IUT de Toulon
GEII2APP

Nom : Prénom :

Devoir d'Outils Logiciels du S4 - Sujet 2

Exercice 1 Le logiciel Maxima pourra être utilisé pour **vérifier** les calculs.

1) Résoudre l'équation matricielle suivante : $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour cela, on montrera d'abord que la matrice A est inversible.

$A.V = B$ où $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow V = A^{-1}B$

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

$|A| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0$

A est donc inversible.

$$CoA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$CoA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}CoA$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution est donc :

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Soient a, b, c , trois réels et f la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$. On souhaite déterminer les réels a, b et c tels que f(-2) = 15 , f(-1) = 6 , f(0) = 1. Vérifier que ce problème revient à résoudre l'équation matricielle de la question 1, puis en déduire l'expression de f.

$$\begin{cases} f(-2) = 4a - 2b + c = 15 \\ f(-1) = a - b + c = 6 \\ f(0) = c = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Exercice 2 Soit A_β, la matrice définie par : $A_\beta = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & \beta^2 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ où m est un réel.

1) Calculer le déterminant de la matrice A_β, puis écrire le résultat sous forme factorisée. Le logiciel Maxima pourra être utilisé pour **vérifier** les calculs.

$$|A_\beta| = \begin{vmatrix} \beta^2 & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 & \beta^2 \\ \beta & \beta \end{vmatrix}$$

$$= \beta^2 - \beta - \beta(1-\beta) + \beta(\beta - \beta^3) = \beta^2 - \beta - \beta + \beta^2 + \beta^2 - \beta^4 = -\beta^4 + 3\beta^2 - 2\beta$$

$$= \beta(\beta - 1) - \beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta^2) \qquad = \beta(-\beta^3 + 3\beta - 2)$$

$$= -2\beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta)(1+\beta) = (1-\beta)(-2\beta + \beta^2(1+\beta))$$

$$= (1-\beta)\beta(-2 + \beta(1+\beta))$$

$$= (1-\beta)\beta(\underbrace{\beta^2 + \beta - 2}_{(\beta-1)(\beta+2)})$$

2) Pour quelles valeurs de β la matrice A_β est-elle inversible ?

A_β est inversible si et seulement si

$|A_\beta| \neq 0 \iff \beta \neq 1 ; \beta \neq 0, \beta \neq -2$

→ **3)** Soit le système suivant : $S_m \begin{cases} x + \beta y + \beta z = -5 \\ x + \beta^2 y + z = \beta \\ \beta x + \beta y + z = \beta^2 + 3 \end{cases}$

a) Résoudre matriciellement ce système lorsque β = 2 **Les calculs seront effectués avec Maxima** sans justification, la méthode de résolution sera bien expliquée.

b) Résoudre ce système lorsque β = -2. Pas d'utilisation de Maxima.

c) Résoudre ce système lorsque β = 1. Pas d'utilisation de Maxima.

a) $S_2 \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ +1/2 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc $S = \left\{\begin{pmatrix} 6 \\ +1/2 \\ -6 \end{pmatrix}\right\}$

Vérif $6+1-12=-5$; $6+2-6=2$; $12+1-6=7$

b) • $p=-2$ le système a soit aucune, soit une infinité de solutions

On résout $\begin{cases} x-2y-2z=-5 \\ x+4y+z=-2 \\ -2x-2y+z=7 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-5+2y+2z \\ -5+6y+3z=-2 \\ 10-6y-3z=7 \end{cases}$

$5=5$ ok

$\begin{cases} z=\frac{3-6y}{3}=1-2y \\ x=-5+2y+2-4y=-3-2y \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$ $S=\left\{\begin{pmatrix} -3-2y \\ y \\ 1-2y \end{pmatrix}, y\in\mathbb{R}\right\}$

S a une ité de solutions

• $p=1$

On résout $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ $S=\emptyset$ car les équations sont incompatibles.

Exercice 3 **Les calculs seront effectués avec Maxima** sans justification, la méthode de résolution sera bien expliquée.

1) Résoudre **matriciellement** le système suivant : $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=60 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=25 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=14 \end{cases}$

Exercice 3 Les calculs seront effectués avec Maxima sans justification, la méthode de résolution sera bien expliquée.

4,5

1) Résoudre **matriciellement** le système suivant : $(S)\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=60 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=25 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=14 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow AV=B$ où $A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 60 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix}$

det A $= \frac{1}{2160} \neq 0$, donc A est inversible et :
Calculé avec Maxima

$AV = B \iff V = A^{-1}B$

Avec Maxima, on obtient : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ -180 \end{pmatrix}$

2) Résoudre **matriciellement** le système suivant : $\begin{cases} x + 0.5y + 0.33z = 60 \\ 0.5x + 0.33y + 0.25z = 25 \\ 0.33x + 0.25y + 0.2z = 14 \end{cases}$

De même $MV = B \iff V = M^{-1}B$

ici $M = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,33 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 \\ 0,33 & 0,25 & 0,2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(M) \simeq 6,3 \cdot 10^{-5} \neq 0$

donc $V \simeq \begin{pmatrix} -33,33 \\ 595,24 \\ -619,05 \end{pmatrix}$

3) Comparer les résultats obtenus en 1) et en 2), qu'en pensez-vous ?

~~en 2)~~ les coefficients de x, y, z sont des valeurs approchées à 10^{-2} de ceux du