
Table des matières

I. Exemples

1. Le système de SAINT-VENANT	5
1.1. Hyperbolicité	6
1.2. Nature des champs caractéristiques	7
1.3. Invariants de Riemann	7
1.4. Problème de Riemann : introduction	9
1.5. Étude des détentés	9
1.6. Étude des chocs	12
1.7. Problème de Riemann : conclusion	15
1.7.1. Étape I : calcul de l'état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$	16
1.7.2. Étape II : définition des vitesses des ondes et de la solution dans les détentés	17
1.7.3. Étape III : solution complète	17
1.8. Entropie	20
2. Un système hyperbolique avec des champs linéairement dégénérés	23

II. Projets

Liste des projets	31
3. Étude du système de Saint-Venant par relaxation	35
4. Étude du système de Ripa	37
5. Étude du système de Ripa par relaxation	39
6. Étude du système de SAINT-VENANT avec une loi de frottement de type Mohr-Coulomb	41
7. Étude du p-système isotherme	43
8. Étude du p-système isotherme par relaxation en pression	45
9. Étude du système de l'acoustique fortement non linéaire	47
10. Étude du p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes	49
11. Étude du p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes par relaxation en pression	51
12. Étude du système de l'acoustique fortement non linéaire en coordonnées Lagrangiennes	53
13. Étude du modèle $\tau_{UV\Pi}$	55
14. Étude du p-système isotherme avec friction	57
15. Étude du p-système isentropique	59

16.Étude du p-système isentropique par relaxation en volume.....	61
17.Étude d'un mélange diphasique isentropique.....	63
18.Étude du p-système isentropique en coordonnées Lagrangiennes.....	65
19.Étude du p-système isentropique en coordonnées Lagrangiennes par relaxation en volume	67
20.Étude d'un mélange diphasique isentropique en coordonnées Lagrangiennes	69
21.Étude du modèle de gaz de Chaplygin.....	71
22.Étude du p-système isentropique avec une loi d'état logarithmique	73
23.Étude d'un modèle d'écoulement sanguin	75
24.Étude du système de Aw Rascle en $\rho-w$	77
25.Étude du système de AW et RASCLE	79
26.Étude du système uv	81
27.Étude du système uv bis.....	83

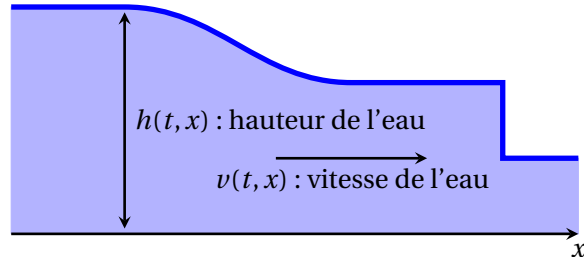
Première partie

EXEMPLES

1.

Le système de Saint-Venant

Nous cherchons à modéliser l'écoulement d'eau sous l'hypothèse de faible profondeur dans le cas unidimensionnel avec un fond plat. De plus, nous supposons que l'eau se comporte comme un fluide incompressible et non visqueux, en négligeant les frottements entre l'air et l'eau ainsi qu'entre l'eau et le sol. Les variables inconnues, qui dépendent du temps $t \in [0; +\infty[$ et de l'espace $x \in \mathbb{R}$, sont $h \equiv h(t, x) > 0$ la hauteur de l'eau et $v \equiv v(t, x) \in \mathbb{R}$ sa vitesse horizontale (nous supposons qu'elle est uniforme sur toute la hauteur de l'eau). On note $g > 0$ la constante de gravité. En considérant une dimension spatiale et une topographie plate, ce type d'écoulement est modélisé par le système de Saint Venant, aussi connu sous le nom d'équations des eaux peu profondes ("*shallow water*" en anglais)



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + \frac{g}{2}h^2) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.1)$$

