = \frac{1}{2\sqrt{g}} v \\ &\rightsquigarrow \mathbb{I}_2(\mathbf{W}) = \sqrt{h} + \frac{1}{2\sqrt{g}} v = \frac{v + 2\sqrt{gh}}{2\sqrt{g}} \end{aligned}$$

ce qui donne le vecteur

$$\mathbb{I}(\mathbf{W}) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \begin{pmatrix} v - 2\sqrt{gh} \\ v + 2\sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

En conclusion, on pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= \mathbb{I}_2 = v + 2\sqrt{gh}, \\ \mathfrak{I}_2 &= \mathbb{I}_1 = v - 2\sqrt{gh}. \end{aligned}$$

6.1.4. Résumé

- Formulation conservative

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} hv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}$$

- Formulation non conservative

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix}$$

- Champs

k	$\lambda_k(\mathbf{W})$	$\mathbf{r}_k(\mathbf{W})$	Nature	$\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$
1	$v - \sqrt{gh}$	$\begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}$	VNL	$v + 2\sqrt{gh}$
2	$v + \sqrt{gh}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}$	VNL	$v - 2\sqrt{gh}$

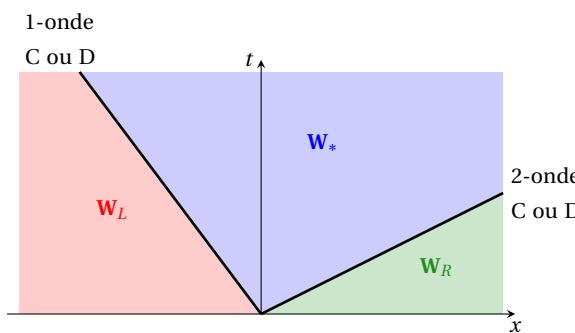
6.2. Étude du Problème de Riemann

Soit un problème de Riemann, *i.e.* considérons la condition initiale

$$\mathbf{W}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ v_L \end{pmatrix}$ et $\mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ v_R \end{pmatrix}$ sont deux états constants donnés avec $h_L \geq 0$, $h_R \geq 0$, $v_L \in \mathbb{R}$ et $v_R \in \mathbb{R}$.

La solution faible entropique du problème de Riemann est constituée d'au plus **3 états constants \mathbf{W}_L , \mathbf{W}_* , \mathbf{W}_R , séparés par deux ondes**. Ainsi, pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R donnés, on construit une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . Chaque onde $k = 1, 2$ est associée à un champ VNL donc elle est soit une k -détente soit un k -choc, comme dans la figure ci-dessous :



Il y a quatre possibles structures de la solution :

1. \mathbf{W}_L , 1-choc, \mathbf{W}_* , 2-choc, \mathbf{W}_R ;
2. \mathbf{W}_L , 1-choc, \mathbf{W}_* , 2-détente, \mathbf{W}_R ;
3. \mathbf{W}_L , 1-détente, \mathbf{W}_* , 2-choc, \mathbf{W}_R ;
4. \mathbf{W}_L , 1-détente, \mathbf{W}_* , 2-détente, \mathbf{W}_R .

Pour expliciter cette solution on doit définir :

- l'état constant intermédiaire $\mathbf{W}_* = \begin{pmatrix} h_* \\ v_* \end{pmatrix}$;
- les vitesses des chocs $\dot{\sigma}_1(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_*)$ et $\dot{\sigma}_2(\mathbf{W}_*, \mathbf{W}_R)$;
- les vitesses des détentes $\lambda_1^L(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_*), \lambda_1^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_*)$ et $\lambda_2^*(\mathbf{W}_*, \mathbf{W}_R), \lambda_2^R(\mathbf{W}_*, \mathbf{W}_R)$;
- les états dans les détentes : $\mathbf{W}_{1-\text{det}}(t, x)$ et $\mathbf{W}_{2-\text{det}}(t, x)$.

6.2.1. Étude des détentes.

On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ par une onde de détente avec

k	g	d
1	L	*
2	*	R

- Dans une k -détente l'invariant de Riemann \mathfrak{I}_k est conservé :

$$\mathfrak{I}_k(\mathbf{W}_g) = \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}_{k-\text{det}}) = \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}_d).$$

- La k -détente est comprise entre la droite $x = \lambda_k(\mathbf{W}_g)t$ et la droite $x = \lambda_k(\mathbf{W}_d)t$:

$$\lambda_k(\mathbf{W}_g) \leq \frac{x}{t} = \lambda_k(\mathbf{W}_{k-\text{det}}) \leq \lambda_k(\mathbf{W}_d).$$

Plus précisément, la vitesse caractéristique vérifie $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_{k-\text{det}})$. De même, les inégalités s'écrivent $\lambda_k(\mathbf{W}_g) \leq x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_{k-\text{det}}) \leq \lambda_k(\mathbf{W}_d)$. Comme $\lambda_k(\mathbf{W})$ ne dépend pas explicitement de t on a tout simplement $x = \lambda_k(\mathbf{W}_{k-\text{det}})t$.

1. 1-champ : on cherche les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ (connu) par une 1-onde de détente.

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$, alors

$$\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_L) = \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_*) \quad \rightsquigarrow \quad v_L + 2\sqrt{gh_L} = v_* + 2\sqrt{gh_*}$$

$$\text{d'où } h_* \mapsto v_*(h_*) = v_L + 2\sqrt{g} \left(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_*} \right).$$

- La condition $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W}_*)$ se réécrit $v_L - \sqrt{gh_L} < v_* - \sqrt{gh_*}$ donc

$$v_* > v_L + \sqrt{g} \left(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_L} \right).$$

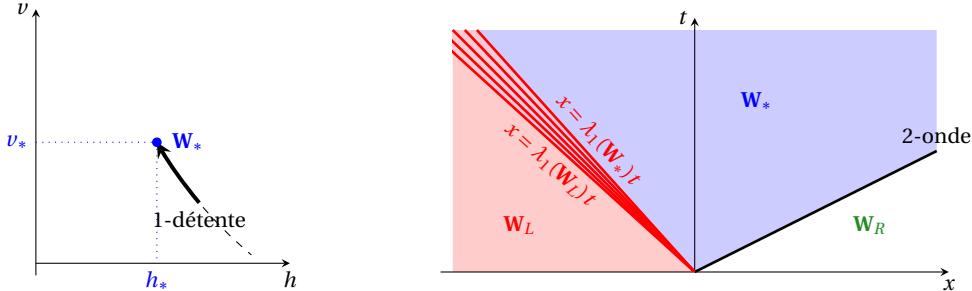
Les deux conditions donnent

$$\underbrace{v_L + 2\sqrt{g} \left(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_*} \right)}_{v_*} > v_L + \sqrt{g} \left(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_L} \right) \quad \rightsquigarrow \quad 3\sqrt{g}\sqrt{h_L} > 3\sqrt{g}\sqrt{h_*}.$$

On conclut que les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ donné par une 1-onde de détente vérifient

$$h_* < h_L, \quad v_* > v_L \quad \text{et} \quad v_*(h_*) = v_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_*}).$$

On a donc les graphes suivants :¹



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieur de la 1-onde de détente, on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$.

- La vitesse de la 1-onde de détente vérifie

$$\lambda_1(\mathbf{W}_L) \leq \frac{x}{t} = \lambda_1(\mathbf{W}) \leq \lambda_1(\mathbf{W}_*),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = \lambda_1(\mathbf{W}) = v - \sqrt{gh}.$$

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$, alors

$$\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_L) = \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_*) \quad \rightsquigarrow \quad v + 2\sqrt{gh} = v_L + 2\sqrt{gh_L}.$$

Ainsi

$$v = v_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh} = v_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\left(v - \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right) \quad \rightsquigarrow \quad v(\hat{t}, \hat{x}) = \frac{1}{3}\left(v_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)$$

et

$$h = \frac{\left(v - \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)^2}{g} \quad \rightsquigarrow \quad h(\hat{t}, \hat{x}) = \frac{1}{9g}\left(v_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)^2.$$

2. 2-champ : on cherche les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$ (connu) par une 2-onde de détente.

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$ alors

$$\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}_*) = \mathfrak{I}_2(\mathbf{W}_R) \quad \rightsquigarrow \quad v_* - 2\sqrt{gh_*} = v_R - 2\sqrt{gh_R}$$

1. De plus, pour $h_* < h_L$,

$$(v_*)'(h_*) = -\sqrt{\frac{g}{h_*}} < 0, \quad (v_*)''(h_*) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{(h_*)^3}} > 0.$$

d'où $h_* \mapsto v_*(h_*) = v_R + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_R})$.

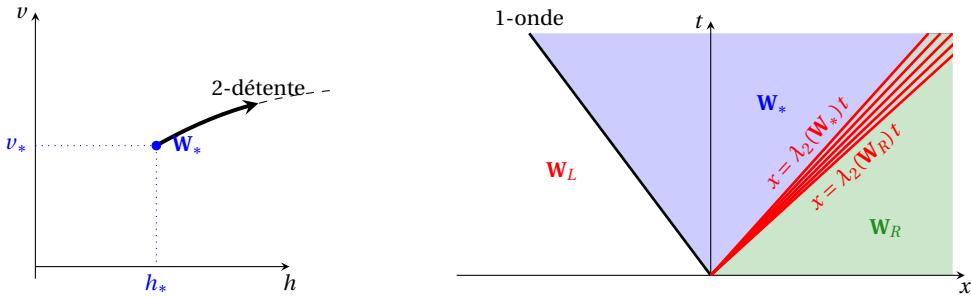
- La condition $\lambda_2(\mathbf{W}_*) < \lambda_2(\mathbf{W}_R)$ se réécrit $v_* + \sqrt{gh_*} < v_R + \sqrt{gh_R}$ donc

$$v_* < v_R + \sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h_*}).$$

On conclut que les états les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$ donné par une 2-onde de détente vérifient

$$h_* < h_R, \quad v_* < v_R \quad \text{et} \quad v_*(h_*) = v_R + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_R}).$$

On a donc les graphes suivants :²



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieur de la 2-onde de détente, on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$.

- La vitesse caractéristique de l'onde est

$$\lambda_2(\mathbf{W}_*) \leq \frac{\hat{x}}{\hat{t}} = \lambda_2(\mathbf{W}) \leq \lambda_2(\mathbf{W}_R)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = v + \sqrt{gh}.$$

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$, alors

$$\mathcal{I}_2(\mathbf{W}_*) = \mathcal{I}_2(\mathbf{W}) = \mathcal{I}_2(\mathbf{W}_R) \quad \rightsquigarrow \quad v - 2\sqrt{gh} = v_R - 2\sqrt{gh_R}.$$

Ainsi

$$v = v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\sqrt{gh} = v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}} - v\right) \quad \rightsquigarrow \quad v(\hat{t}, \hat{x}) = \frac{1}{3}\left(v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)$$

et

$$h = \frac{\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}} - v\right)^2}{g} \quad \rightsquigarrow \quad h(\hat{t}, \hat{x}) = \frac{1}{9g}\left(-v_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)^2.$$

2. De plus, pour $h_* < h_R$,

$$(v_*)'(h_*) = \sqrt{\frac{g}{h_*}} > 0, \quad (v_*)''(h_*) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{(h_*)^3}} < 0.$$

6.2.2. Étude des chocs.

Passons maintenant à la description des courbes de choc. Une k -onde de choc est une solution discontinue, constante par morceaux, satisfaisant la condition d'entropie, qui se propage à une vitesse $\dot{\sigma}_k$ dépendant des états existant de part et d'autre du saut. Les **variables conservatives** doivent respecter les conditions de saut de **Rankine-Hugoniot**. La courbe $x = \sigma_k(t)$ est la trajectoire du choc et $\dot{\sigma}_k$ est la vitesse du choc.

On a vu que, pour les courbes de raréfaction, si la valeur propre ne dépend pas explicitement du temps, dans le plan (t, x) on a des droites de pente la valeur propre. De manière analogue, si σ_k ne dépend pas de t , on a des droites de pente $\dot{\sigma}_k$.

Les relations de Rankine-Hugoniot pour un choc de vitesse $\dot{\sigma}_k$ entre un état gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ et un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ s'écrivent $\llbracket h v \rrbracket = \llbracket h \rrbracket \dot{\sigma}_k$ et $\llbracket h v^2 + \frac{g}{2} h^2 \rrbracket = \llbracket h v \rrbracket \dot{\sigma}_k$, soit encore

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_k = \frac{\llbracket h v \rrbracket}{\llbracket h \rrbracket} = \frac{h_g v_g - h_d v_d}{h_g - h_d}, \\ \dot{\sigma}_k = \frac{\llbracket h v^2 + \frac{g}{2} h^2 \rrbracket}{\llbracket h v \rrbracket} = \frac{h_g v_g^2 + \frac{g}{2} h_g^2 - h_d v_d^2 - \frac{g}{2} h_d^2}{h_g v_g - h_d v_d}, \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases} h_d v_d - \dot{\sigma}_k h_d = h_g v_g - \dot{\sigma}_k h_g, \\ (v_d - \dot{\sigma}_k) h_d v_d - (v_g - \dot{\sigma}_k) h_g v_g = \frac{g}{2} (h_g^2 - h_d^2), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} j_k \stackrel{\text{def}}{=} h_d (v_d - \dot{\sigma}_k) = h_g (v_g - \dot{\sigma}_k), \\ j_k (v_d - v_g) = \frac{g}{2} (h_g^2 - h_d^2). \end{cases}$$

On en déduit que

$$j_k = \frac{g}{2} \frac{h_g^2 - h_d^2}{v_d - v_g}.$$

De plus, en éliminant $\dot{\sigma}_k$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve :

$$\frac{h_g v_g - h_d v_d}{h_g - h_d} = \frac{h_g v_g^2 + \frac{g}{2} h_g^2 - h_d v_d^2 - \frac{g}{2} h_d^2}{h_g v_g - h_d v_d}$$

d'où

$$\frac{(h_g v_g - h_d v_d)^2}{h_g - h_d} = h_g v_g^2 - h_d v_d^2 + \frac{g}{2} (h_g^2 - h_d^2)$$

soit encore

$$(h_g v_g)^2 + (h_d v_d)^2 - 2 h_g h_d v_g v_d = (h_g v_g)^2 - h_g h_d v_d^2 - h_g h_d v_g^2 + (h_d v_d)^2 + \frac{g}{2} (h_g^2 - h_d^2) (h_g - h_d).$$

On simplifie

$$-2h_{\vartheta}h_d v_{\vartheta}v_d = -h_{\vartheta}h_d v_d^2 - h_{\vartheta}h_d v_{\vartheta}^2 + \frac{g}{2}(h_{\vartheta}^2 - h_d^2)(h_{\vartheta} - h_d)$$

et on réarrange les termes

$$h_{\vartheta}h_d(v_d^2 + v_{\vartheta}^2 - 2v_{\vartheta}v_d) = \frac{g}{2}(h_{\vartheta} - h_d)^2(h_{\vartheta} + h_d)$$

pour obtenir

$$(v_{\vartheta} - v_d)^2 = \frac{g}{2}(h_{\vartheta} - h_d)^2 \frac{h_{\vartheta} + h_d}{h_{\vartheta}h_d}.$$

De plus, la condition d'admissibilité de Lax pour le k -choc s'écrit

$$\lambda_{k-1}(\mathbf{W}_{\vartheta}) < \dot{\sigma}_k < \lambda_k(\mathbf{W}_d) \quad \lambda_k(\mathbf{W}_d) < \dot{\sigma}_k < \lambda_k(\mathbf{W}_{\vartheta}) \quad \dot{\sigma}_k < \lambda_{k+1}(\mathbf{W}_d)$$

Ainsi on a les deux cas

$$\begin{aligned} k=1, \vartheta=L, d=*& \rightsquigarrow \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L) \quad \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}_*) \\ k=2, \vartheta=*, d=R& \rightsquigarrow \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_2 \quad \lambda_2(\mathbf{W}_R) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_*) \end{aligned}$$

- 1-champ : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ par une discontinuité (entropique) de vitesse $\dot{\sigma}_1$. Dans nos formules on a $d=*$ et $\vartheta=L$. La condition d'entropie (Lax) pour $k=1$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_1$ du 1-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \\ \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}_*), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v_* - \sqrt{gh_*} < \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_1 < v_* + \sqrt{gh_*}, \\ \dot{\sigma}_1 < v_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases} \stackrel{\begin{array}{l} \vartheta=L \\ d=*\end{array}}{\Rightarrow} \begin{cases} j_1 < h_* \sqrt{gh_*} \\ j_1 > -h_* \sqrt{gh_*}, \\ j_1 > h_L \sqrt{gh_L}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_* > h_L, \\ j_1 = \frac{g(h_L^2 - h_*^2)}{2(v_* - v_L)} \\ j_1 > 0, \end{cases} \Rightarrow v_* < v_L$$

et on conclut que

$$h_* > h_L \quad \text{et} \quad v_* < v_L.$$

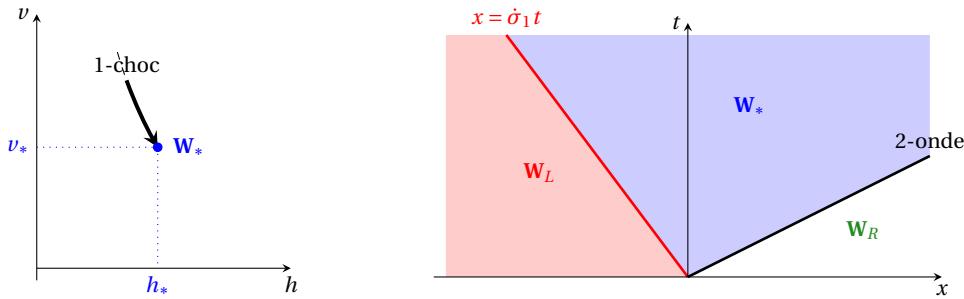
En éliminant $\dot{\sigma}_1$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h_* \mapsto v_*(h_*) = v_L + (h_L - h_*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h_*}{h_L h_*}} \quad \text{pour } h_* > h_L$$

et la vitesse du 1-choc est

$$\dot{\sigma}_1 = v_L - h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h_*}{h_L h_*}}$$

