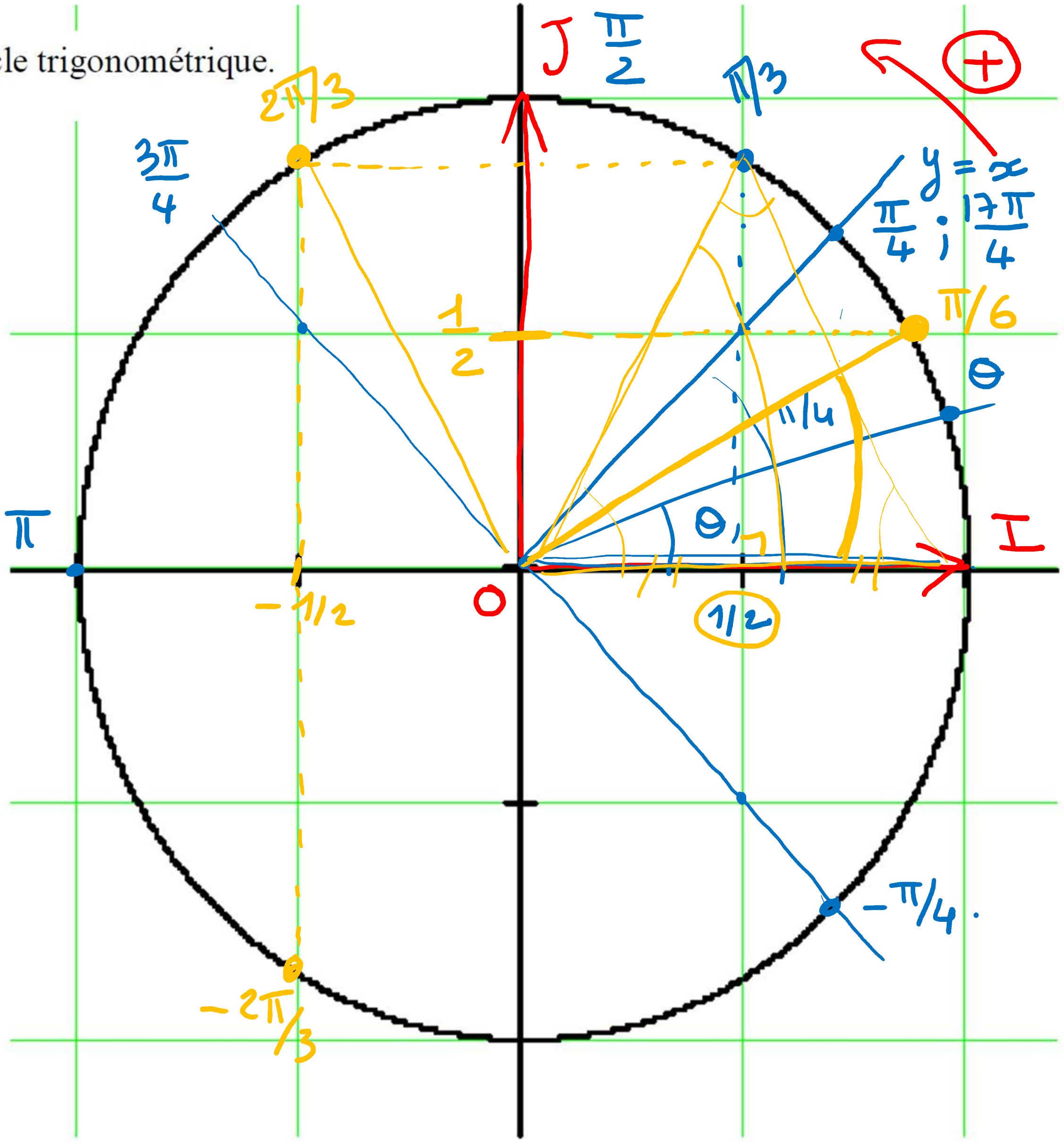
Le cercle trigonométrique

Les objectifs

1) Compléter un cercle en le cercle trigonométrique.
2) Placer des angles
3) Repérer le cosinus et le sinus d'un angle
4) Lire certaines formules trigonométrique (cos(-a), sin(-a), cos(a-b))

