DM13
Polynômes et fractions

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

3) A l'aide du tableau de la transformation de Laplace, déterminer :

$\mathcal{L}[x^3-5x+1]$; $\mathcal{L}[\sin(3t)\cdot U(t)]$; $\mathcal{L}[e^{-2t}\cdot \cos(5t)\cdot U(t)]$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+7)^5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p^2+2p+5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+8}\right]$

4) Résoudre, à l'aide de la transformation de Laplace l'équation différentielle suivante :

$y''(t)+2y'(t)+y(t)=4e^{3t}$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$

Question 4 La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{13x^2}{x^4+5x^2-36} =$$

Corrigé de l'ex4 du TP4

① Factorisons $P(x) = x^4 + 5x^2 - 36$ dans $\mathbb{C}$

On pose $X = x^2$ et on résout : $X^2 + 5X - 36 = 0$.

$$\Delta = 25 - 4(-36) = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-5+13}{2} = 4 \\ X_2 = \dfrac{-5-13}{2} = -9 \end{cases}$$

puis on résout : $x^2 = 4$ et $x^2 = -9$

$\iff x = \pm 2$ $\quad\iff x = \pm 3j$

Ainsi $P(x) = (x-2)(x+2)\underbrace{(x-3j)(x+3j)}_{}$ est factorisé dans $\mathbb{C}$.

Remarque : dans $\mathbb{R}$ on obtient : $P(x) = (x-2)(x+2)(x^2+9)$

Identité Remarquable :

$(A-jB)(A+jB) = A^2 + B^2$

La fraction f est irréductible car les numérateurs et dénominateurs n'ont pas de facteur commun.

Question 4 La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{13\,x^2}{x^4+5\,x^2-36} =$$

② $f(x) = \dfrac{13x^2}{\underbrace{(x-2)(x+2)}_{x^2-4}\underbrace{(x-3j)(x+3j)}_{x^2+9}} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-3j} + \dfrac{d}{x+3j}$

pour les calculs :

$a = \left[(x-2)f(x)\right]_{x=2} = \left[\dfrac{13x^2}{(x+2)(x^2+9)}\right]_{x=2} = \dfrac{13\times 4}{4\times 13} = 1.$

$b = \left[(x+2)f(x)\right]_{x=-2} = \left[\dfrac{13x^2}{(x-2)(x^2+9)}\right]_{x=-2} = \dfrac{13\times 4}{(-4)(13)} = -1.$

$c = \left[(x-3j)f(x)\right]_{x=3j} = \left[\dfrac{13x^2}{(x^2-4)(x+3j)}\right]_{x=3j} = \dfrac{13(-9)}{(-13)(6j)} = \dfrac{9}{6j} = \dfrac{3}{2j} \times \dfrac{-j}{-j} = -\dfrac{3}{2}j$

$d = \bar{c} = \dfrac{3}{2}j$

Question 4 La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{13x^2}{x^4+5x^2-36} =$$

$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{2}j\,\frac{1}{x-3j} + \frac{3}{2}j\,\frac{1}{x+3j}$ C'est la décomposition en somme d'éléments simple de f dans $\mathbb{C}$.

Pour calculer l'intégrale dans $\mathbb{R}$, on doit décomposer f en somme d'éléments simples dans $\mathbb{R}$. Pour cela on fait la somme des deux dernières fractions conjugués. En effet : $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

ici $z = -\frac{3}{2}j\,\frac{1}{x-3j} \times \frac{x+3j}{x+3j} = -\frac{3}{2}j\,\frac{x+3j}{x^2+9} = \frac{-\frac{3}{2}jx + \frac{9}{2}}{x^2+9}$

donc

$2.\mathrm{Re}(z) = 2.\frac{\frac{9}{2}}{x^2+9} = \frac{9}{x^2+9}$ et $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{9}{x^2+9}$ est décomposée dans $\mathbb{R}$.

On en déduit, pour $|t| > 2$, la primitive suivante :

$$F(t) = \int_3^t \frac{13x^2}{x^4+5x^2-36}\,dx = \int_3^t \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{9}{x^2+9}\right) dx$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) =$$

$$F(t) = \underbrace{\int_3^t \frac{dx}{x-2} - \int_3^t \frac{dx}{x+2}}_{\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + cte} + 9 \cdot \underbrace{\int_3^t \frac{dx}{x^2+9}}_{\int \frac{u'}{u^2+1}dx = \operatorname{Arctan} u + cte}$$

$$\frac{1}{x^2+9} = \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}$$

$$= \Big[\ln|x-2|\Big]_3^t - \Big[\ln|x+2|\Big]_3^t + 3\int_3^t \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx$$

$$u = \frac{x}{3} \Rightarrow u' = \frac{1}{3}$$

$$F(t) = \ln|t-2| - \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln|t+2| + \ln 3 + 3\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_3^t = \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + \ln 3 + 3\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{3\pi}{4}$$

Question 4 La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{13x^2}{x^4+5x^2-36} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{9}{x^2+9}$$

On en déduit, pour $|t| > 2$, la primitive suivante :

$$F(t) = \int_3^t \frac{13x^2}{x^4+5x^2-36}\,dx = \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + \ln 3 + 3\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{3\pi}{4}$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\ln\left|\frac{t}{t}\right|}_{0} + \ln 3 + 3\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{3\pi}{4} = \ln 3 + \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \ln 3 + \frac{3\pi}{4}$$