On a donc les graphes suivants :³



2. 2-champ : on cherche à déterminer les états gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$ par une discontinuité (entropique) de vitesse $\dot{\sigma}_2$. Dans nos formules on a $\mathfrak{d} = R$ et $\mathfrak{g} = *$. La condition d'entropie (Lax) pour $k = 2$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_2$ du 2-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2(\mathbf{W}_R) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_*), \\ \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v_R + \sqrt{gh_R} < \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_2 > v_* - \sqrt{gh_*}, \\ \dot{\sigma}_2 < v_* + \sqrt{gh_*}, \end{cases} \stackrel{\mathfrak{g} = *}{\stackrel{\mathfrak{d} = R}{\Rightarrow}} \begin{cases} j_2 < -h_R \sqrt{gh_R} \\ j_2 < h_* \sqrt{gh_*}, \\ j_2 > -h_* \sqrt{gh_*}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_R < h_*, & j_2 = \frac{g(h_*^2 - h_R^2)}{2(v_R - v_*)} \\ j_2 < 0, & \end{cases} v_R < v_*$$

et on conclut que

$$h_* > h_R \quad \text{et} \quad v_* > v_R.$$

En éliminant $\dot{\sigma}_2$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h_R \mapsto v_*(h_*) = v_R + (h_* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}} \quad \text{pour } h_* > h_R$$

et la vitesse du 2-choc est

$$\dot{\sigma}_2 = v_R + h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}}.$$

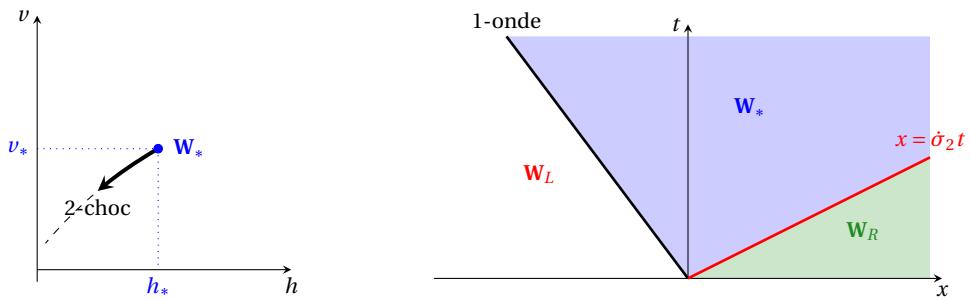
On a donc les graphes suivants :⁴

3. De plus, pour $h_* > h_L$,

$$(v_*)'(h_*) = -\sqrt{\frac{g}{8}} \frac{h_L h_* + 2(h_*)^2 + h_L^2}{\sqrt{(h_*)^3 h_L (h_L + h_*)}} < 0, \quad (v_*)''(h_*) = \sqrt{\frac{g}{32}} \frac{\sqrt{h_L^3 (5h_* + 3h_L)}}{\sqrt{h^5 (h_L + h_*)^3}} > 0.$$

4. De plus, pour $h_* > h_R$,

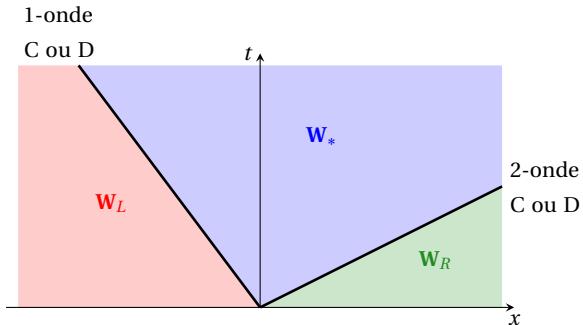
$$(v_*)'(h_*) = \sqrt{\frac{g}{8}} \frac{h_* h_R + h_R^2 + 2(h_*)^2}{\sqrt{(h_*)^3 h_R (h_* + h_R)}} > 0, \quad (v_*)''(h_*) = -\sqrt{\frac{g}{32}} \frac{\sqrt{h_R^3 (5h_* + 3h_R)}}{\sqrt{(h_*)^5 (h_* + h_R)^3}} < 0.$$



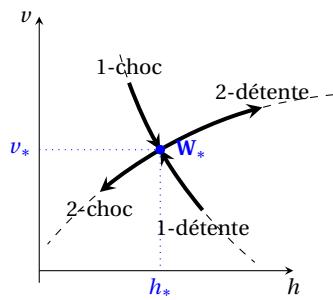
Remarque. Il est intéressant de noter que lorsque $h_* \rightarrow h_L$ (resp. $h_* \rightarrow h_R$), on trouve que $\dot{\sigma}_1 \rightarrow \lambda_1(\mathbf{W}_L)$ (resp. $\dot{\sigma}_2 \rightarrow \lambda_2(\mathbf{W}_R)$). En d'autres termes, la vitesse des discontinuités infinitésimales est la même qu'une vitesse caractéristique.

6.2.3. Solution complète

Pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R donnés, on construit une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . La 1-onde peut être soit un choc soit une détente et de même la 2-onde :



Il y a quatre possibles combinaisons de la solution :



- Cas 1. si $h_* > \max\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'un 1-choc et d'un 2-choc,
- Cas 2. si $h_L < h_* < h_R$ la solution est composée d'un 1-choc et d'un 2-détente,
- Cas 3. si $h_R < h_* < h_L$ la solution est composée d'un 1-détente et d'un 2-choc,
- Cas 4. si $h_* < \min\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'un 1-détente et d'un 2-détente.

Pour expliciter cette solution on doit définir :

- l'état constant intermédiaire $\mathbf{W}_* = \begin{pmatrix} h_* \\ v_* \end{pmatrix}$;
- les vitesses des chocs $\dot{\sigma}_1$ et $\dot{\sigma}_2$ et des détentes $(\lambda_1^L, \lambda_1^*), (\lambda_2^*, \lambda_2^R)$;
- les états dans les détentes : $\mathbf{W}_{1-\text{det}}(t, x)$ et $\mathbf{W}_{2-\text{det}}(t, x)$.

Étape I : calcul de l'état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$

La méthode de résolution du problème de Riemann repose sur le calcul d'un état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$. On a vu que cet état peut être relié à l'état de gauche (h_L, v_L) par une 1-onde :

$$v_* = f^L(h_*) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_L - (h_* - h_L) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_*}} & \text{si } h_* \leq h_L \text{ (1-détente)} \\ v_L - (h_* - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_L}{h_* h_L}} & \text{si } h_* > h_L \text{ (1-choc)} \end{cases}$$

et à l'état de droite (h_R, v_R) par une 2-onde :

$$v_* = f^R(h_*) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_R + (h_* - h_R) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_*}} & \text{si } h_* \leq h_R \text{ (2-détente)} \\ v_R + (h_* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}} & \text{si } h_* > h_R \text{ (2-choc)} \end{cases}$$

- Pour calculer h_* on doit donc résoudre l'équation

$$f^L(h_*) = f^R(h_*),$$

soit encore chercher h_* le zéro de la fonction

$$\heartsuit \mapsto f(\heartsuit) = f^L(\heartsuit) - f^R(\heartsuit).$$

- v_* est ensuite déduit de h_* tout simplement par

$$v_* = f^L(h_*) \quad \text{ou} \quad v_* = f^R(h_*).$$

Remarque 11 (Creation d'une zone sèche) Notons que, dans le cas de la 1-détente suivie d'une 2-détente, on cherche h_* solution de

$$\frac{v_L - v_R}{2\sqrt{g}} = \frac{(h_* - h_L)}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_*}} + \frac{(h_* - h_R)}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_*}}$$

d'où

$$\sqrt{h_*} = \frac{v_L - v_R}{4\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}{2}.$$

Par conséquent, si $v_R - v_L > 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R})$, il n'y a pas de solution. On peut cependant définir une solution en introduisant un état sec et la solution consiste en deux ondes de raréfaction séparées par une zone sèche où $h = 0$ et où les autres variables dépendantes sont laissées indéfinies (classiquement on pose $v = 0$).

Étape II : définition des vitesses des ondes et de la solution dans les détentes

- Les vitesses des ondes de choc

$$\dot{\sigma}_1 \stackrel{\text{def}}{=} v_L - h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h_*}{h_L h_*}}, \quad \dot{\sigma}_2 \stackrel{\text{def}}{=} v_R + h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}}.$$

- Les vitesses des ondes de détente

$$\lambda_1^L \stackrel{\text{def}}{=} v_L - \sqrt{gh_L}, \quad \lambda_1^* \stackrel{\text{def}}{=} v_* - \sqrt{gh_*}, \quad \lambda_2^* \stackrel{\text{def}}{=} v_* + \sqrt{gh_*}, \quad \lambda_2^R \stackrel{\text{def}}{=} v_R + \sqrt{gh_R}.$$

- La solution dans une onde de détente

$$\mathbf{W}_{1-\text{det}}(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{9g} (v_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3} (v_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_{2-\text{det}}(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{9g} (-v_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3} (v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t}) \end{pmatrix}.$$

- Pour définir la solution en cas de zones sèches, on introduit de plus

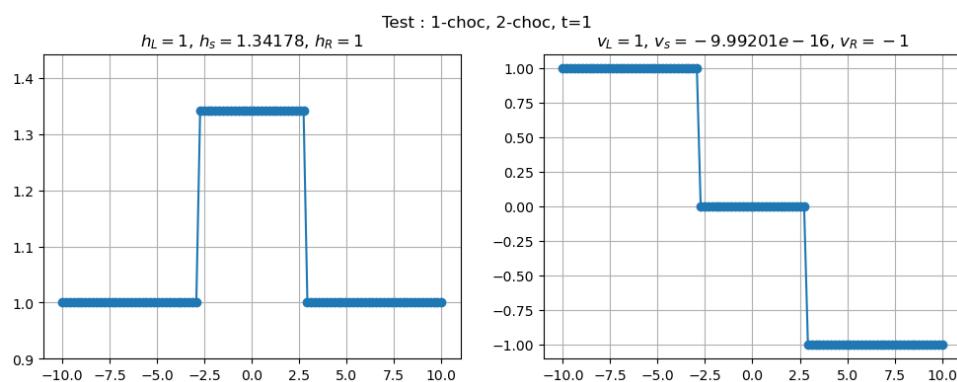
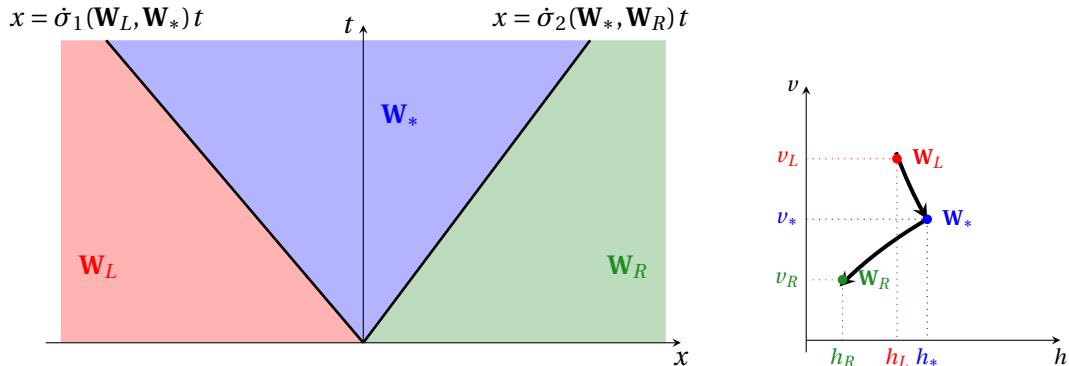
$$\mathcal{J}_1^L \stackrel{\text{def}}{=} v_L + 2\sqrt{gh_L}, \quad \mathcal{J}_2^R \stackrel{\text{def}}{=} v_R - 2\sqrt{gh_R}.$$

Étape III : solution complète

On peut avoir quatre structures différentes de la solution :

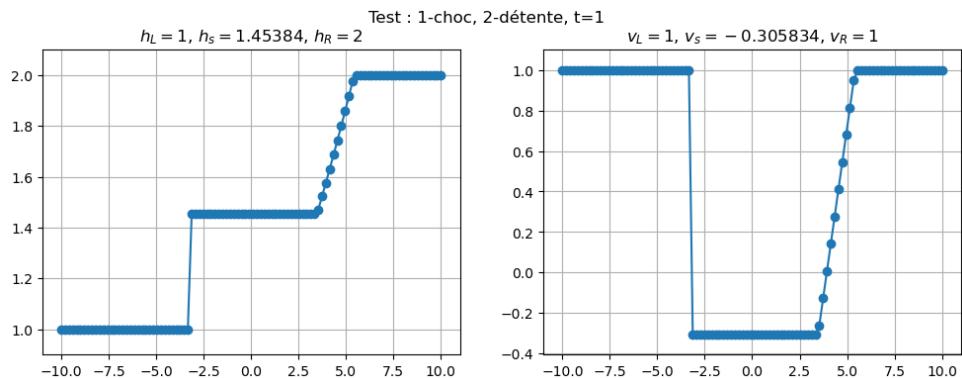
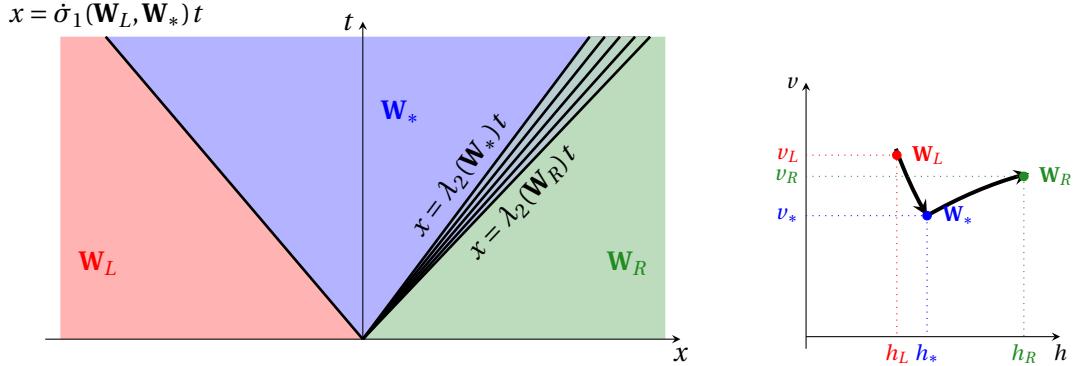
Cas 1) si $h_* > \max\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'un 1-choc et d'un 2-choc et s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1 t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \dot{\sigma}_1 t < x < \dot{\sigma}_2 t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2 t, \end{cases}$$



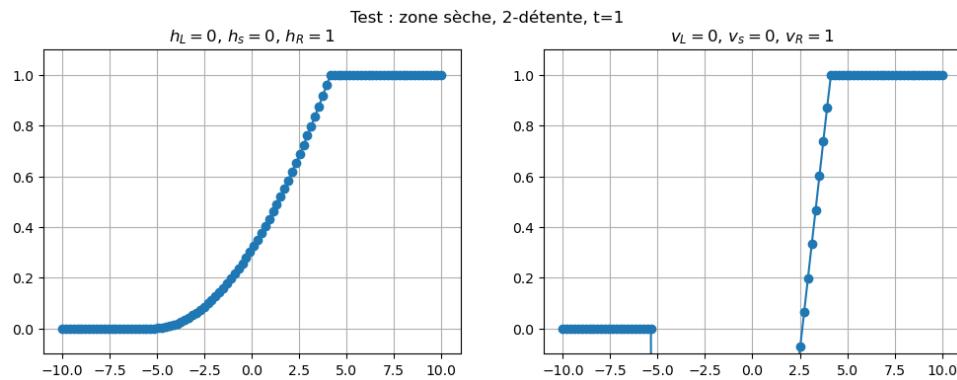
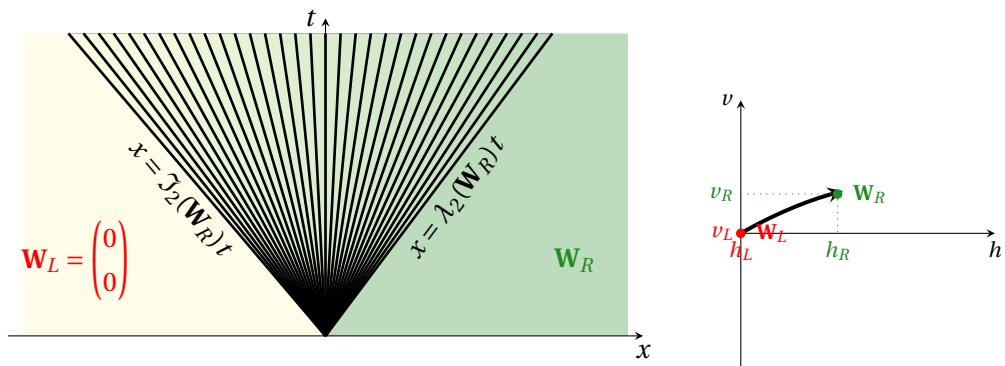
Cas 2) si $h_L < h_* < h_R$ la solution est composée d'un 1-choc et d'une 2-détente et s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1 t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \dot{\sigma}_1 t < x < \lambda_2^* t, \\ \mathbf{W}_{2-\text{det}}(t, x), & \text{si } \lambda_2^* t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t, \end{cases}$$