1) Compléter un cercle en le cercle trigonométrique.
2) Placer des angles



$R = 1$

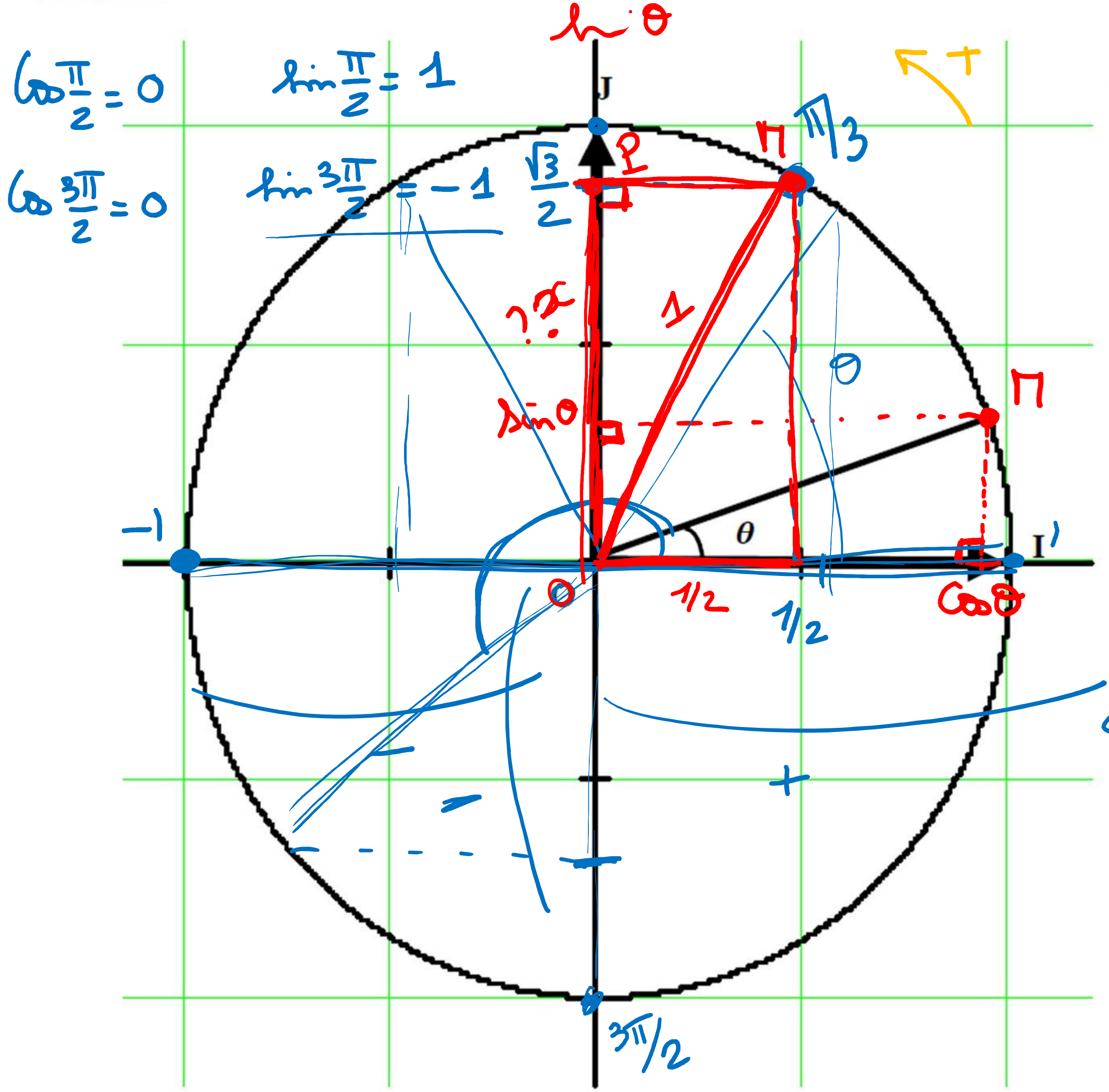
Page 1

17π ; $-\pi$; 3π ; π
$(2k+1)\pi$
avec $k \in \mathbb{Z}$.