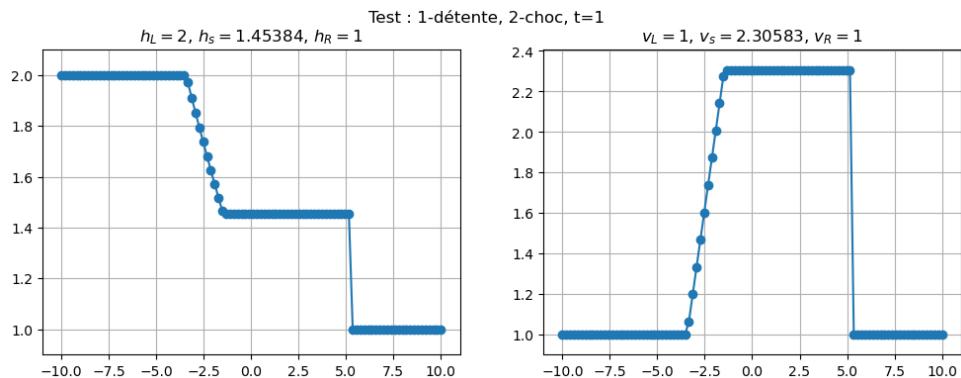
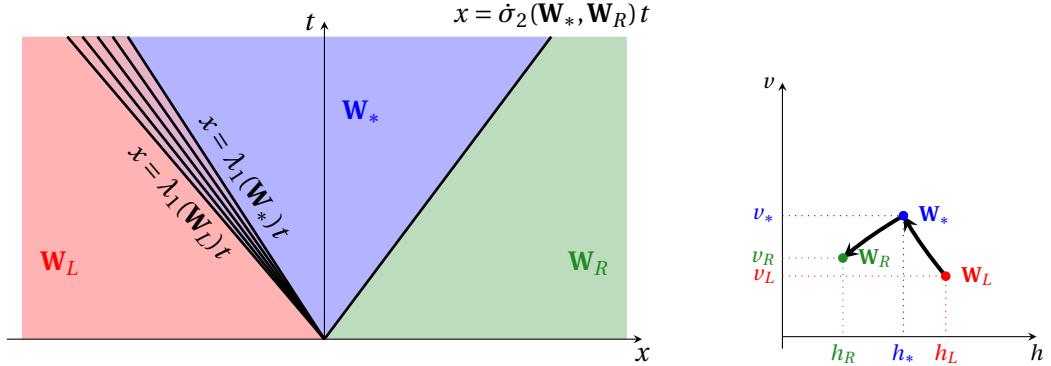
Remarque : si $h_L = 0$, il est naturel de considérer $v_L = 0$ et il n'y a qu'une 2-détente (la 1-onde de choc n'est pas définie). Dans ce cas la solution s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} (0, 0), & \text{si } x < \mathcal{J}_2^R t, \\ \mathbf{W}_{\text{det}}(t, x), & \text{si } \mathcal{J}_2^R t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t, \end{cases}$$



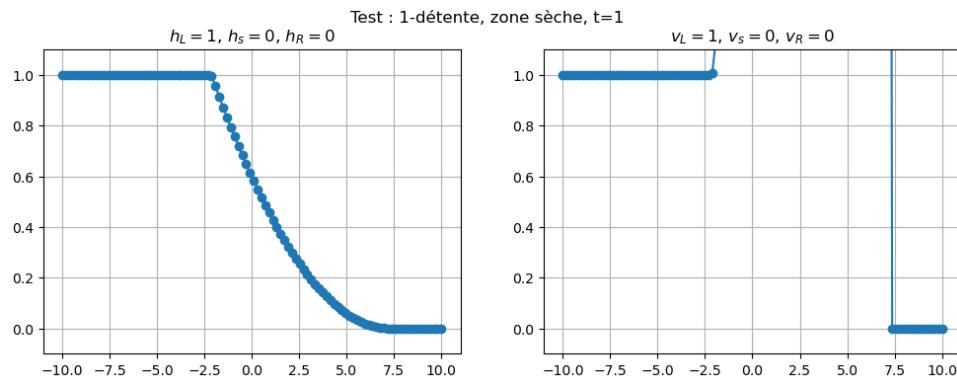
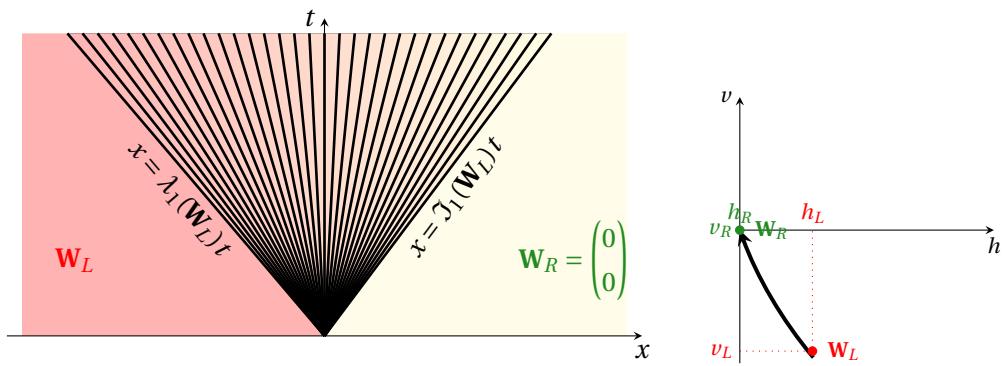
Cas 3) si $h_R < h_* < h_L$ la solution est composée d'une 1-détente et d'un 2-choc et s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{1-\text{det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \lambda_1^* t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \lambda_1^* t < x < \dot{\sigma}_2 t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2 t, \end{cases}$$



Remarque : si $h_R = 0$, il est naturel de considérer $v_R = 0$ et il n'y a qu'une 1-détente (la 2-onde de choc n'est pas définie). Dans ce cas la solution s'écrit

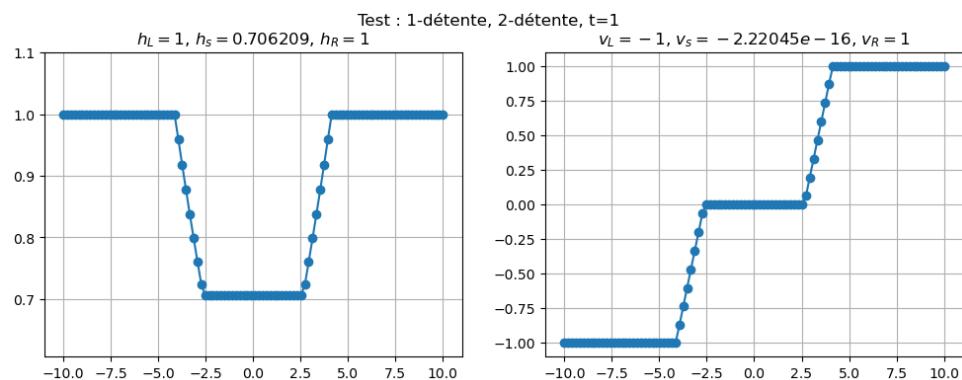
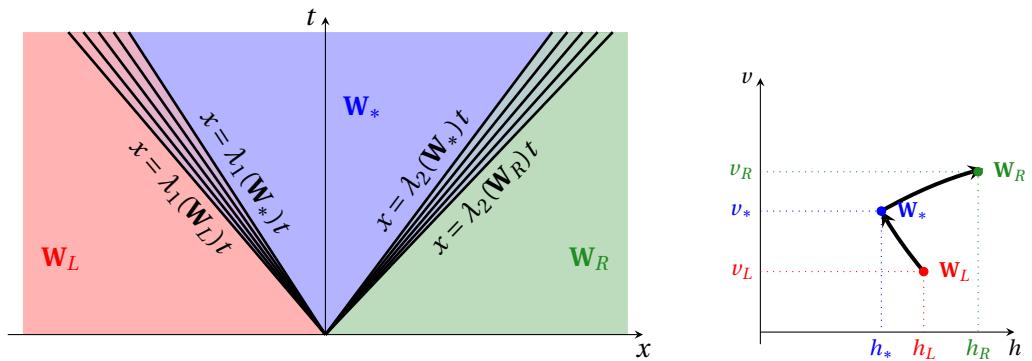
$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{\text{det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \tilde{\sigma}_1^L t, \\ (0, 0), & \text{si } x > \tilde{\sigma}_1^L t, \end{cases}$$



Cas 4) si $h_* < \min\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'une 1-détente et d'une 2-détente et il faut considérer deux sous-cas :

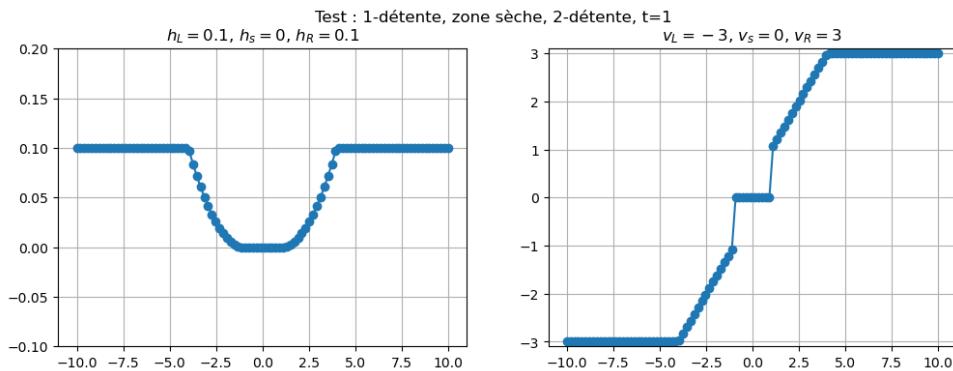
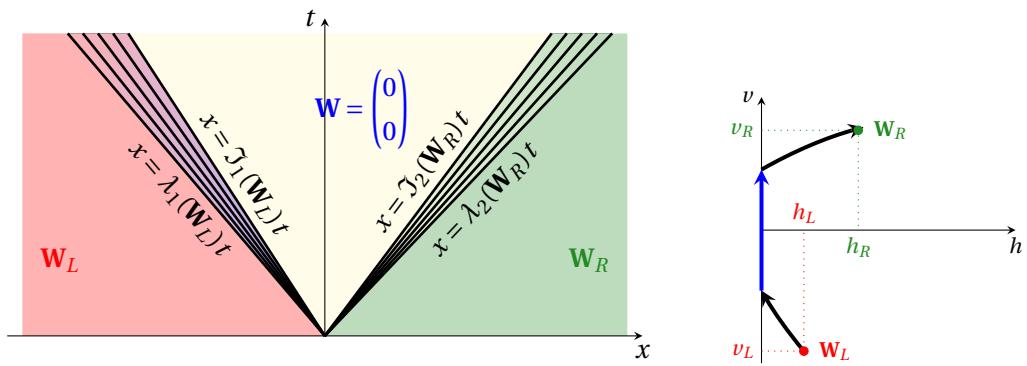
- si $v_R - v_L < 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L})$ alors $h_* > 0$ et la solution s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{1-\text{det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \lambda_1^* t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \lambda_1^* t < x < \lambda_2^* t, \\ \mathbf{W}_{2-\text{det}}(t, x), & \text{si } \lambda_2^* t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t \end{cases}$$



- Remarque : si $v_R - v_L \geq 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L})$, il faut introduire une zone "sèche" :

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{1-\text{det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \mathfrak{J}_1^L t, \\ (0, 0), & \text{si } \mathfrak{J}_1^L t < x < \mathfrak{J}_2^R t, \\ \mathbf{W}_{2-\text{det}}(t, x), & \text{si } \mathfrak{J}_2^R t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t \end{cases}$$



6.2.4. Annexe : entropie.

L'énergie totale E et le flux d'énergie G sont respectivement

$$E = \frac{hv^2 + gh^2}{2}, \quad G = \frac{hv^3}{2} + gh^2 v.$$

On peut calculer

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{2} + gh \\ hv \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{v^2}{2} + 2gh\right)(v + mt) \\ \frac{3}{2}hv^2 + gh^2 \end{pmatrix},$$

ainsi $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{W}} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{W}}$. Cela signifie que l'énergie totale est une *entropie* pour le système (6.1).

Pour établir la convexité de l'énergie, on calcule la matrice Hессienne :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{W}} \right)^T = \begin{pmatrix} g & v \\ v & h \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est définie strictement positive (et donc l'entropie est strictement convexe) si et seulement si $v^2 < gh$.

Soit (h_g, v_g) et (h_d, v_d) deux états et notons $\llbracket \star \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \star_d - \star_g$ le saut. Puisqu'un choc entropique se propage en vérifiant la condition de Rankine-Hugoniot : $\llbracket hv \rrbracket = \llbracket h \rrbracket \dot{\sigma}_k$ et $\llbracket hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \rrbracket = \llbracket hv \rrbracket \dot{\sigma}_k$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} \llbracket E \rrbracket &= \frac{1}{2} \llbracket hv^2 + gh^2 \rrbracket = \frac{1}{2} \llbracket hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \rrbracket + \frac{g}{4} \llbracket h^2 \rrbracket \\ &= \frac{1}{2} \llbracket hv \rrbracket \dot{\sigma}_k + \frac{g}{4} (h_d + h_g) \llbracket h \rrbracket = \frac{1}{2} \llbracket h \rrbracket \left(\dot{\sigma}_k^2 + \frac{g}{2} (h_d + h_g) \right). \end{aligned}$$

Pour un 1-choc, la condition d'admissibilité de Lax demande à ce que $\llbracket h \rrbracket > 0$ (i.e. $h_* > h_L$), ce qui implique $\llbracket E \rrbracket > 0$. Dans ce cas, les vitesses du flux relatives au choc sont

$$v_L - \dot{\sigma}_1 = \sqrt{g \frac{h_L + h_*}{2} \frac{h_*}{h_L}} > 0, \quad v_* - \dot{\sigma}_1 = \sqrt{g \frac{h_L + h_*}{2} \frac{h_L}{h_*}} > 0.$$

Des deux cotés, la vitesse du flux relative au choc est positive, ainsi l'énergie totale E décroît du pre-choc (l'état gauche) vers le post-choc (état intermédiaire).

De la même manière, pour un 2-choc on a $\llbracket h \rrbracket < 0$ (i.e. $h_* > h_R$) donc $\llbracket E \rrbracket < 0$ et les vitesses du flux relatives au choc sont

$$v_* - \dot{\sigma}_2 = -\sqrt{g \frac{h_R + h_*}{2} \frac{h_R}{h_*}} > 0, \quad v_R - \dot{\sigma}_2 = -\sqrt{g \frac{h_R + h_*}{2} \frac{h_*}{h_R}} < 0.$$

Des deux cotés, la vitesse du flux relative au choc est négative, ainsi l'énergie totale E croît du pre-choc (l'état intermédiaire) vers le post-choc (état droit).

Un système hyperbolique avec des champs linéairement dégénérés

Soit $a > 0$ une constante fixée et considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + a^2 \partial_x \varrho = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Exercice 7.1

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasolinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ ne dépend pas de \mathbf{W} et s'écrit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres (qui ne dépendent pas de \mathbf{W}) λ_1 et λ_2 . Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1 < \lambda_2$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 de la matrice \mathbb{A} . En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact.)
5. Proposer un choix pour \mathfrak{I}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique, $k = 1, 2$.
6. *Étude des discontinuités de contact.*
 - 6.1. Soit une onde de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Calculer $\dot{\varrho}_1$ sa vitesse de propagation.
 - 6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (ϱ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, u_L) et un état droit (ϱ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ϱ_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

Correction

1. a étant une constante, on a directement

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \varrho \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} u \\ a^2 \varrho \end{pmatrix}.$$

2. Si on pose $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ (autrement dit, si on choisit comme vecteur pour l'écriture non conservative le même

vecteur des variables de l'écriture conservative), le système quasolinéaire s'écrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varrho \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \varrho \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche les 2 solutions λ_k de l'équation $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbf{Id}) = 0$, i.e. de l'équation

$$(-\lambda)^2 - a^2 = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = a.$$

Puisque par hypothèse $a > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système est strictement hyperbolique.

On peut prendre

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

4. Pour déterminer la nature des deux champs on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$. Comme les valeurs propres ne dépendent pas de \mathbf{W} , leurs gradients sont nuls et les champs caractéristiques sont donc linéairement dégénérés
5. Cherchons les invariants de Riemann. Comme $p = 2$ on doit trouver $p - 1 = 1$ invariant de Riemann pour chaque champ caractéristique.

Pour cela il faut tout d'abord trouver un vecteur $\mathbb{I}(\mathbf{W})$ pour lequel le système est diagonal, autrement-dit on cherche un vecteur $\mathbb{I}(\mathbf{W})$ tel que

$$\partial_t \mathbb{I} + \mathbb{D} \partial_x \mathbb{I} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on notera \mathfrak{I}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Dans le champ $k = 1$ c'est la composante \mathbb{I}_2 qui est un invariant et dans le champ $k = 2$ c'est la composante \mathbb{I}_1 qui est un invariant ainsi on notera

$$\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = \mathbb{I}_2, \quad \mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = \mathbb{I}_1$$

avec $(\nabla \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$.