0 ; 2π ; 4π ; 6π ...
$2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

3) Repérer le cosinus et le sinus d'un angle



$\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$ Page 2

$\cos 2\pi = 1$; $\sin 2\pi = 0$

$\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$

$$\boxed{-1 \leq \cos\theta \leq 1 \ ; \ -1 \leq \sin\theta \leq 1}$$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$??

Pythagore dans OMP : $OM^2 = OP^2 + PM^2$

$\iff 1 = x^2 + \frac{1}{4}$

$x^2 = \frac{3}{4}$

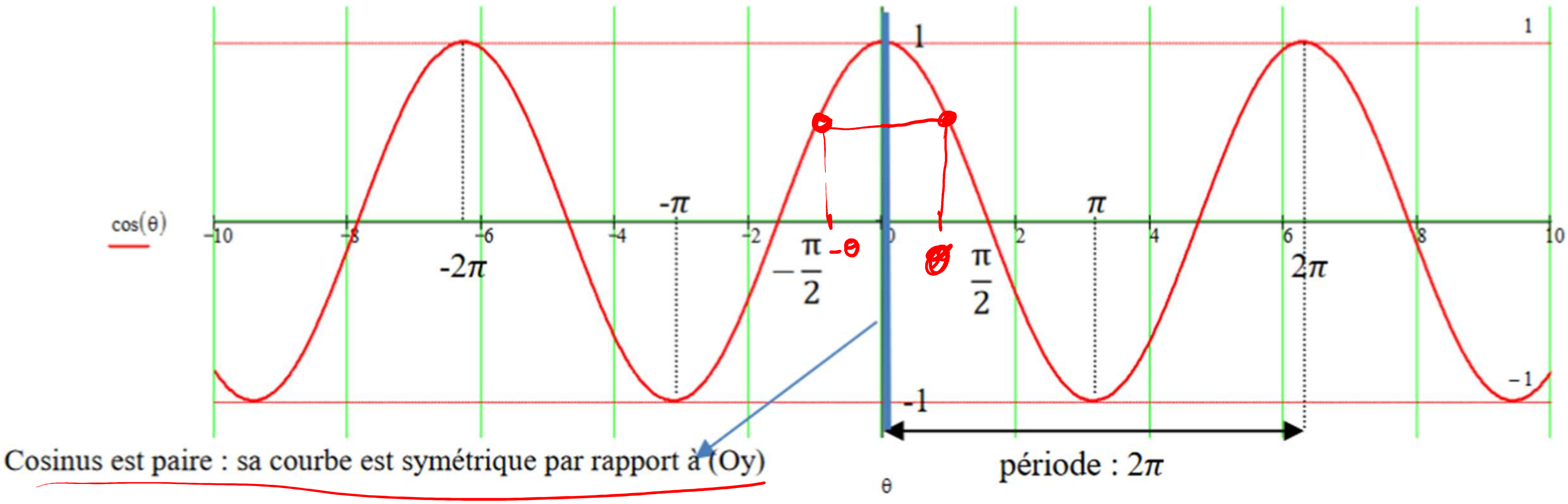
$\iff x = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\cancel{-\sqrt{\frac{3}{4}}}$ $\iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

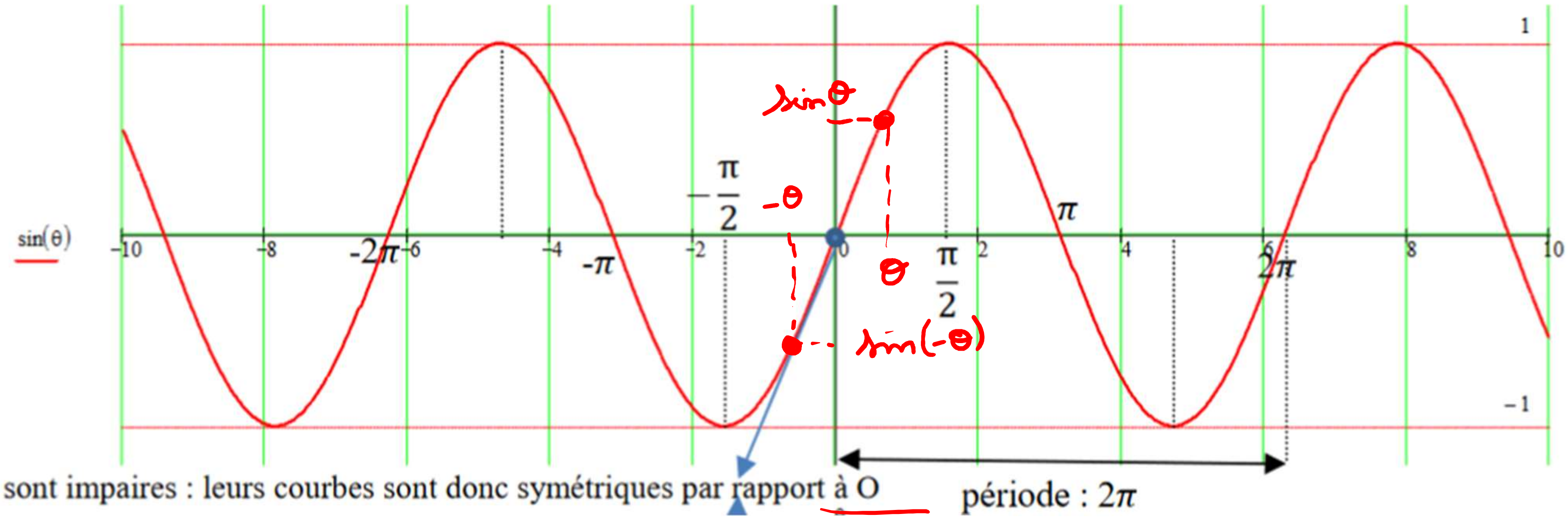
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \end{array}}$$

cos est 2π-périodique.

sin est 2π-périodique.



cos(θ)
1
-1
-π
π
-2π
2π
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
-θ
θ
Cosinus est paire : sa courbe est symétrique par rapport à (Oy)
période : 2π
θ