MÉTHODE 1 : pour des champs VNL, la k -ième valeur propre est un k -invariant de Riemann, donc d'habitude on pose directement $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = \lambda_1$ et $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = \lambda_2$. Cependant, dans cet exemple particulier, les valeurs propres sont constantes, ce qui ne nous donne aucun information utile.

MÉTHODE 2 : Les relations définissant les invariants de Riemann $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ sont $(\nabla \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (\nabla \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \mathfrak{I}_1}{\partial \varrho} \times (-1) + \frac{\partial \mathfrak{I}_1}{\partial u} \times a \\ (\nabla \mathfrak{I}_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \mathfrak{I}_2}{\partial \varrho} \times 1 + \frac{\partial \mathfrak{I}_2}{\partial u} \times a \end{aligned}$$

autrement dit

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \varrho} - a \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial u} = 0, & \rightsquigarrow \mathcal{J}_1(\mathbf{W}) = u + a\varrho, \\ \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \varrho} + a \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial u} = 0, & \rightsquigarrow \mathcal{J}_2(\mathbf{W}) = u - a\varrho. \end{cases}$$

MÉTHODE 3 : on cherche une combinaison linéaire “astucieuse” des équations pour obtenir cette forme diagonale.

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + a^2 \partial_x \varrho = 0, \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + aL_1 \end{array}} \begin{cases} \partial_t(u - a\varrho) - a\partial_x(u - a\varrho) = 0, \\ \partial_t(u + a\varrho) + a\partial_x(u + a\varrho) = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \mathbb{I}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u - a\varrho \\ u + a\varrho \end{pmatrix}.$$

MÉTHODE 4 : si on note

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) = [\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) | \mathbf{r}_2(\mathbf{W})]$$

la matrice de changement de base (qui transforme le système en \mathbf{W} en le système diagonale), alors

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Ici

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -a & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial \varrho} = -\frac{1}{2}, & \rightsquigarrow \mathbb{I}_1(\mathbf{W}) = \int -\frac{1}{2} d\varrho + f(u) = -\frac{1}{2}\varrho + f(u) \\ & \rightsquigarrow \frac{1}{2a} = \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial u} = f'(u) \rightsquigarrow f(u) = \frac{1}{2a}u \rightsquigarrow \mathbb{I}_1(\mathbf{W}) = -\frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2a}u = \frac{u - a\varrho}{2a} \\ \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial \varrho} = \frac{1}{2}, & \rightsquigarrow \mathbb{I}_2(\mathbf{W}) = \int \frac{1}{2} d\varrho + f(u) = \frac{1}{2}\varrho + f(u) \\ & \rightsquigarrow \frac{1}{2a} = \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial u} = f'(u) \rightsquigarrow f(u) = \frac{1}{2a}u \rightsquigarrow \mathbb{I}_2(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2a}u = \frac{u + a\varrho}{2a} \end{aligned}$$

ce qui donne par exemple le vecteur

$$\mathbb{I}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u - a\varrho \\ u + a\varrho \end{pmatrix}.$$

Bien noter que \mathbb{I} dépend de \mathbf{W} .

6. Étude des discontinuités de contact.

6.1. Considérons le 1-champ.

C'est un champ linéairement dégénéré, donc on a une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse $\dot{\sigma}_1 = \lambda_1(\mathbf{W}_L) = \lambda_1(\mathbf{W}_*) = -a$.

Pour trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_* , on peut utiliser

- soit les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} -a = \dot{\sigma}_1 = \frac{u_* - u_L}{\varrho_* - \varrho_L} \rightsquigarrow -a(\varrho_* - \varrho_L) = u_* - u_L \\ -a = \dot{\sigma}_1 = \frac{a^2 \varrho_* - a^2 \varrho_L}{u_* - u_L} \end{cases}$$

- soit la conservation de l'invariant de Riemann $\mathcal{J}_1(\mathbf{W})$ à la traversée de la discontinuité :

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{W}_L) = \mathcal{J}_1(\mathbf{W}_*) \rightsquigarrow \mathbb{I}_2(\mathbf{W}_L) = \mathbb{I}_2(\mathbf{W}_*) \rightsquigarrow u_L + a\varrho_L = u_* + a\varrho_*,$$

On obtient

$$u_*(\rho_*) = u_L + a(\rho_L - \rho_*)$$

6.2. Considérons le 2-champ.

C'est aussi un champ linéairement dégénéré, donc on a une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse $\dot{\sigma}_2 = \lambda_2(\mathbf{W}_*) = \lambda_2(\mathbf{W}_R) = a$.

Pour trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_* et un état droit \mathbf{W}_R , on peut utiliser

- soit les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} a = \dot{\sigma}_2 = \frac{u_R - u_*}{\rho_R - \rho_*} \rightsquigarrow a(\rho_R - \rho_*) = u_R - u_* \\ a = \dot{\sigma}_2 = \frac{a^2 \rho_R - a^2 \rho_*}{u_R - u_*} \end{cases}$$

- soit la conservation de l'invariant de Riemann $\mathcal{I}_2(\mathbf{W})$ à la traversée de la discontinuité :

$$\mathcal{I}_2(\mathbf{W}_*) = \mathcal{I}_2(\mathbf{W}_R) \rightsquigarrow \mathbb{I}_1(\mathbf{W}_*) = \mathbb{I}_1(\mathbf{W}_R) \rightsquigarrow u_* - a\rho_* = u_R - a\rho_R.$$

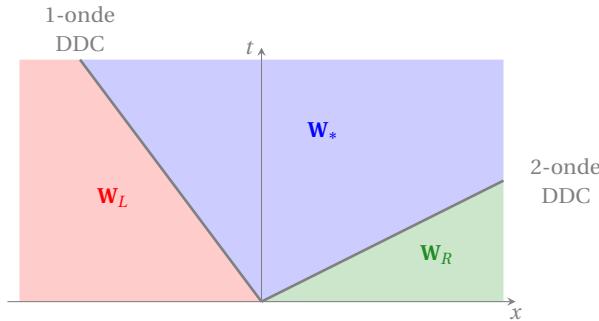
On obtient

$$u_*(\rho_*) = u_R - a(\rho_R - \rho_*)$$

7. Solution du problème de Riemann. Soit un problème de Riemann avec les deux états donnés suivants :

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

Pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R donnés, on construit une solution composée de deux ondes séparant trois états constant : \mathbf{W}_L , \mathbf{W}_* et \mathbf{W}_R . Les deux ondes sont des discontinuités de contact.



Pour expliciter cette solution on doit définir :

- les vitesses des discontinuités de contact $\dot{\sigma}_1$ et $\dot{\sigma}_2$,
- l'état constant intermédiaire $\mathbf{W}_* = \begin{pmatrix} \rho_* \\ u_* \end{pmatrix}$.

Étape I : calcul de l'état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$

- L'état intermédiaire (ρ_*, u_*) peut être relié à l'état de gauche (ρ_L, u_L) par une 1-DDC et l'on a $u_* = u_L + a(\rho_L - \rho_*)$,
- ce même état peut être relié à l'état de droite (ρ_R, u_R) par une 2-DDC et l'on a $u_* = u_R - a(\rho_R - \rho_*)$.

Pour calculer ρ_* on doit donc résoudre $u_L + a(\rho_L - \rho_*) = u_R - a(\rho_R - \rho_*)$ ce qui donne

$$\rho_* = \frac{u_L - u_R + a(\rho_L + \rho_R)}{2a} = \frac{\rho_R + \rho_L}{2} - \frac{u_R - u_L}{2a}.$$

Ensuite u_* est déduit de ϱ_* , par exemple par $u_* = u_L + a(\varrho_L - \varrho_*)$, ce qui donne

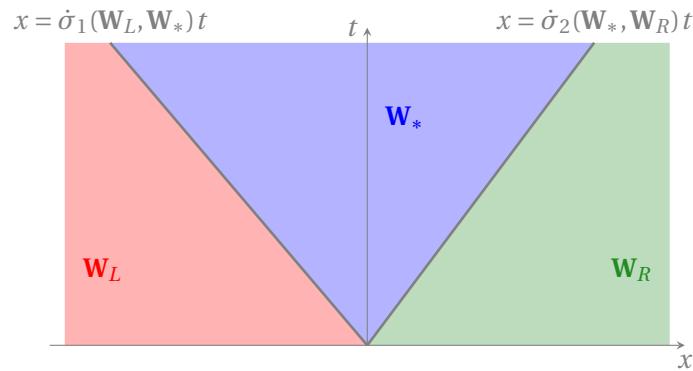
$$u_* = \frac{u_L + u_R}{2} - \frac{a(\varrho_R - \varrho_L)}{2}$$

Étape II : calcul des vitesses des ondes Il n'y a que des discontinuités de contact. Leurs vitesses sont

$$\dot{\sigma}_1 \stackrel{\text{def}}{=} -a, \quad \dot{\sigma}_2 \stackrel{\text{def}}{=} a.$$

Étape III : solution complète. La solution est composée d'une 1-ddc et d'une 2-ddc et s'écrit

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1 t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \dot{\sigma}_1 t < x < \dot{\sigma}_2 t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2 t, \end{cases}$$



8.

Systèmes hyperboliques de lois de conservations : méthodes numériques (volumes finies)

Dans ce dernier chapitre on s'intéresse à la résolution de problèmes de Riemann associés aux systèmes hyperboliques non-linéaires en une dimension d'espace. Plus précisément, on cherche une fonction

$$\begin{aligned}\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \mathbf{W}(t, x)\end{aligned}$$

qui vérifie (au sens faible) le système d'EDPs

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{W}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathbf{W}_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{W}(x, t^n) dx \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) \approx \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{j+1/2}, t^n)).$$

On considère des schémas Volumes Finis :

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[\mathbf{G}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{G}(\mathbf{W}_{j-1}^n, \mathbf{W}_j^n) \right],$$

à savoir

le schéma de Lax-Friedrichs

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \frac{\Delta x}{\Delta t^n} (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{2}$$

le schéma de Rusanov

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b})}{2} - c \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$$

le schéma HLL

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{a}) & \text{si } c_1 \geq 0 \\ \frac{c_2 \mathbf{F}(\mathbf{a}) - c_1 \mathbf{F}(\mathbf{b})}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) & \text{si } c_1 < 0 < c_2 \\ \mathbf{F}(\mathbf{b}) & \text{si } c_2 \leq 0 \end{cases}$$

où

$$c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max_{k=1, \dots, p} \{ |\lambda_k(\mathbf{a})|, |\lambda_k(\mathbf{b})| \} \quad c_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{k=1, \dots, p} \{ \lambda_k(\mathbf{a}), \lambda_k(\mathbf{b}) \} \quad c_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max_{k=1, \dots, p} \{ \lambda_k(\mathbf{a}), \lambda_k(\mathbf{b}) \}$$

On associe à ces schémas la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lowy

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{2 \max_{j \in \mathbb{Z}} \{ |\lambda_1(\mathbf{W}_j^n)|, \dots, |\lambda_p(\mathbf{W}_j^n)| \}}.$$

Exercice 8.1

Implémenter les schémas et les vérifier sur le problème de l'exercice 7.1 en comparant à la solution exacte.

Suggestion : modifier le notebook qui compare solution exacte vs solution approchée pour l'exemple de Saint-Venant.

Exercice 8.2 (Projets)

Choisir un sujet parmi les sujets proposés.

Pour le 11 novembre 2024 : déposer sur Moodle **un rapport pdf et un fichier py (ou dans un autre langage de programmation)**.

- **Rapport** : il s'agit de détailler la **solution exacte des problèmes de Riemann** associés au système hyperbolique donné (on pourra suivre le canevas utilisé pour le système de Saint-Venant).
- **Code source** : écrire un programme qui implémente un schéma d'approximation VF et le valider à l'aide de la **solution exacte** pour un problème de Riemann calculée au point précédent.

Voici quelque schéma VF : schémas de Rusanov, de Godunov, HLL ou HLLE ou HLLEC ou HLLEM; schémas de type Lax-Wendroff : Ritchmeyer (sans et avec dissipation artificielle), MacCormack (sans et avec dissipation artificielle); schéma Steger-Warming, de Van Leer, de Roe, de Glimm.

Liste des projets

Devoir maison : choisir un sujet parmi ceux proposés. Pour vous aider dans le choix, je classe la difficulté de chaque étude selon le type d'ondes impliquées :

- ① tous les champs sont LD
 - ② un champs LD, un champ VNL
 - ③ deux champs VNL
 - ④ deux champs VNL, un champ LD (éventuellement associé à une valeur propre double)
 - ⑤ système non autonome (ondes non affines)
-



Nous avons illustré la résolution du problème de Riemann pour deux systèmes de $p = 2$ équations :

Exemple 1. le système de SAINT-VENANT associé à 2 champs caractéristiques vraiment non-linéaires

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x\left(hv^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = 0, \end{cases}$$

(les ondes associées à chacun de ces 2 champs ne peuvent être que des ondes de choc ou de détente) ;

Exemple 2. un système hyperbolique associé à 2 champs caractéristiques linéairement dégénérés

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + a^2 \partial_x \rho = 0. \end{cases}$$

(les ondes associées à chacun de ces 2 champs ne peuvent être que des discontinuités de contact).



Pour le 19 décembre 2025 : déposer sur Moodle **un rapport pdf et un fichier py ou ipynb**.

- **Rapport** : détailler la **solution exacte des problèmes de Riemann** associés au système hyperbolique donné (suivre le canevas utilisé pour les deux systèmes d'exemple).
- **Code source** : écrire un programme qui implémente un schéma d'approximation VF et le valider à l'aide de la **solution exacte** pour un problème de Riemann calculée au point précédent.

Projet 3. système de Saint-Venant par relaxation

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2 u) = \mu h\left(\frac{g}{2}h^2 - \pi\right), \end{cases}$$

Projet 4.  modèle de Ripa

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta\right) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0. \end{cases}$$

Projet 5.  modèle de Ripa par relaxation

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \pi\theta\right) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2u) = \mu h\left(\frac{g}{2}h^2 - \pi\right), \end{cases}$$

Projet 6.  système de SAINT-VENANT avec une loi de frottement de type Mohr-Coulomb

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = mh. \end{cases}$$

◆

Projet 7.  p-système isotherme

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \quad p(\varrho) = a^2 \varrho.$$

Projet 8.  p-système isotherme, relaxation en pression

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\varrho \pi) + \partial_x(\varrho \pi u + c^2 u) = \mu \varrho(p(\varrho) - \pi). \end{cases}$$

Projet 9.  système de l'acoustique fortement non linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_x(\varrho uv) = 0, \end{cases} \quad p(\varrho) = a^2 \varrho.$$

Projet 10.  p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad p(\tau) = 1/\tau.$$

Projet 11.  p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes, relaxation en pression :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_t \pi + \partial_x(c^2 u) = \mu(p(\tau) - \pi). \end{cases}$$

Projet 12. \blacksquare système de l'acoustique fortement non linéaire en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \\ \partial_t v = 0, \end{cases} \quad p(\tau) = a^2/\tau.$$

Projet 13. \blacksquare modèle $\tau u v \pi$:

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x v = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_t v + \frac{a}{b} \partial_x \pi = 0 \\ \partial_t \pi + ab \partial_x v = 0. \end{cases}$$

Projet 14. \blacksquare p-système isotherme avec friction

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho u) = 0, \\ \partial_t (\varrho u) + \partial_x (\varrho u^2 + p(\varrho)) = m\varrho, \end{cases} \quad p(\varrho) = a^2 \varrho.$$



Projet 15. \blacksquare p-système isentrope

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho u) = 0, \\ \partial_t (\varrho u) + \partial_x (\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \quad p(\varrho) = \varrho^\gamma.$$

Projet 16. \square p-système isentrope, relaxation en volume

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho u) = 0, \\ \partial_t (\varrho u) + \partial_x (\varrho u^2 + \pi(\varrho, V)) = 0, \\ \partial_t (\varrho V) + \partial_x (\varrho u V) = \mu \varrho \left(\frac{1}{\varrho} - V \right), \end{cases} \quad \pi(\varrho, V) = p \left(\frac{1}{V} \right) - a^2 \left(\frac{1}{\varrho} - V \right)$$

Projet 17. \blacksquare mélange diphasique isentrope

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho u) = 0, \\ \partial_t (\varrho u) + \partial_x (\varrho u^2 + p(\varrho, c)) = 0, \\ \partial_t (\varrho c) + \partial_x (\varrho u c) = 0, \end{cases} \quad p(\varrho, c) = (c\varrho)^2 + ((1-c)\varrho)^2.$$

Projet 18. \blacksquare p-système isentrope en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad p(\tau) = \tau^{-\gamma}.$$

Projet 19. \square p-système isentrope en coordonnées Lagrangiennes, relaxation en volume

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi(\tau, V) = 0, \\ \partial_t V = \mu(\tau - V), \end{cases}$$

Projet 20. mélange diphasique isentrope en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau, c) = 0, \\ \partial_t c = 0, \end{cases} \quad p(\tau, c) = \left(\frac{c}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{1-c}{\tau}\right)^2.$$



Projet 21. p-système isentrope avec la loi d'état de Chaplygin

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho u) = 0, \\ \partial_t (\varrho u) + \partial_x (\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \quad p(\varrho) = -\frac{A}{\varrho}.$$

Projet 22. p-système isentrope avec une loi d'état logarithmique

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho u) = 0, \\ \partial_t (\varrho u) + \partial_x (\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \quad p(\varrho) = A \ln(\varrho).$$



Projet 23. modélisation des écoulements sanguins

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + e A^{3/2} \right) = 0. \end{cases}$$



Projet 24. système de Aw et RASCLE en ϱ - w

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (w \varrho - w^2) = 0, \\ \partial_t (w \varrho) + \partial_x (w^2 \varrho - w \varrho^2) = 0. \end{cases}$$

Projet 25. système de Aw et RASCLE

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho u) = 0, \\ \partial_t (\varrho (u + p(\varrho))) + \partial_x (\varrho u (u + p(\varrho))) = 0, \end{cases}$$



Projet 26. système uv

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{au}{u+v} \right) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \left(\frac{bv}{u+v} \right) = 0, \end{cases}$$

Projet 27. système uv bis

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x ((u^2 + v^2) u) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x ((u^2 + v^2) v) = 0, \end{cases}$$

ANNEXE : ÉQUATIONS SCALAIRES LINÉAIRES (TRANSPORT)

A.