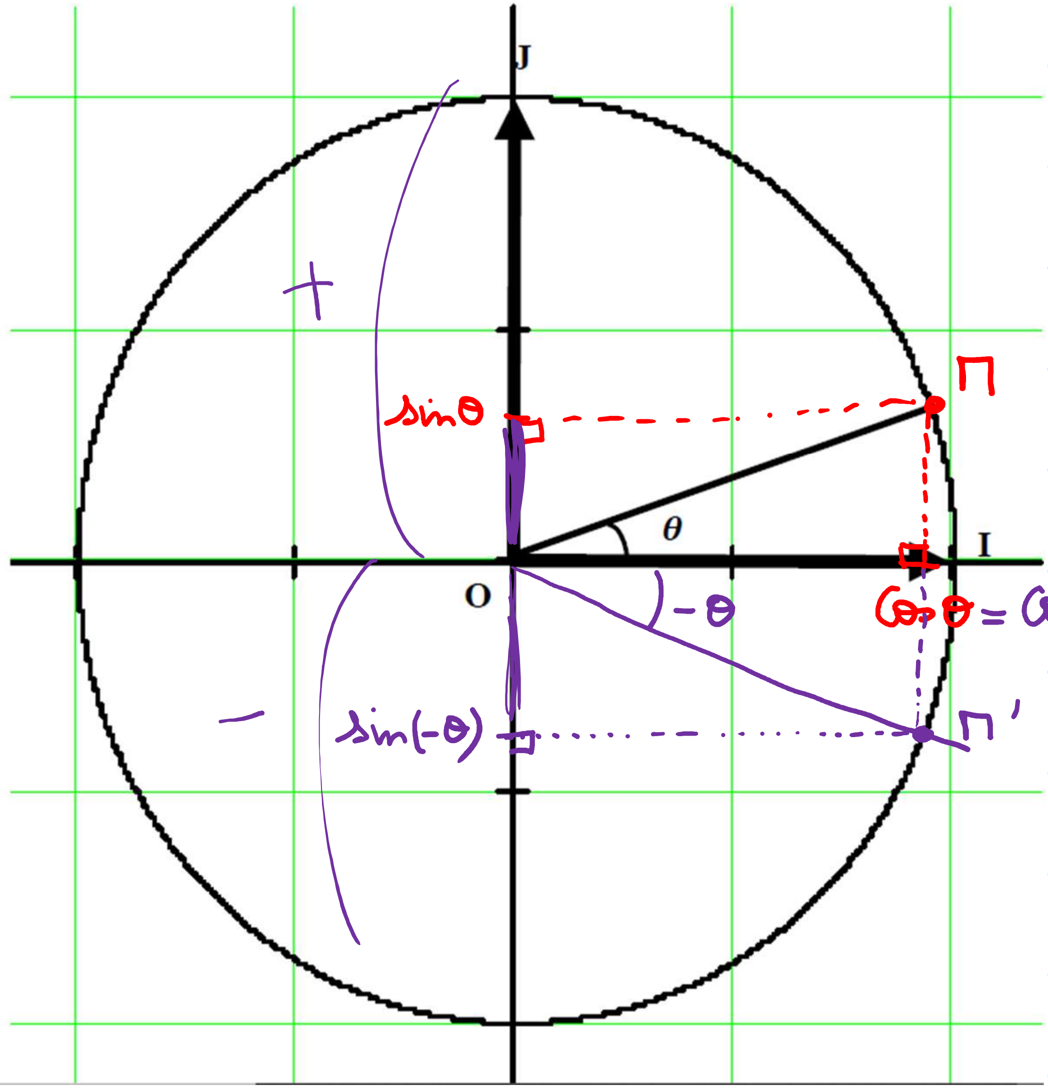


Sinus et tangente sont impaires : leurs courbes sont donc symétriques par rapport à O

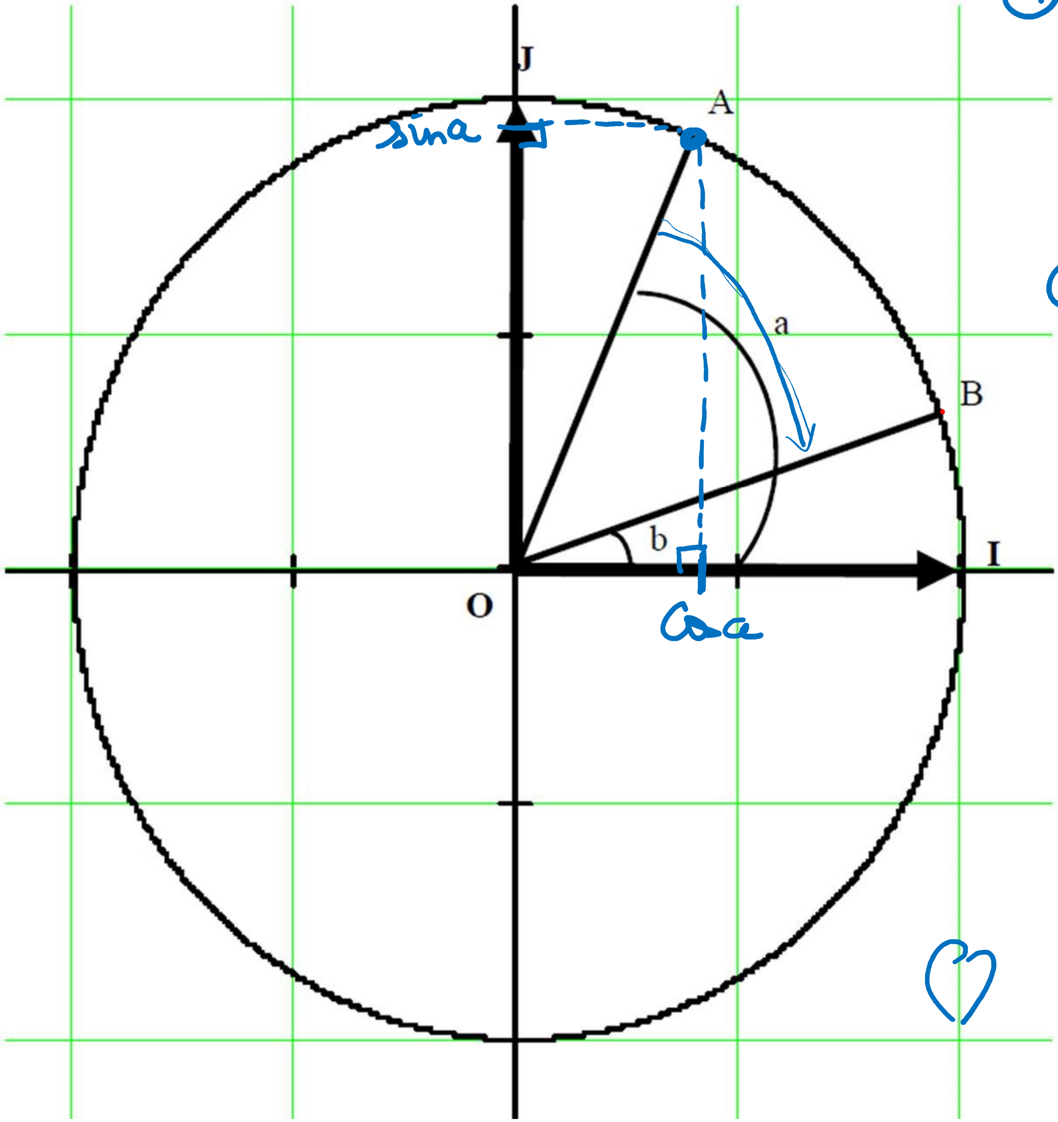
4) Lire les formules $\cos(-\theta)$ et $\sin(-\theta)$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ Cos. est paire

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ Sin est impaire.



4bis) Lire la formule cos(a-b)



Page 4

① $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \underbrace{OA}_{1}\times\underbrace{OB}_{1}\times\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} = \underline{\cos(a-b)}$

② $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_A x_B + y_A y_B$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \underline{\cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b}$

$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b.$

en déduire

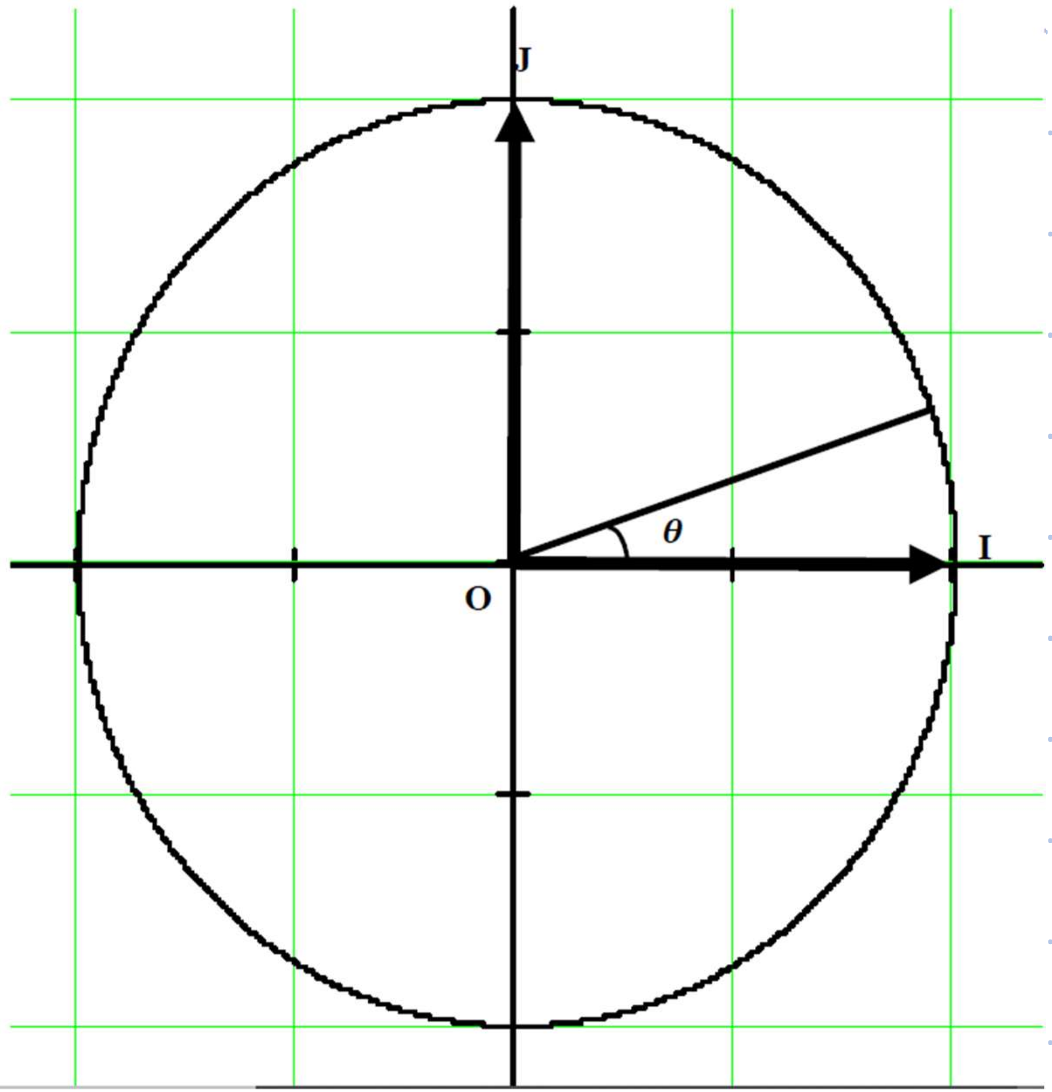
$\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$