Équations linéaires : théorie mathématique (méthode des caractéristiques)

On commence par étudier une EDP hyperbolique scalaire ($p = 1$) monodimensionnelle ($d = 1$) dans le cas linéaire ($q(w) = cw$).

On cherche l'unique fonction

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto w(t, x) \end{aligned}$$

solution (faible) de

$$\begin{cases} \partial_t w + c\partial_x w = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(0, x) = w_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

On généralisera au cas d'une vitesse non constante et d'un terme source linéaire :

$$\partial_t w + a(t, x)\partial_x w + b(t, x)w = f(t, x)$$

puis au cas d'un domaine (semi-)borné.

A.1. Méthode des caractéristiques dans \mathbb{R}

L'idée de la méthode des caractéristiques est de transformer la résolution d'une EDP en la résolution d'une famille d'EDO. Chaque EDO est obtenue en considérant la restriction de l'EDP à une courbe dite *courbe caractéristique* : le long des courbes caractéristiques l'EDP devient une EDO qui doit être simple à résoudre.

A.1.1. Équation linéaire homogène à vitesse constante : équation de transport

Soit $c \neq 0$ une constante. On cherche la fonction

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto w(t, x) \end{aligned}$$

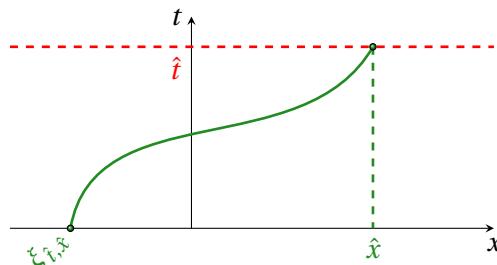
solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t w + c \partial_x w = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}; \\ w(t=0, x) = w_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Courbes caractéristiques Soit $\hat{t} > 0$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}$ fixés. Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une particule située en \hat{x} à l'instant \hat{t} dans un flux de vitesse c :

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = c, & t > 0, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La courbe $(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))$ est appelée *courbe caractéristique* passant par le point (\hat{t}, \hat{x}) . On notera le pied de la caractéristique $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)$.

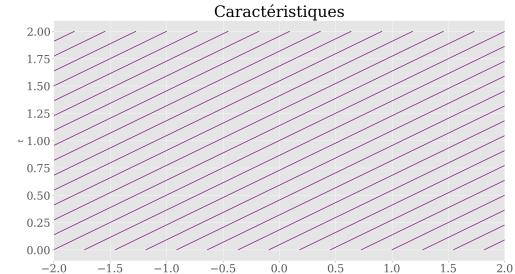


En résolvant le problème de Cauchy (A.1) on trouve

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = ct + \hat{x} - c\hat{t}, \quad (\text{A.2})$$

et donc

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \hat{x} - c\hat{t}. \quad (\text{A.3})$$



Famille d'EDOs Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + c \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = 0,$$

autrement dit

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \text{constante} = W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = w(0, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) = w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}). \quad (\text{A.4})$$

Calcul de la solution Si on prend $t = \hat{t}$ on a

$$w(\hat{t}, \hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) \stackrel{(\text{A.4})}{=} w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) \stackrel{(\text{A.3})}{=} w_{\text{init}}(\hat{x} - c\hat{t}).$$

Cette relation est vraie pour tout $\hat{t} > 0$ et tout $\hat{x} \in \mathbb{R}$ par conséquent

$$w(t, x) = w_{\text{init}}(x - ct).$$

Remarque 12 (Domaine de dépendance) Notons que la solution de l'équation linéaire d'advection a la propriété suivante : la solution w en (\hat{t}, \hat{x}) ne dépend des données initiales w_{init} qu'en un seul point, à savoir le point $\xi_{\hat{t}, \hat{x}}$ qui se trouve sur la caractéristique passant par (\hat{t}, \hat{x}) . Ceci signifie que nous pouvons changer les données initiales en tout autre point que $\xi_{\hat{t}, \hat{x}}$ sans affecter la solution en (\hat{t}, \hat{x}) . L'ensemble $\mathcal{D}_{\hat{t}, \hat{x}} = \{\xi_{\hat{t}, \hat{x}}\}$ (ici réduit à un singleton) est appelé domaine de dépendance du point (\hat{t}, \hat{x}) .

Remarque 13 (Solution non régulière \rightsquigarrow forme intégrale \rightsquigarrow solution faible) Dans les manipulations effectuées ci-dessus, nous avons supposé que $w(t, x)$ était différentiable en tout point, en particulier pour $t = 0$. Si w_{init} est non différentiable en un point, alors **w n'est plus une solution classique (=forte) de l'équation différentielle** partout. Cependant, **cette fonction satisfait la forme intégrale de la loi de conservation** :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} w(t, x) dx = q(w(t, x_1)) - q(w(t, x_2)).$$

Cette version de la loi de conservation a un sens même pour w non régulière. De plus, d'un point de vue *modélisation*, on peut même dire que la forme intégrale est "plus fondamentale" physiquement que l'équation différentielle, car cette dernière a été dérivée de la forme intégrale sous l'hypothèse supplémentaire de régularité. Il est donc tout à fait logique de chercher une solution "généralisée" comme une fonction résolvant la loi de conservation (au sens faible).

Remarque 14 (Donnée initiale non régulière) D'après notre observation sur la notion de solution faible, nous pouvons donc chercher une "solution" à l'EDP même si w_{init} est une fonction non régulière. De plus, on a déjà remarqué que la solution le long d'une courbe caractéristique ne dépend que de la seule valeur $w_{\text{init}}(\xi = x - ct)$. Il est donc clair que la construction que nous avons décrite pour une donnée initiale régulière s'étend directement à ce cas. Plus précisément, si w_{init} présente une singularité en un point x_0 (soit elle est discontinue soit une de ses dérivées est discontinue), alors la fonction $w(t, x)$ résultante présentera une singularité du même ordre le long de la courbe caractéristique de pied x_0 , mais restera régulière le long des caractéristiques qui ont pied dans les parties régulières de w_{init} .

Il s'agit d'une propriété fondamentale des équations hyperboliques linéaires : **les singularités se propagent uniquement le long des caractéristiques**.

Remarque 15 (Donnée initiale non régulière \rightsquigarrow "viscosité évanescante") Une autre approche, dite de "viscosité évanescante" et qui se généralise aux équations non linéaires, consiste à modifier l'EDP en ajoutant un petit terme diffusif. Rappelons que la loi de conservation $\partial_t w + c\partial_x w = 0$ doit être considérée comme une approximation de l'équation d'advection-diffusion $\partial_t w + c\partial_x w = \epsilon\partial_{xx} w$ pour ϵ très petit. Notons $w_\epsilon(t, x)$ la solution de l'équation d'advection-diffusion avec la donnée initiale $w_{\text{init}}(x)$, alors $w_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ même si w_{init} n'est pas régulière puisque c'est une équation parabolique. On peut alors prendre la limite de $w_\epsilon(t, x)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$ et on obtiendra la même solution généralisée $w(t, x)$ que précédemment.

A.1.2. Première généralisation : coefficient d'advection dépendant de l'espace

On peut considérer une équation d'advection avec un coefficient c qui n'est plus constant mais dépend de x :

$$\partial_t w + \partial_x(c(x)w) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \partial_t w + c(x)\partial_x w = -c'(x)w.$$

Courbes caractéristiques Soit $\hat{t} > 0$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}$ fixés. Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une particule située en \hat{x} à l'instant \hat{t} dans un flux de vitesse $c(x)$:

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = c(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), & t > 0, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Famille d'EDOs Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + c(x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= -c'(x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= -c'(x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \end{aligned}$$

Exercice A.1

Soit $c(x) = x$. Calculer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(c(x)u) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = x^4 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Correction

On a

$$\partial_t u + \partial_x(c(x)u) = 0 \rightsquigarrow \partial_t u + c(x)\partial_x u = -c'(x)u \rightsquigarrow \partial_t u + x\partial_x u = -u$$

et $u(0, x) = x^4$.

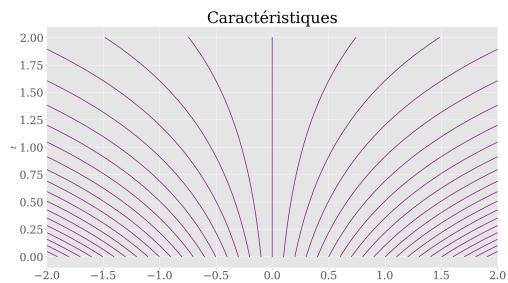
Soit $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ un point fixé.

Courbe caractéristique qui passe par (\hat{t}, \hat{x}) :

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t), \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}, \end{cases} \rightsquigarrow \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x}e^{t-\hat{t}}$$

Le pied de la caractéristique est

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = \hat{x}e^{-\hat{t}}.$$



Restriction de la fonction u à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$U_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$\begin{cases} U'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = -U_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \\ U_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = (\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0))^4 = (\xi_{\hat{t}, \hat{x}})^4. \end{cases} \rightsquigarrow U_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = U_{\hat{t}, \hat{x}}(0)e^{-t} = \xi_{\hat{t}, \hat{x}}^4 e^{-t} \rightsquigarrow U_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}}^4 e^{-\hat{t}}.$$

La solution est donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = U_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \xi_{\hat{t}, \hat{x}}^4 e^{-\hat{t}} = (\hat{x} e^{-\hat{t}})^4 e^{-\hat{t}} \rightsquigarrow u(t, x) = x^4 e^{-5t}.$$

Vérifions que la fonction obtenue est bien solution du problème de Cauchy :

$$u(0, x) = x^4 \quad \text{et} \quad \partial_t u + x \partial_x u = -5x^4 e^{-5t} + x \times 4x^3 e^{-5t} = -x^4 e^{-5t} = -u.$$

A.1.3. Généralisations : vitesse non constante et/ou terme source

Nous allons maintenant considérer le cas plus général d'une EDP de la forme

$$\partial_t w + a(t, x) \partial_x w + b(t, x) w = f(t, x).$$

Exercice A.2 (Première variante : terme source linéaire à coefficients constants)

Considérons maintenant l'EDP

$$\partial_t w + c \partial_x w = Aw + B$$

avec $A > 0$ et B deux constantes, sans modifier ni la condition initiale ni le domaine de définition.
Calculer la nouvelle solution.

Correction

La vitesse est toujours constante, par conséquent la partie relative au calcul des courbes caractéristiques reste inchangée.

Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons à nouveau la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique (A.2) associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

Cette fois-ci on obtient l'EDO

$$W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = AW_{\hat{t}, \hat{x}}(t) + B, \tag{A.6}$$

dont la solution générale s'écrit

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = -\frac{B}{A} + C_1 e^{At}.$$

En prenant en compte la condition initiale $W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}})$ on trouve

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \left(W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) + \frac{B}{A} \right) e^{At} - \frac{B}{A} = \left(w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A} \right) e^{At} - \frac{B}{A}. \tag{A.7}$$

Si on prend $t = \hat{t}$ on a

$$w(\hat{t}, \hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) \stackrel{(A.7)}{=} \left(w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A} \right) e^{A\hat{t}} - \frac{B}{A} \stackrel{(A.3)}{=} \left(w_{\text{init}}(\hat{x} - c\hat{t}) + \frac{B}{A} \right) e^{A\hat{t}} - \frac{B}{A}$$

et donc

$$w(t, x) = \left(w_{\text{init}}(x - ct) + \frac{B}{A} \right) e^{At} - \frac{B}{A}.$$

Exercice A.3 (Deuxième variante : vitesse non constante)

Considérons maintenant l'EDP

$$\partial_t w + a(t, x) \partial_x w = 0.$$

Sans modifier la condition initiale ni le domaine de définition, calculer la nouvelle solution.

Correction

Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une particule située en \hat{x} à l'instant \hat{t} dans un flux de vitesse a :

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = a(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), & t > 0, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Si elle existe, la courbe $(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))$ est encore appelée *courbe caractéristique* passant par le point (\hat{t}, \hat{x}) . On notera le pied de la caractéristique $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)$.

Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + a(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$w(\hat{t}, \hat{x}) = W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = w(0, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) = w_{\text{init}}(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) = w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}).$$

En particulier, si $a(t, x) = c$ constante, alors $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \hat{x} - c\hat{t}$ et donc $w(\hat{t}, \hat{x}) = w_{\text{init}}(\hat{x} - c\hat{t})$.

Exercice A.4

Calculer la solution du problème de Cauchy

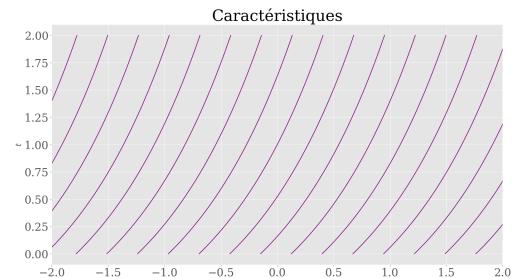
$$\begin{cases} (t+1)\partial_t u + \partial_x u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = x & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Correction

$$a(t, x) = \frac{1}{t+1}, \quad b(t, x) = f(t, x) = 0, \quad u_{\text{init}}(x) = x.$$

Pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \frac{1}{t+1}, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}, \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x} + \ln\left(\frac{t+1}{\hat{t}+1}\right)$$



La solution est donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = u(0, \xi_{\hat{t}, \hat{x}}) = u(0, \hat{x} - \ln(\hat{t}+1)) = \hat{x} - \ln(\hat{t}+1).$$

Exercice A.5

Calculer la solution du problème de Cauchy

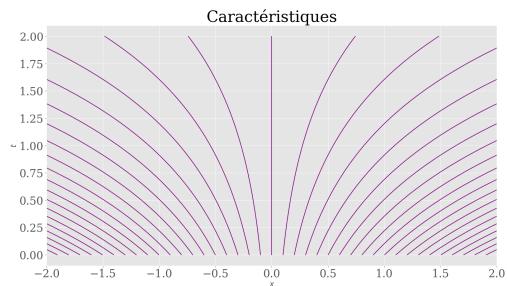
$$\begin{cases} \partial_t u + x\partial_x u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = x^4 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Correction

$a(t, x) = x$, $b(t, x) = f(t, x) = 0$, $u_{\text{init}}(x) = x^4$.

Pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t), \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}, \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x}e^{t-\hat{t}}$$



La solution est donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = u(0, \xi_{\hat{t}, \hat{x}}) = u(0, \hat{x}e^{-\hat{t}}) = (\hat{x}e^{-\hat{t}})^4.$$



Dans le cas le plus général, on cherche

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto w(t, x) \end{aligned}$$

solution (faible) du problème

$$\begin{cases} \partial_t w + a(t, x)\partial_x w + b(t, x)w = f(t, x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(0, x) = w_{\text{init}}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Courbes caractéristiques Soit $\hat{t} > 0$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}$ fixés. Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une particule située en \hat{x} à l'instant \hat{t} dans un flux de vitesse a :

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = a(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), & t > 0, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Si elle existe, la courbe $(t, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t))$ est appelée *courbe caractéristique* passant par le point (\hat{t}, \hat{x}) . On notera le pied de la caractéristique $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)$.

Famille d'EDOs Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= \partial_t w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + a(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \partial_x w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= -b(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) + f(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \\ &= -b(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) + f(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) \end{aligned}$$

Cas particulier : $f(t, x) \equiv 0$. Si $f(t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in [0; +\infty[\times \mathbb{R}$, on obtient l'EDO linéaire homogène $W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) + b(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)) W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = 0$ donc

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) \exp\left(-\int_0^t b(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) ds\right) = w_{\text{init}}(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) \exp\left(-\int_0^t b(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) ds\right).$$

On a alors

$$w(\hat{t}, \hat{x}) = W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = w_{\text{init}}(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t})) \exp\left(-\int_0^{\hat{t}} b(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) ds\right).$$

En particulier, si $b(t, x) = B$ constante, alors $w(\hat{t}, \hat{x}) = w_{\text{init}}(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t})) e^{-B\hat{t}}$.

Si, de plus, $a(t, x) = c$ constante, alors $w(\hat{t}, \hat{x}) = w_{\text{init}}(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t})) e^{-c\hat{t}}$.