$= \cos a\cdot\cos(-b) + \sin a\cdot\sin(-b)$

$\boxed{\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\,\sin b}$

Un moyen mnémotechnique pour retenir les cosinus et sinus des angles remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					


J
θ
I
O

Notes

Amphi 2

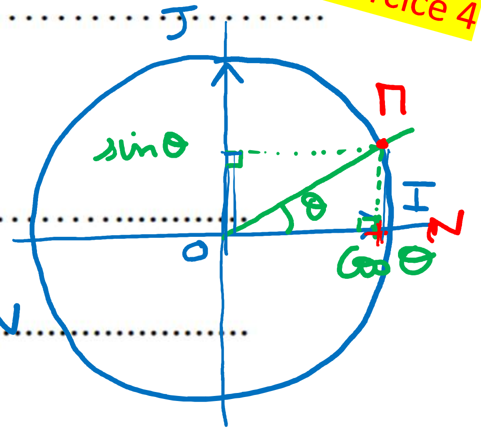
Les formules trigonométriques :
à apprendre par cœur et/ou à savoir retrouver
Applications

Les objectifs :

1) Étudier quelques formules indispensables pour le GEII
2) Application au calcul d'intégrales.

Amphi 2

Page 28 Exercice 4



Exercice 4 Compléter sans utiliser de formulaire de trigonométrie :

1) $\boxed{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1}$

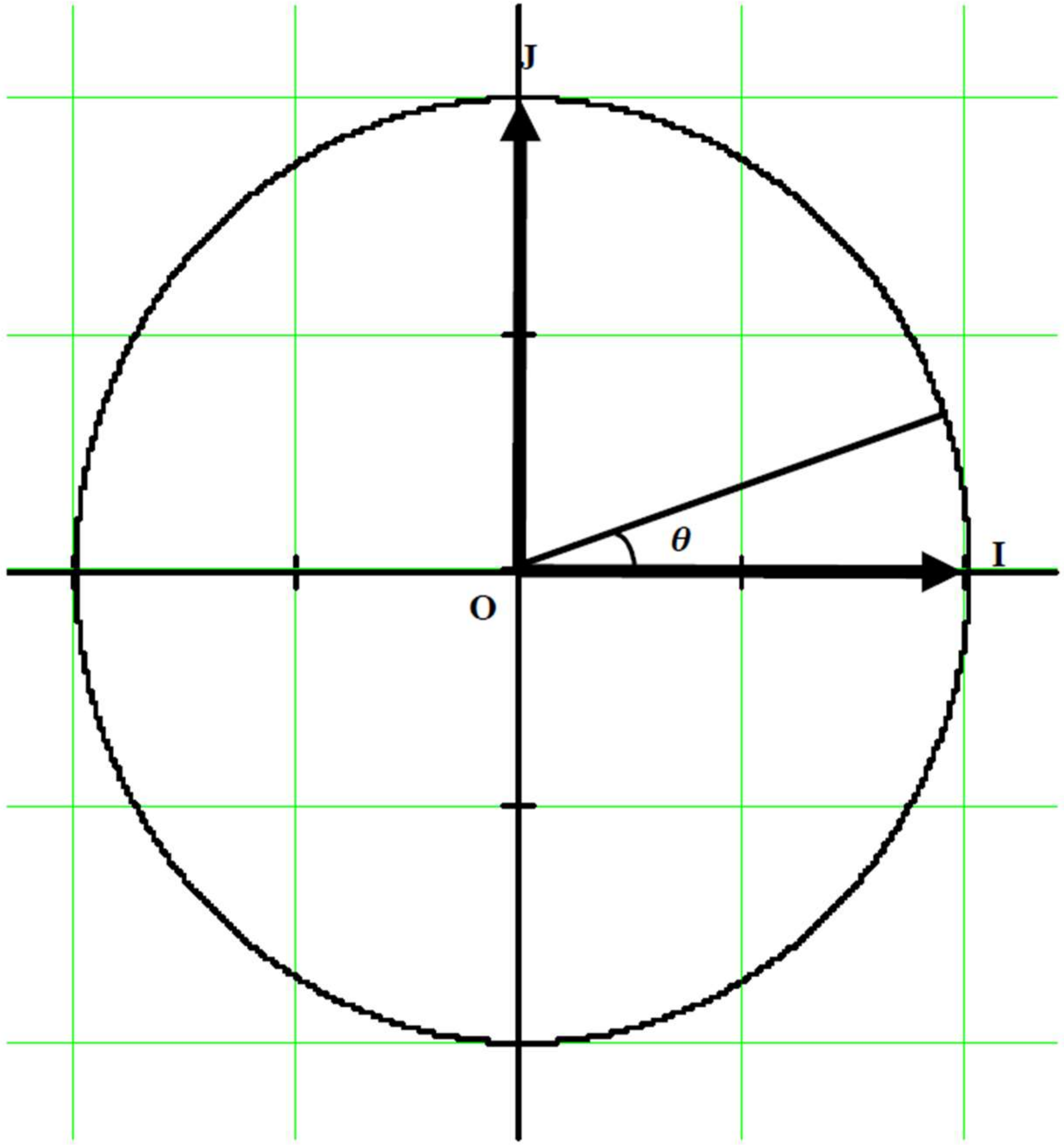
Justification : Pythagore dans OMN triangle rectangle en N

$OM^2 = ON^2 + NM^2 \iff 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

2) Définition de $\boxed{\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ $\boxed{\forall\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}}$ pour tout

Alors : $1+\tan^2(\theta) = 1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ $\theta \neq$ ....

et : $1+\tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta}$ Voir page 31. $\forall\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$


J
θ
I
O

Page 31

* Dérivée de $\tan\theta$:

$$(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' =$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

ici $U = \sin\theta \Rightarrow U' = \cos\theta$

$V = \cos\theta \Rightarrow V' = -\sin\theta$

$$(\tan\theta)' = \frac{\cos\theta.\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \begin{cases} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \\ = 1 + \tan^2\theta \end{cases}$$

$\forall\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Page 28 & 29

3) Rappeler les formules trigonométriques suivantes :

$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}$

contrariant

$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}$

sympa

En déduire les formules suivantes :

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \cdot \underbrace{\cos(-b)}_{\cos b} - \sin a \cdot \underbrace{\sin(-b)}_{-\sin b}$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cdot \underbrace{\cos(-b)}_{\cos b} + \underbrace{\sin(-b)}_{-\sin b} \cdot \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$

$\sin(2a) = \sin(a+a) = \underbrace{\sin a \cdot \cos a}_{\times} + \underbrace{\sin a \cdot \cos a}_{\times}$

$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos^2(a)$:

$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

On sait que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \iff \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

Donc $\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2\cos^2 a - 1$

En déduire les formules de linéarisation de $\cos^2(a)$ et de $\sin^2(a)$ (traduction : transformer le produit $\cos^2(a)$ en somme, et faire de même avec $\sin^2(a)$)

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \iff 2\cos^2 a = 1 + \cos(2a) \iff \cos^2 a = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$

Produit $\Rightarrow$ somme.

Voir page 31.

Page 31

* Calcul de valeur moyenne et efficace:

Rappel: $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

F : primitive de f : $F'(t) = f(t)$

$$\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\,dt$$

Exple: • $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_0^{\pi/3} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/4}$

Rappel: $(\sin U)' = U' \cdot \cos U \Rightarrow (\sin(at))' = a \cdot \cos(at)$

$\Rightarrow \int \cos(at)\,dt = \frac{1}{a} \sin(at)$ • $a \neq 0$

donc $J = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}$.