Cas général. Comme on connaît déjà la solution de l'équation homogène, il ne reste à calculer qu'une solution particulière de l'équation complète et on trouve

$$\begin{aligned} w(\hat{t}, \hat{x}) &= W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) \exp\left(-\int_0^{\hat{t}} b(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) ds\right) + \int_0^{\hat{t}} f(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) e^{-\int_s^{\hat{t}} b(r, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(r)) dr} ds \\ &= w_{\text{init}}(\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) \exp\left(-\int_0^{\hat{t}} b(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) ds\right) + \int_0^{\hat{t}} f(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) e^{-\int_s^{\hat{t}} b(r, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(r)) dr} ds. \end{aligned}$$

Exercice A.6

Calculer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + tx\partial_x u = t & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = x^2 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Correction

$a(t, x) = tx$, $b(t, x) = 0$, $f(t, x) = t$, $u_{\text{init}}(x) = x^2$ donc pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = t\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t), \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}, \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x}e^{(t^2 - \hat{t}^2)/2}$$

et donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = u(0, \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t})) + \int_0^{\hat{t}} f(s, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)) ds = u(0, \hat{x}e^{-\hat{t}^2/2}) + \int_0^{\hat{t}} s ds = \hat{x}^2 e^{-\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2}{2}.$$

Exercice A.7

Calculer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u + u = e^{-t+2x} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = 0 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Correction

$a(t, x) = 1$, $b(t, x) = 1$, $f(t, x) = e^{-t+2x}$, $g(x) = 0$ donc pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = 1, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}, \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \hat{x} + t - \hat{t}$$

et donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = u(0, \xi_{\hat{t}, \hat{x}}) e^{-\hat{t}} + \int_0^{\hat{t}} e^{-s+2\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(s)} e^{-(\hat{t}-s)} ds = u(0, \hat{x} - \hat{t}) e^{-\hat{t}} + \frac{1}{2} e^{2\hat{x}-\hat{t}} = \frac{1}{2} e^{2\hat{x}-\hat{t}}.$$

A.2. Méthodes des caractéristiques dans un domaine borné : bords d'inflow/outflow

Nous allons maintenant nous intéresser à un domaine borné et aux conditions qu'on doit/peut imposer sur ces bords. En effet, en pratique nous ne travaillerons pas sur un domaine non borné. Au lieu de cela, nous travaillerons typiquement avec un problème sur $x \in [a; b]$.

Nous avons déjà noté que la solution générale de l'équation d'advection est $w(t, x) = w_{\text{init}}(x - ct)$ pour une fonction arbitraire w_{init} . Par conséquent, w doit être constant sur les droites $x - ct$. Il est donc évident que les données ne peuvent pas être spécifiées indépendamment le long de la frontière $x = b$ si $c > 0$ (resp. $x = a$ si $c < 0$), puisque les caractéristiques montrent que ces valeurs sont déterminées par les données initiales et les données de la frontière de gauche (resp. de droite). Ainsi, $w(t, b)$ (resp. $w(t, a)$) ne peut pas être spécifié arbitrairement.¹

Dans cette section, nous supposons pour simplifier que la vitesse c satisfait $c > 0$. Dans ce cas, le bord $x = a$ est dit d'*inflow* et $x = b$ d'*outflow*.

A.2.1. Équation linéaire homogène à vitesse constante dans \mathbb{R}^+

Considérons à nouveau l'équation de transport homogène à **vitesse constante** $c > 0$ mais nous voulons résoudre ce problème seulement pour $x \geq 0$: on cherche la fonction

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto w(t, x) \end{aligned}$$

solution du système

$$\begin{cases} \partial_t w + c \partial_x w = 0, & t > 0, x > 0; \\ w(t=0, x) = w_{\text{init}}(x), & x > 0; \\ w(t, x=0) = w_{\text{bord}}(t), & t > 0. \end{cases}$$

1. Il est intéressant de noter que si nous ajoutons la diffusion à ce problème, nous devrions alors spécifier w à la limite droite du domaine. Dans ce cas, la solution analytique du problème d'advection-diffusion sur un intervalle fini impliquerait typiquement une couche limite du côté droit, à moins que les données de la limite à cet endroit ne soient choisies très soigneusement.

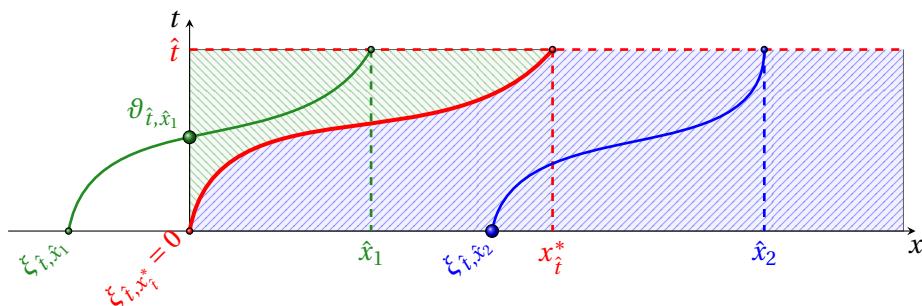
Courbes caractéristiques Soit $\hat{t} > 0$ et $\hat{x} > 0$ fixés. Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la courbe caractéristique solution du problème de Cauchy (A.1).

Dans le cas de notre domaine borné avec $c > 0$, on voit qu'il existe des cas où le pied de la caractéristique n'appartient pas au domaine d'étude, i.e. $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} < 0$. On peut alors définir $\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}$ l'intersection de la courbe caractéristique avec l'axe des abscisses :

- $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)$ (c'est un point de l'espace)
- $\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{solution de l'équation } \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = 0$ (c'est un instant).

On a

$$\xi_{t,x} > 0 \iff \vartheta_{t,y} < 0.$$



Notons que, pour tout $\hat{t} > 0$ fixé, il existe un et un seul $\hat{x} > 0$ tel que $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \vartheta_{\hat{t}, \hat{x}} = 0$. On appellera ce point $x_{\hat{t}}^*$ (ce qui équivaut à $x_{\hat{t}}^* = \chi_{0,0}(t)$ i.e. la position à l'instant t d'une particule initialement placée en $x = 0$).

En utilisant (A.2) et (A.3) on trouve alors

$$\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = ct + \hat{x} - c\hat{t}, \quad (\text{A.10})$$

$$\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \hat{x} - c\hat{t}, \quad (\text{A.11})$$

$$\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}} = \hat{t} - \frac{\hat{x}}{c}, \quad (\text{A.12})$$

$$x_{\hat{t}}^* = c\hat{t}. \quad (\text{A.13})$$

Famille d'EDOs Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, considérons donc la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On obtient encore (A.4), i.e. $W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = 0$, autrement dit

$$\begin{aligned} W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \text{constante} = \begin{cases} W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \geq 0, \\ W_{\hat{t}, \hat{x}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \leq 0, \end{cases} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} w(0, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(0)) & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \geq 0, \\ w(t = \vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}, 0) & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \leq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) & \text{si } \hat{x} \geq x_{\hat{t}}^*, \\ w_{\text{bord}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) & \text{si } \hat{x} \leq x_{\hat{t}}^*. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Calcul de la solution Si on prend $t = \hat{t}$ on a

$$w(\hat{t}, \hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) \stackrel{(A.14)}{=} \begin{cases} w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) & \text{si } \hat{x} \geq x_{\hat{t}}^*, \\ w_{\text{bord}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) & \text{si } \hat{x} \leq x_{\hat{t}}^*, \end{cases}$$

en utilisant (A.11)-(A.12)-(A.13) on a alors

$$w(\hat{t}, \hat{x}) = \begin{cases} w_{\text{init}}(\hat{x} - c\hat{t}) & \text{si } \hat{x} \geq c\hat{t}, \\ w_{\text{bord}}(\hat{t} - \frac{\hat{x}}{c}) & \text{si } \hat{x} \leq c\hat{t}, \end{cases}$$

et donc

$$w(t, x) = \begin{cases} w_{\text{init}}(x - ct) & \text{si } x \geq ct, \\ w_{\text{bord}}(t - \frac{x}{c}) & \text{si } x \leq ct. \end{cases}$$

Exercice A.8 (Variante : terme source linéaire à coefficients constants)

Considérons maintenant l'EDP

$$\partial_t w + c\partial_x w = Aw + B$$

avec $c > 0$, $A > 0$ et B trois constantes. Sans modifier ni les conditions initiales ni le domaine de définition (*i.e.* \mathbb{R}^+), calculer la nouvelle solution.

Correction

La vitesse est toujours constante est positive, par conséquent la partie relative au calcul des courbes caractéristiques et à leurs intersections avec les axes $x = 0$ et $t = 0$ restent inchangées.

Pour la famille d'EDOs, on obtient encore la relation (A.6), *i.e.* $W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = AW_{\hat{t}, \hat{x}}(t) + B$. La solution générale de cette EDO est

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = -\frac{B}{A} + C_1 e^{At}$$

avec C_1 la constante d'intégration à fixer par le passage par un point. Dans notre cas,

- on impose $W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) = w_{\text{init}}(x - ct)$ si $x \geq ct$,
- on impose $W_{\hat{t}, \hat{x}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) = w_{\text{bord}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}})$ si $x \geq ct$.

On obtient

$$\begin{aligned} W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \begin{cases} \left(W_{\hat{t}, \hat{x}}(0) + \frac{B}{A}\right) e^{At} - \frac{B}{A} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \geq 0, \\ \left(W_{\hat{t}, \hat{x}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right) e^{A(t-\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}})} - \frac{B}{A} & \text{si } \xi_{\hat{t}, \hat{x}} \leq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right) e^{At} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \geq x_{\hat{t}}^*, \\ \left(w_{\text{bord}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right) e^{A(t-\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}})} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \leq x_{\hat{t}}^*. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Si on prend $t = \hat{t}$ on a

$$w(\hat{t}, \hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) \stackrel{(A.15)}{=} \begin{cases} \left(w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right) e^{A\hat{t}} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \geq x_{\hat{t}}^*, \\ \left(w_{\text{bord}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right) e^{A(\hat{t}-\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}})} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \leq x_{\hat{t}}^*, \end{cases}$$

en utilisant (A.11)-(A.12)-(A.13) on a alors

$$w(\hat{t}, \hat{x}) = \begin{cases} \left(w_{\text{init}}(\hat{x} - c\hat{t}) + \frac{B}{A}\right) e^{A\hat{t}} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \geq c\hat{t}, \\ \left(w_{\text{bord}}(\hat{t} - \frac{\hat{x}}{c}) + \frac{B}{A}\right) e^{A\frac{\hat{x}}{c}} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \leq c\hat{t}, \end{cases}$$

et donc

$$w(t, x) = \begin{cases} \left(w_{\text{init}}(x - ct) + \frac{B}{A} \right) e^{At} - \frac{B}{A} & \text{si } x \geq ct, \\ \left(w_{\text{bord}}(t - \frac{x}{c}) + \frac{B}{A} \right) e^{A\frac{x}{c}} - \frac{B}{A} & \text{si } x \leq ct. \end{cases}$$

Exercice A.9 (Le système LMNC monophasique)

Lorsque le nombre de Mach est faible, l'écoulement du caloporeur dans le cœur d'un réacteur nucléaire de type PWR (*Pressurized Water Reactor*) peut être décrit par le modèle LMNC (*Low Mach Nuclear Core model*).

Notons v la vitesse et w l'enthalpie du fluide caloporeur (de l'eau à environ 155 bar et 300 °C). Si la loi d'état décrivant son comportement thermodynamique est une loi de type Stiffened Gas, le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x v = V, & t > 0, x > 0; \\ \partial_t w + v \partial_x w = Aw + B, & t > 0, x > 0; \\ v(t=0, x) = v_{\text{init}}(x), & x > 0; \\ w(t=0, x) = w_{\text{init}}(x), & x > 0; \\ v(t, x=0) \equiv v_e, & t > 0; \\ w(t, x=0) \equiv w_{\text{bord}}(t), & t > 0; \end{cases}$$

avec $V > 0$, $v_e > 0$, $A > 0$ et B des constantes.

On suppose que $v_{\text{init}}(0) = v_e$ et $w_{\text{init}}(0) = w_{\text{bord}}(0)$. Calculer les fonctions

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} & w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto v(t, x) & (t, x) &\mapsto w(t, x) \end{aligned}$$

solutions du système d'EDP.

Correction

On commence par calculer la fonction v solution du système

$$\begin{cases} \partial_x v = V, & t > 0, x > 0; \\ v(t=0, x) = v_{\text{init}}(x), & x > 0; \\ v(t, x=0) = v_e, & t > 0. \end{cases}$$

Clairement $v(t, x) = Vx + v_e$ pour tout $x \geq 0$. Notons que v ne dépend pas du temps car v_e non plus.

On peut alors résoudre le problème de transport

$$\begin{cases} \partial_t w + v \partial_x w = Aw + B, & t > 0, x > 0; \\ w(t=0, x) = w_{\text{init}}(x), & x > 0; \\ w(t, x=0) = w_{\text{bord}}(t), & t > 0. \end{cases}$$

Soit $\hat{t} > 0$ et $\hat{x} > 0$ fixés. Notons $\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)$ la position à l'instant t d'une particule située en \hat{x} à l'instant \hat{t} dans un flux de vitesse v . Dans ce cas il s'agit du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \chi'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = V\chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) + v_e, & t > 0, \\ \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Pour tout $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, considérons la restriction de la fonction w à la courbe caractéristique associée à ce point :

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, x = \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t)), \quad t > 0.$$

On a alors à nouveau

$$W'_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = AW_{\hat{t}, \hat{x}}(t) + B,$$

autrement dit

$$W_{\hat{t}, \hat{x}}(t) = \begin{cases} \left(w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right)e^{At} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \geq x_{\hat{t}}^*, \\ \left(w_{\text{bord}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right)e^{A(t-\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}})} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \leq x_{\hat{t}}^*. \end{cases}$$

En résolvant le problème de Cauchy (A.16) on trouve

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{t}, \hat{x}}(t) &= \left(\hat{x} + \frac{v_e}{V}\right)e^{V(t-\hat{t})} - \frac{v_e}{V}, \\ \xi_{\hat{t}, \hat{x}} &= \left(\hat{x} + \frac{v_e}{V}\right)e^{-V\hat{t}} - \frac{v_e}{V}, \\ \vartheta_{\hat{t}, \hat{x}} &= \hat{t} - \frac{1}{V} \ln \left(1 + \frac{V}{v_e} \hat{x}\right), \\ x_{\hat{t}}^* &= \frac{v_e}{V} \left(e^{V\hat{t}} - 1\right). \end{aligned}$$

Si on prend $t = \hat{t}$ on a

$$w(\hat{t}, \hat{x}) = W_{\hat{t}, \hat{x}}(\hat{t}) = \begin{cases} \left(w_{\text{init}}(\xi_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right)e^{A\hat{t}} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \geq x_{\hat{t}}^*, \\ \left(w_{\text{bord}}(\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}}) + \frac{B}{A}\right)e^{A(\hat{t}-\vartheta_{\hat{t}, \hat{x}})} - \frac{B}{A} & \text{si } \hat{x} \leq x_{\hat{t}}^*, \end{cases}$$

et donc

$$w(t, x) = \begin{cases} \left(w_{\text{init}}\left(\left(x + \frac{v_e}{V}\right)e^{-Vt} - \frac{v_e}{V}\right) + \frac{B}{A}\right)e^{At} - \frac{B}{A} & \text{si } x \geq \frac{v_e}{V} \left(e^{V\hat{t}} - 1\right), \\ \left(w_{\text{bord}}\left(\hat{t} - \frac{1}{V} \ln \left(1 + \frac{V}{v_e} \hat{x}\right)\right) + \frac{B}{A}\right) \left(1 + \frac{V}{v_e} x\right)^{\frac{A}{V}} - \frac{B}{A} & \text{si } x \leq \frac{v_e}{V} \left(e^{V\hat{t}} - 1\right). \end{cases}$$

B.

Équations linéaires : méthodes numériques (différences finies)

En général, sauf dans des cas très particuliers, il est extrêmement difficile de calculer explicitement les solutions des modèles issus de la physique. Pour estimer qualitativement et/ou quantitativement ces solutions, on utilise des méthodes de calcul numérique sur ordinateur. Le principe de toutes les méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles consiste à obtenir des valeurs numériques *discrètes* (c'est-à-dire un nombre fini de valeurs) qui *approchent* la solution exacte (dans un sens approprié qui doit être précisé).

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numérique pour résoudre les équations aux dérivées partielles (vous avez déjà rencontré *la méthode des différences finies* et *la méthode des éléments finis*). Dans ce chapitre, nous rappellerons quelques notions relatives à la méthode des différences finies. Dans la partie sur les équations non linéaires, nous verrons qu'une discréétisation naïve basée sur les différences finies peut réservier quelques surprises. Nous introduirons alors *la méthode des volumes finis*.

B.1. Méthode des différences finies (DF) pour une EDP

Considérons une équation aux dérivées partielles $\mathcal{E}(u) = 0$ définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ avec une condition initiale $u(x, 0) = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ (remarquons que $\mathcal{E}(u)$ est une notation pour une fonction de u et de ses dérivées partielles en tout point).

Pour discréétiser le domaine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on introduit une grille avec un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$ et on définit les nœuds d'un maillage régulier

$$(x_j, t^n) \stackrel{\text{def}}{=} (j\Delta x, n\Delta t) \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

On notera u_j^n la valeur d'une solution discrète approchée au point (x_j, t^n) et $u(x, t)$ la solution exacte (inconnue) :

$$u_j^n \approx u(x_j, t^n).$$

Un schéma d'approximation est une formule

$$F \left(\left\{ u_j^m \right\}_{\substack{0 \leq m \leq n \\ j \in \mathbb{Z}}} \right)$$

qui permet de calculer $\left\{ u_j^{n+1} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}$ en fonction des $\left\{ u_j^n \right\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Pour démarrer les itération en n il faut donc bien sûr une donnée initiale : les valeurs initiales $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ sont définies par exemple par $u_j^0 = g(x_j)$ où g est la donnée initiale de l'équation.

Le principe de la **méthode des différences finies** est de remplacer les dérivées par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dans lesquelles on néglige les restes.

Remarque 16 (Rappels) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Comme

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

il est naturel d'introduire les approximations

$$f'(x_0) \approx \delta^+ f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (\text{B.1})$$

$$f'(x_0) \approx \delta^- f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}, \quad (\text{B.2})$$

$$f'(x_0) \approx \delta^\pm f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (\text{B.3})$$

De manière analogue, la dérivée seconde peut être approchée par

$$f''(x_0) \approx \delta^2 f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

On peut quantifier l'erreur commise par ces approximations en considérant le développement de Taylor en x autour du point x_0

$$f(x_0 \pm \Delta x) = f(x_0) \pm \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3).$$

On a

$$\begin{aligned} \delta^+ f(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + O(\Delta x), \\ \delta^- f(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0) + \Delta x f'(x_0) - (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3)}{\Delta x} = f'(x_0) + O(\Delta x), \\ \delta^\pm f(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - f(x_0) + \Delta x f'(x_0) - (\Delta x)^2 f''(x_0)}{2\Delta x} \\ &= f'(x_0) + O((\Delta x)^2), \end{aligned}$$

et pour l'approximation de la dérivée seconde on a

$$\begin{aligned} \delta^2 f(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - 2f(x_0) + f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0)}{(\Delta x)^2} \\ &= f''(x_0) + O((\Delta x)^2). \end{aligned}$$

Si Δx est «petit», ces formules sont des «bonnes» approximations des dérivées.

Niveaux Un schéma est dit à m niveaux s'il ne fait intervenir que m indices de temps. Les schémas les plus populaires sont des schémas à deux niveaux, autrement dit pour calculer la solution au temps $n+1$ on utilise les valeurs au temps n .

Stencil La collection des couples (j', n') qui interviennent dans l'équation discrète au point (j, n) est appelé *stencil* du schéma (qu'on peut essayer de traduire par support). En général, plus le stencil est large, plus le

schéma est coûteux et difficile à programmer.

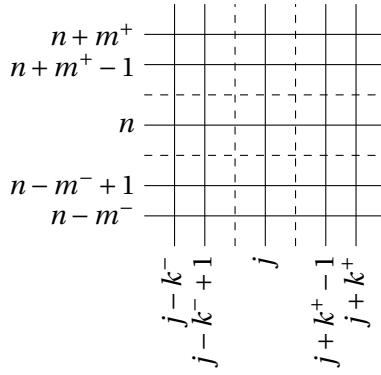


FIGURE B.1. – Exemple de stencil pour un schéma à $m^- + m^+ + 1$ niveaux et $k^- + k^+ + 1$ points.

De manière générale, un schéma aux différences finies est défini, pour tous les indices possibles $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, par la formule

$$F_{\Delta x, \Delta t} \left(\left\{ u_{j+k}^{n+m} \right\}_{\substack{k^- \leq k \leq k^+ \\ m^- \leq m \leq m^+}} \right) = 0$$

où les entiers k^-, k^+, m^- et m^+ définissent la largeur du stencil du schéma.

Remarque 17 (BC) Si l'équation est définie sur un domaine borné, par exemple $x \in [\alpha; \beta]$, le maillage spatial sera restreint à cet intervalle c'est-à-dire $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ avec $x_0 = \alpha$ et $x_N = \beta$ et $\Delta x = (\beta - \alpha)/N$. Il faut de plus ajouter des conditions aux limites qui peuvent être de plusieurs types.

Quelques exemples :

- si on a des conditions aux limites de Dirichlet

$$u(\alpha, t) = L, \quad u(\beta, t) = R, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$u_0^n = L, \quad u_{N+1}^n = R, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

- Si on a des conditions de Neumann

$$\partial_x u(\alpha, t) = L, \quad \partial_x u(\beta, t) = R, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = L, \quad \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} = R, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

- Si on a des conditions périodiques

$$u(x + \beta, t) = u(x + \alpha, t), \quad \text{pour } x \in [\alpha; \beta], \quad t \in \mathbb{R}_*^+$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$u_0^n = u_N^n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

et plus généralement $u_j^n = u_{N+j}^n$.

B.2. Exemples de schémas pour l'équation de transport

On considère le problème de transport en une dimension d'espace dans le domaine borné $[0; L]$ avec une vitesse c constante non nulle et des conditions aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in [0; L] \times [0; T], \\ u(x+L, t) = u(x, t) & \text{pour } (x, t) \in [0; L] \times [0; T], \\ u(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in [0; L]. \end{cases}$$

On souhaite calculer la valeur de la solution u en un ensemble discret de points en espace et en temps. Plus précisément, en fixant un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$, on cherche à calculer $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$ la valeur d'une solution discrète approchée au point (x_j, t^n) . On sait que $u(x, t) = g(x - ct)$ est la solution exacte. Les conditions aux limites de périodicité conduisent aux égalités $u_1^n = u_{N+1}^n$ pour tout $n \geq 0$, par conséquent l'inconnue discrète à chaque pas de temps est un vecteur $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$.

Notre stratégie consiste à remplacer des opérateurs différentiels par des quotients aux différences finies. En utilisant différentes façon d'évaluer les dérivées partielles, beaucoup de choix de schémas sont possibles. Nous voulons en étudier ici quelques uns.

Soit $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} c \frac{\Delta t}{\Delta x}$. On considère les schémas aux différences finies suivants :

❶ le schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

❷ le schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

❸ le schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}$$

❹ le schéma upwind (décentré amont)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{c - |c|}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \left(\frac{\alpha + |\alpha|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha - |\alpha|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \right) = \begin{cases} u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } \alpha > 0, \\ u_j^n - \alpha(u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

❺ le schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1 - \alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1 + \alpha}{2} u_{j-1}^n$$

❻ le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

⑦ le schéma de Beam-Warming

- si $c > 0$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

- si $c < 0$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - c \frac{3u_j^n - 4u_{j+1}^n + u_{j+2}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_j^n - 2u_{j+1}^n + u_{j+2}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

⑧ le schéma Sauté-Mouton (Leap-Frog)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \alpha(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

B.3. La condition CFL

En 1928, Courant, Friedrichs et Lewy ont publié l'un des premiers articles sur les méthodes des différences finies pour les équations différentielles partielles (EDP). Ils ont utilisé ces méthodes comme outil analytique pour démontrer l'existence de solutions à certaines EDP. Leur approche consistait à définir une suite de solutions approximatives via des équations aux différences finies, à prouver leur convergence à mesure que la grille se raffine, puis à montrer que la fonction limite satisfait l'EDP, établissant ainsi l'existence d'une solution.

Pour prouver cette convergence, ils ont introduit le concept de domaine de dépendance numérique, analogue au domaine de dépendance d'une EDP.

Le domaine de dépendance $\mathcal{D}_{\hat{t}, \hat{x}}$ d'une EDP a été décrit à la remarque 12 à la page 181. Pour un problème de transport linéaire, la solution w en (\hat{t}, \hat{x}) ne dépend des données initiales w_{init} qu'en un seul point, le point $\xi_{\hat{t}, \hat{x}} = \hat{x} - c\hat{t}$, situé sur la caractéristique passant par (\hat{t}, \hat{x}) . Ainsi, le domaine de dépendance $\mathcal{D}_{\hat{t}, \hat{x}}$ se compose d'un seul point : $\{\hat{x} - c\hat{t}\}$.

Pour un schéma numérique donné, son domaine de dépendance numérique \mathcal{N}_{x_j, t^n} est défini de manière similaire. Il s'agit de l'ensemble des points $\{(x_{j+q}, t^0)\}$ dont les données initiales pourraient potentiellement influencer la solution numérique en (x_j, t^n) .

Lors de la démonstration de la convergence de cette suite de solutions approximatives vers la solution de l'EDP, ils ont identifié une condition de stabilité nécessaire pour toute méthode numérique : **le domaine de dépendance numérique \mathcal{N} doit inclure le domaine de dépendance \mathcal{D} de l'EDP**, au moins dans la limite où $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$. Cette condition est connue sous le nom de condition CFL, en l'honneur de Courant, Friedrichs et Lewy.

La condition CFL est essentielle pour la convergence. Si elle n'est pas respectée, il existe des points dans le domaine de dépendance de l'EDP qui ne sont pas couverts par le domaine de dépendance numérique. Ainsi, une variation des données initiales en ces points pourrait affecter la solution exacte, mais pas la solution numérique. Par conséquent, la solution numérique ne peut pas converger vers la solution réelle pour toutes les données initiales.



EXEMPLE B.1 Considérons le schéma ③ (schéma centré) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

La valeur u_j^{n+1} dépend des trois valeurs u_{j+q}^n , pour $q = -1, 0, 1$. Ces trois valeurs dépendent à leur tour des cinq valeurs u_{j+q}^{n-1} , pour $q = -2, -1, 0, 1, 2$. En continuant ainsi jusqu'à $n = 0$, on constate que la solution à l'instant t^{n+1} dépend uniquement des valeurs aux points x_{j+q} , pour $q = -n-1, -n, \dots, n, n+1$. Ainsi, le domaine de dépendance numérique est

$$\mathcal{N}_{x_j, t^n} \subset \{x \mid |x - x_j| \leq n\Delta x\} \stackrel{t^n = n\Delta t}{=} \left\{ x \mid |x - x_j| \leq t^n \frac{\Delta x}{\Delta t} \right\}.$$

Si on raffine la grille tout en gardant le ratio $\frac{\Delta t}{\Delta x} = r$ constant, on a

$$\mathcal{N}_{x_j, t^n} = \{x \mid |x - x_j| \leq t^n / r\}.$$

La condition CFL demande à ce que $\mathcal{D}_{x_j, t^n} \subset \mathcal{N}_{x_j, t^n}$. Pour notre schéma appliqué au problème du transport linéaire à vitesse constante, cela impose

$$|(x_j - ct^n) - x_j| \leq t^n / r \quad \rightsquigarrow \quad \frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

La quantité

$$\frac{|c|\Delta t}{\Delta x}$$

est souvent appelée "nombre de Courant", ou parfois "nombre CFL".

Remarque 18 Dans la plupart des cas, la condition CFL va donner des restrictions sur le ratio $\Delta x / \Delta t$. Comme Δx est initialement fixé, ceci nous oblige à nous donner un pas de temps Δt petit. Plus cette condition est restrictive, plus le schéma sera coûteux à utiliser d'un point de vue du temps de calcul.

Remarque 19 La condition CFL est nécessaire mais non suffisante pour la convergence, comme nous le verrons plus tard, notamment pour ce schéma centré.

B.4. Propriétés d'un schéma DF

Un des buts de l'analyse numérique est de comparer et de sélectionner les meilleurs schémas suivant des critères de précision, de coût ou de robustesse.

La convergence d'un schéma aux différences finies est une propriété naturelle qui assure que, pour des valeurs suffisamment petites des pas d'espace et de temps, la solution numérique calculée sera proche de la solution exacte du problème de départ.

Convergence Le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ utilisé pour la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ est *convergent* si, pour toute solution u de l'équation $F(u) = 0$, la suite u_j^n converge vers $u(x_j, t^n)$ avec $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$.

Pour qu'un schéma soit convergent, il est nécessaire que l'erreur, lorsque le schéma est appliqué à la solution exacte, tende vers zéro lorsque les pas de discréttisation spatiale et temporelle tendent vers zéro. C'est ce qu'on appelle la notion de consistance.

Erreur de troncature et consistance Considérons le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ pour l'approximation de l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$. Soit $u(x, t)$ une solution suffisamment régulière de cette équation. On appelle *erreur de troncature locale* du schéma la quantité

$$\tau_j^n \equiv F_{\Delta x, \Delta t} \left(\left\{ u(x + k\Delta x, t + m\Delta t) \right\}_{\substack{k^- \leq k \leq k^+ \\ m^- \leq m \leq m^+}} \right).$$

Concrètement on calcule l'erreur de troncature d'un schéma en remplaçant u_{j+k}^{n+m} dans la formule par $u(x + k\Delta x, t + m\Delta t)$.

Le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ est dit **consistant** avec l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ si l'*erreur de troncature* du schéma tend vers zéro, uniformément par rapport à (x, t) , lorsque Δx et Δt tendent vers zéro indépendamment.

Ordre de consistance Le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps avec l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ si l'*erreur de troncature* du schéma tend vers zéro comme $O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$ lorsque Δx et Δt tendent vers zéro.

Équation équivalente : diffusion et dispersion On appelle équation équivalente d'un schéma l'équation obtenue en ajoutant au modèle étudié la partie principale (c'est-à-dire le terme d'ordre le plus bas) de l'erreur de troncature.

Tous les schémas que nous allons examiner sont consistants. Cependant, si nous ajoutons à l'équation la partie principale de l'erreur de troncature d'un schéma, alors non seulement ces schémas restent consistants avec cette nouvelle équation «équivalente», mais ils deviennent même strictement plus précis pour cette équation équivalente. En d'autres termes, les schémas sont «plus consistants» avec l'équation équivalente qu'avec l'équation que nous souhaitons approcher. Cette équation nous fournit des informations précieuses sur le comportement numérique du schéma.

- Le coefficient de diffusion, qui correspond au coefficient de la dérivée seconde de l'équation équivalente, est appelé **diffusion numérique**. Lorsqu'il est élevé, on dit que le schéma est diffusif ou dissipatif. Un schéma diffusif a tendance à artificiellement étaler les données initiales au fil du temps.
- Si le schéma est précis d'ordre 2, alors l'équation équivalente ne contient pas de terme de diffusion, mais plutôt un *terme dispersif du troisième ordre*. Un schéma dispersif produit des oscillations lorsque la solution est discontinue. En effet, le terme dispersif modifie la vitesse de propagation des modes de Fourier de la solution, en particulier des modes de fréquence élevée, tandis qu'un terme diffusif ne fait qu'atténuer leur amplitude.

Malheureusement **la notion de consistance ne suffit pas à garantir que le schéma soit convergent**. Le théorème suivant ajoute une hypothèse (qu'on va expliquer juste après) qui garantit la convergence. Ce théorème dit que, si l'on utilise un schéma consistant (ils sont construit pour cela en général) et que l'on n'observe pas d'oscillations numériques (c'est-à-dire qu'il est stable), alors la solution numérique est proche de la solution exacte (le schéma converge) lorsque celle-ci est suffisamment régulière.

B.1  **Théorème (Théorème de Lax : Stabilité + Consistance = Convergence)**
Soit $u(x, t)$ la solution suffisamment régulière de l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ avec des conditions aux limites appropriées. Soit u_j^n la solution numérique discrète obtenue par un schéma aux différences finies avec la donnée initiale $u_j^0 = g(x_j)$. Si le schéma est linéaire, à deux niveaux, consistant et stable pour une norme $\|\cdot\|$, alors le schéma est convergent au sens où

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left(\sup_{t^n \leq T} \|u_j^n - u(x_j, t^n)\| \right) = 0.$$

De plus, si le schéma est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps, alors pour tout $T > 0$ il existe une constante $C_T > 0$ telle que

$$\sup_{t^n \leq T} \|u_j^n - u(x_j, t^n)\| \leq C_T ((\Delta x)^p + (\Delta t)^q).$$

B.4.1. Stabilité

La notion de stabilité lie les pas d'espace et de temps. Les pas Δx et Δt doivent être choisis de sorte qu'une petite perturbation de la donnée initiale g n'induira par une perturbation trop grande sur la solution calculée au temps final. Cette idée, déjà rencontrée pour la définition d'un problème bien posé ou encore dans l'étude de schémas numériques pour les EDO, est à la base du concept de stabilité pour les schémas aux différences finies.

En pratique, un **schéma instable est inutilisable** car, même si on part d'une donnée initiale spécialement préparée de manière à ce qu'aucun des modes de Fourier instables ne soit excité par elle, les évitables erreurs d'arrondi vont créer des composantes non nulles (bien que très petites) de la solution sur ces modes instables. La croissance exponentielle de ces modes instables entraîne qu'après seulement quelque pas en temps ces modes deviennent énormes et polluent complètement le reste de la solution numérique.

B.2 Définition (Stabilité)

Soit $u^n \equiv (u_j^n)_{1 \leq j \leq N-1}$ la solution numérique d'un schéma. Un schéma aux différences finies est dit *stable* pour la norme $\|\cdot\|$ s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δx et Δt (lorsque ces valeurs tendent vers zéro) telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 . Si cette inégalité n'a lieu que pour des pas Δx et Δt astreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est *conditionnellement stable*.

On définit les normes ℓ^p et ℓ^∞ classiques

$$\begin{aligned} \|u^n\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |u_j^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} && \text{pour } 1 \leq p < +\infty, \\ \|u^n\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq N-1} |u_j^n|. \end{aligned}$$

B.3 Définition (Schéma linéaire)

Un schéma aux différences finies est dit linéaire si la formule $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_j^{n+m}\}) = 0$ qui le définit est linéaire par rapport à ses arguments u_{j+k}^{n+m} .

La stabilité d'un schéma linéaire à deux niveaux est facile à interpréter. En effet, par linéarité tout schéma linéaire à deux niveaux peut s'écrire sous la forme condensée

$$\mathbb{A} u^n = u^{n+1},$$

où \mathbb{A} est une matrice (dite d'itération) et on obtient $\mathbb{A}^n u^0 = u^{n+1}$ (attention, la notation \mathbb{A}^n désigne ici la puissance n -ème de \mathbb{A}) et par conséquent la stabilité du schéma est équivalente à

$$\|\mathbb{A}^n u^0\| \leq K \|u^0\|, \quad \forall n \geq 0, \forall u^0 \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Introduisant la norme matricielle subordonnée $\|\mathbb{M}\| = \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^{N-1} \\ u \neq 0}} \frac{\|\mathbb{M}u\|}{\|u\|}$, la stabilité du schéma est équivalente à

$$\|\mathbb{A}^n\| \leq K \quad \forall n \geq 0$$

qui veut dire que la suite des puissances de \mathbb{A} est bornée.

B.4 Définition (Principe du maximum discret - stabilité L^∞)

Un schéma aux différences finies vérifie le principe du maximum discret si pour tout $n \geq 0$ et tout $1 \leq j \leq N-1$ on a

$$\min_{0 \leq j \leq N} (u_j^0) \leq u_j^n \leq \max_{0 \leq j \leq N} (u_j^0)$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Stabilité L^2 La norme L^2 se prête bien à l'étude de la stabilité grâce à l'outil très puissant de l'analyse de Fourier. Supposons désormais que les conditions aux limites pour l'équation aux dérivées partielles sont des conditions aux limites de périodicité.

À chaque vecteur $u^n \equiv (u_j^n)_{1 \leq j \leq N-1}$ on associe une fonction $u^n(x)$, constante par morceaux, périodique, définie sur $[\alpha; \beta]$ par

$$u^n(x) = u_j^n \quad \text{si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$$

avec $x_{j+1/2} = \alpha + (j+1/2)\Delta x$ pour $0 \leq j \leq N$, $x_{-1/2} = \alpha$ et $x_{N+1/2} = \beta$. Ainsi définie, la fonction $u^n(x)$ appartient à $L^2([\alpha; \beta])$, elle peut donc se décomposer en la somme de Fourier

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2i\pi kx} \quad \text{avec } \hat{u}^n(k) = \int_\alpha^\beta u^n(x) e^{-2i\pi kx} dx$$

et on a la formule de Plancherel

$$\int_\alpha^\beta |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2.$$

Remarquons que même si $u^n(x)$ est une fonction réelle, les coefficients $\hat{u}^n(k)$ de la série de Fourier sont complexes.

Une propriété importante pour l'étude de stabilité de la transformée de Fourier des fonctions périodiques est la suivante : si on note $v^n(x) = u^n(x + \Delta x)$ alors $\hat{v}^n(k) = \hat{u}^n(k) e^{2i\pi k\Delta x}$.

B.5 Définition («Recette» pour un schéma à deux niveaux)

On injecte dans le schéma un mode de Fourier, on obtient ainsi

$$u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi kx_j}$$

et on en déduit la valeur du facteur d'amplification $A(k)$. Rappelons que pour l'instant nous sommes limité au cas scalaire, c'est-à-dire que $A(k)$ est un nombre complexe. On appelle *condition de stabilité de Von Neumann* l'inégalité

$$|A(k)| < 1 \quad \text{pour tout mode } k \in \mathbb{Z}.$$

Si la condition de stabilité de Von Neumann est satisfaite (avec éventuellement des restrictions sur Δx et Δt), alors le schéma est stable pour la norme L^2 , sinon il est instable.

Dans la plupart des cas, l'étude de la stabilité au sens L^2 va donner des restrictions sur Δx et Δt . Comme Δx est initialement fixé, ceci nous oblige à nous donner un pas de temps Δt petit. Plus cette condition de stabilité est restrictive, plus le schéma sera coûteux à utiliser d'un point de vue du temps de calcul. À contrario, les schémas inconditionnellement stables ne nécessitent aucune restriction particulière et donc peuvent être à priori utilisés pour une valeur quelconque de Δt . Ceci ne signifie pas pour autant qu'ils seront des «bons» schémas, et notamment que la solution calculée sera proche de la solution exacte. En effet, un choix trop grand de Δt donne une mauvaise approximation de la dérivée partielle par rapport au temps.

B.5. Exercices

Dans la suite on notera

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} c \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

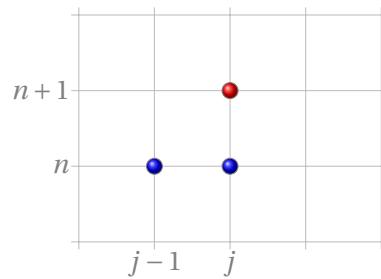
Exercice B.1 (Études de stabilité et de consistance du schéma décentré à gauche)

Dessiner le stencil, étudier la stabilité L^2 , étudier l'ordre de consistance et trouver l'équation équivalente pour le schéma ❶ (décentré à gauche) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

Correction

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = [1 - \alpha + \alpha e^{-i2\pi k \Delta x}] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= [1 - \alpha + \alpha e^{-i\xi}] \hat{u}^n(k) = \\ &= [1 - \alpha + \alpha(\cos(-\xi) + i \sin(-\xi))] \hat{u}^n(k) = \\ &= [1 - \alpha + \alpha \cos(\xi) - i \alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k). \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &\equiv [1 - \alpha + \alpha \cos(\xi)]^2 + \alpha^2 \sin^2 \xi = \\ &= 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)). \end{aligned}$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha(\alpha - 1) \geq 0.$$

Pour $0 \leq \alpha \leq 1$ on a $|A(k)| \leq 1$ pour toute fréquence $k \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j - 1, j$ et $m = n, n + 1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c\partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\begin{aligned} \tau_j^n &\equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x} \\ &= \frac{-c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2)}{\Delta t} + c \frac{\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2)}{\Delta x} = O((\Delta x) + (\Delta t)). \end{aligned}$$

Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

Équation équivalente On ajoute un terme de plus aux développements de Taylor précédents. On trouve

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) - c \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$



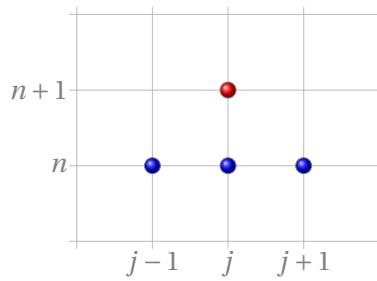
Exercice B.2 (Études de stabilité et de consistance du schéma centré)

Dessiner le stencil et étudier la stabilité L^2 et l'ordre de consistance du schéma ③ (centré) :

Correction

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[1 - \frac{\alpha}{2} (e^{i2\pi k \Delta x} - e^{-i2\pi k \Delta x}) \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= \left[1 - \frac{\alpha}{2} (e^{i\xi} - e^{-i\xi}) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[1 - \frac{\alpha}{2} (\cos(\xi) + i \sin(\xi) - \cos(-\xi) - i \sin(-\xi)) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= [1 - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k). \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv 1 + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha^2 \sin^2(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ce qui prouve que le schéma est inconditionnellement instable en norme L^2 .

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j-1, j, j+1$ et $m = n, n+1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = O((\Delta x)^2 + (\Delta t)).$$

Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

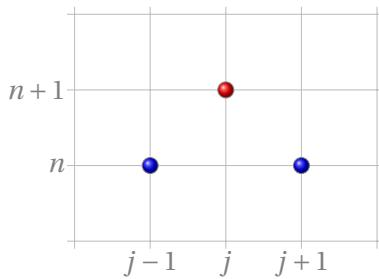
Exercice B.3 (Études de stabilité et de consistance du schéma de Lax-Friedrichs)

Dessiner le stencil et étudier la stabilité L^2 et l'ordre de consistance du schéma 5 (Lax-Friedrichs) :

Correction

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{1-\alpha}{2} e^{i2\pi k \Delta x} - \frac{1+\alpha}{2} e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{1-\alpha}{2} e^{i\xi} + \frac{1+\alpha}{2} e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = [\cos(\xi) - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi) \geq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha^2 \leq 1.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $|\alpha| \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j-1, j, j+1$ et $m = n, n+1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - \frac{u(x_{j+1}, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2}}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est

solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2 \Delta x} = O\left((\Delta x) + (\Delta t) + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right).$$

Étant donné que, sous la condition CFL calculée précédemment, $O\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) = O(\Delta x)$, le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

Exercice B.4 (Études de stabilité et de consistance du schéma de Lax-Wendroff)

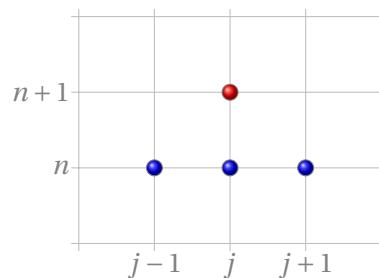
Dessiner le stencil et étudier la stabilité L^2 et l'ordre de consistance du schéma ⑥ (Lax-Wendroff).

Correction

Pour $j = 0, \dots, N-1$ et $n \in \mathbb{N}$, le schéma de Lax-Wendroff s'écrit

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{-\alpha + \alpha^2}{2} e^{i2\pi k \Delta x} + 1 - 2\alpha^2 + \frac{\alpha + \alpha^2}{2} e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{-\alpha + \alpha^2}{2} e^{i\xi} + 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha + \alpha^2}{2} e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = [1 - \alpha^2(1 - \cos(\xi)) - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv \alpha^2(\alpha^2 - 1)(\cos(\xi) - 1)^2 + 1.$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha^2 \leq 1.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $|\alpha| \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j-1, j, j+1$ et $m = n, n+1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} = 0.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\begin{aligned} \tau_j^n &\equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} \\ &= O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2). \end{aligned}$$

car, sous la condition CFL calculée précédemment, $O(c \frac{\Delta t}{\Delta x}) = O(1)$, le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

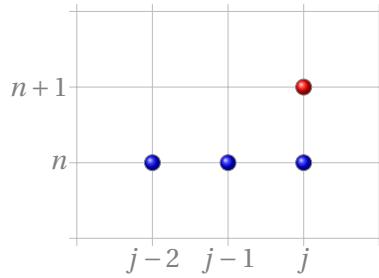
 **Exercice B.5 (Études de stabilité et de consistance du schéma de Beam-Warmimg)**
Dessiner le stencil et étudier la stabilité L^2 et l'ordre de consistance du schéma 7 (Beam-Warmimg).

Correction

Considérons le cas $c > 0$. Pour $j = 0, \dots, N-1$ et $n \in \mathbb{N}$, le schéma de Beam-Warmimg s'écrit

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n) + \alpha(\alpha - 1) \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2}$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} e^{-i4\pi k \Delta x} + (\alpha(2-\alpha)) e^{-i2\pi k \Delta x} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} 2 \cos(\xi) + (\alpha(2-\alpha)) - (\alpha-1) e^{i\xi} \right] e^{-i\xi} \hat{u}^n(k) = ???$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &\equiv ((\alpha-1)^2 \cos(\xi) + \alpha(2-\alpha))^2 + (\alpha-1)^2 \sin^2(\xi) \\ &= (\alpha-1)^2 \alpha(\alpha-2) \cos^2(\xi) + 2\alpha(2-\alpha)(\alpha-1)^2 \cos(\xi) + \alpha^2(2-\alpha)^2 + (\alpha-1)^2 \\ &= (\alpha-1)^2 \alpha(\alpha-2) \cos^2(\xi) + 2\alpha(2-\alpha)(\alpha-1)^2 \cos(\xi) + 1 + (\alpha-1)^2 \alpha(\alpha-2) \\ &= 1 - (\alpha-1)^2 \alpha(2-\alpha)(1 - \cos(\xi))^2. \end{aligned}$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff 0 \leq \alpha \leq 2.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $0 \leq \alpha \leq 2$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j-1, j, j+1$ et $m = n, n+1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} = 0.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\begin{aligned}\tau_j^n &\equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} \\ &= O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2).\end{aligned}$$

car, sous la condition CFL calculée précédemment, $O(c \frac{\Delta t}{\Delta x}) = O(1)$, le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

Exercice B.6

Étudier (analytiquement) la stabilité L^2 et l'ordre de consistance des schémas ② et ④; en déduire une condition CFL le cas échéant.

Correction

On vérifiera notamment que

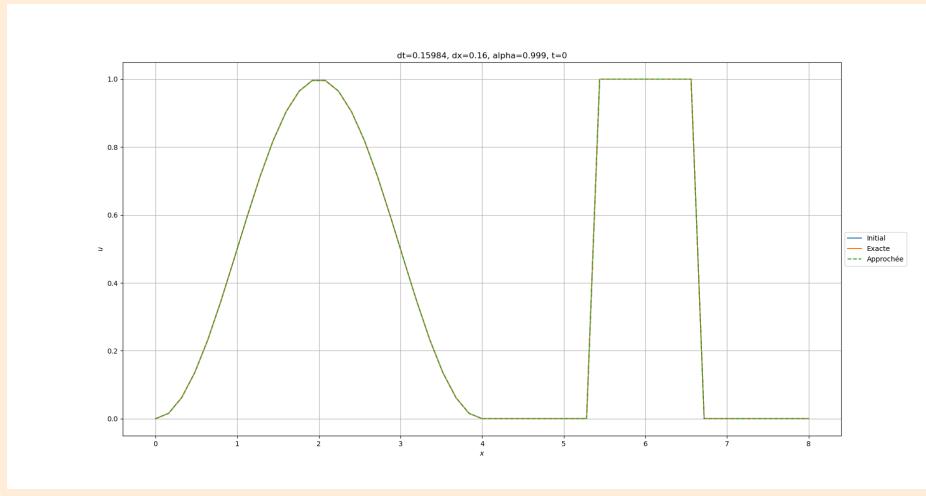
- le schéma ① est stable L^2 sous condition CFL $0 < \alpha < 1$ et consistants d'ordre 1 en temps et en espace,
- le schéma ② est stable L^2 sous condition CFL $-1 < \alpha < 0$ et consistants d'ordre 1 en temps et en espace,
- le schéma ③ est consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace mais inconditionnellement instable,
- les schémas ④-⑤ sont stables L^2 sous condition CFL $|\alpha| < 1$ et consistants d'ordre 1 en temps et en espace,
- le schéma ⑥ est stables L^2 sous condition CFL $|\alpha| < 1$ et consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace,
- le schéma ⑦ est stable L^2 sous condition CFL $0 < \alpha < 2$ et consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Exercice B.1

Nous allons vérifier numériquement les études précédentes. Soit la largeur du domaine $L = 8$ et le temps final $T = 24$.

On considère la condition initiale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{L}x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \in \left]0; \frac{L}{2}\right[, \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{L}{2}; \frac{2L}{3}\right[\cup \left]\frac{5L}{6}; L\right[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



1. Implémenter les schémas ①-⑦.

Remarque : à la section B.2 on a noté $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} c \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Dans la suite, on posera $\Delta t = \text{cfl} \frac{\Delta x}{|c|}$ et on choisira différentes valeurs de cfl .

2. Soit $c = 1$.

- Soit une grille de 50 mailles (51 points). Comparer les schémas ①-⑦ : d'abord on prendra la constante de Courant-Friedrichs-Levy égale à $\text{cfl} = 0.999$, puis $\text{cfl} = 0.1$ et enfin $\text{cfl} = 1.1$. Que remarque-t-on à propos de la stabilité? Que remarque-t-on à propos de la diffusion? Et de la dispersion?
- Répéter les calculs sur une grille de 500 mailles. Que change-t-il?

3. Même exercice pour $c = -1$.

Pour vérifier le code, on pourra consulter notamment les tests à la page <https://perso.ensta-paris.fr/~haddar/Cours/ENSTA/SIMUL/Transport.html>

Correction

Notons qu'avec $|c| = 1$, $T = 24$ et $L = 8$, cela signifie que la solution fait 3 tours (la solution exacte et initiale sont bien superposées à la fin si dt est tel que T est un multiple de dt).

Généralités : les schémas d'ordre 1 donnent des solutions diffusée, tandis que ceux d'ordre 2 donnent des oscillations lorsque la solution n'est pas régulière.

Upwind Ce schéma est stable sous la condition CFL et présente une dissipation numérique.

- Pour $\text{cfl} > 1$ le schéma est instable;
- pour $\text{cfl} \ll 1$ le schéma est stable mais très diffusif;
- en augmentant nx on améliore la précision (mais n'est que d'ordre un);
- si on prend $c = -1$ on obtient les mêmes résultats que pour $c = 1$.

Lax-Friedrichs Ce schéma est stable sous la condition CFL et présente une dissipation numérique. Ceci s'explique en réécrivant le schéma de cette méthode comme une «correction» du schéma centré, ce qui fait apparaître un terme de diffusion (proportionnel à une dérivée seconde en la variable d'espace de la solution) d'ordre un en Δx sous la condition CFL.

Lax-Wendroff Ce schéma est stable sous la condition CFL. Il s'avère moins dissipatif que le schéma de Lax-Friedrichs, mais présente des oscillations parasites, croissantes au cours du temps, au voisinage des discontinuités de la solution. Le principe du maximum discret n'est pas respecté, donc le schéma n'est pas monotone. Ceci est caractéristique des schémas utilisant une discrétisation en espace d'ordre élevé (le schéma de Lax-Wendroff est d'ordre deux) en présence d'une solution discontinue. Ce problème est en pratique réglé par l'utilisation de limiteurs de flux (qui rendent le schéma non linéaire même si le flux du problème est linéaire).



Exercice B.2

Étudier empiriquement l'ordre de convergence d'abord sur une solution régulière, puis sur une solution discontinue.

Correction

to do