Sous forme vectorielle il s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

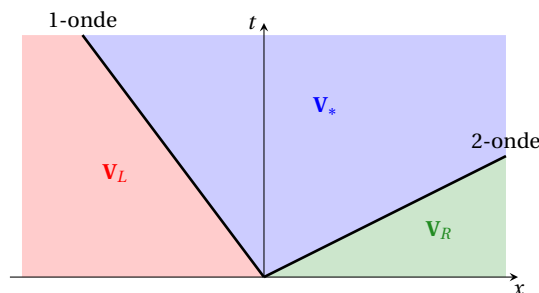
ayant défini

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} hv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse au problème de Riemann, c'est-à-dire à une condition initiale de la forme

$$\mathbf{V}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{V}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{V}_L = (h_L, h_L v_L)^T$ et $\mathbf{V}_R = (h_R, h_R v_R)^T$ sont deux états constants. La solution est constituée de trois états constants \mathbf{V}_L , \mathbf{V}_* et \mathbf{V}_R séparés par deux ondes. Ci-dessous on va calculer \mathbf{V}_* et les ondes qui séparent ces trois états constants.



1.1. Hyperbolicité.

Tout d'abord nous allons écrire une forme non-conservative dans un autre jeu de variables que celles du vecteur \mathbf{V} . On développe les dérivées du système (1.1) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ v\partial_t h + h\partial_t v + v\partial_x(hv) + (hv)\partial_x v + gh\partial_x h = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t h + v\partial_x h + h\partial_x v = 0, \\ h(\partial_t v + v\partial_x v + g\partial_x h) = 0 \end{cases}$$

et on trouve le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{W} \stackrel{\text{def}}{=} (h, v)$, alors le système (1.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

où la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix}.$$

On cherche les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$, *i.e.* les deux solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbb{I}) = 0$:

$$(v - \lambda)^2 - hg = 0.$$

Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. On obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} v - \sqrt{gh} < \lambda_2(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} v + \sqrt{gh}.$$

Pour $h > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (1.1) est strictement hyperbolique.

On cherche maintenant une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. On peut prendre comme vecteurs propres à droites les vecteurs

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Bien-sûr, on peut aussi choisir

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}.$$

1.2. Nature des champs caractéristiques.

Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (\nabla \lambda_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \begin{pmatrix} \partial(v - \sqrt{gh})/\partial h \\ \partial(v - \sqrt{gh})/\partial v \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{h}/3\sqrt{g} \\ 2/3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0, \\ (\nabla \lambda_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v + \sqrt{gh})}{\partial h} \frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} + \frac{\partial(v + \sqrt{gh})}{\partial v} \frac{2}{3} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Les deux champs sont vraiment non linéaires. Le caractère véritablement non linéaire des valeurs propres implique que toutes les ondes sont soit des ondes de raréfaction soit des chocs (il n'y aura aucune discontinuité de contact).

1.3. Invariants de Riemann.

Comme $p = 2$ on doit trouver $p - 1 = 1$ invariant de Riemann pour chaque champ caractéristique, autrement dit on doit trouver $\mathfrak{J}_1(\mathbf{W})$ et $\mathfrak{J}_2(\mathbf{W})$ tels que $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$, ayant noté \mathfrak{J}_k l'invariant de Riemann du k^e champ caractéristique.

Parfois on peut intuitiver les invariants de Riemann. Il suffit alors de vérifier que $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour confirmer l'intuition.

Cependant, comment trouver les invariants dans le cas générale? Pour cela il faut tout d'abord trouver un vecteur $\mathbb{1}(\mathbf{W})$ pour lequel le système est diagonal, autrement-dit on cherche un vecteur $\mathbb{1}(\mathbf{W})$ tel que

$$\partial_t \mathbb{1} + \mathbb{D}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbb{1} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{W}) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\mathbf{W}) \end{pmatrix}.$$

Dans le champ $k = 1$ c'est la composante $\mathbb{1}_2$ qui est un invariant et dans le champ $k = 2$ c'est la composante $\mathbb{1}_1$ qui est un invariant, ainsi on posera

$$\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = \mathbb{1}_2, \quad \mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = \mathbb{1}_1.$$

- MÉTHODE 1 : on cherche une combinaison "astucieuse" des équations pour obtenir cette forme diagonale.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_t h + v \partial_x h + h \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + g \partial_x h + v \partial_x v = 0 \end{cases} & \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 - \sqrt{\frac{g}{h}} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{\frac{g}{h}} L_1 \end{matrix}} \begin{cases} \partial_t v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h + \left(g - \sqrt{\frac{g}{h}} v\right) \partial_x h + \left(v - \sqrt{\frac{g}{h}} h\right) \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h + \left(g + \sqrt{\frac{g}{h}} v\right) \partial_x h + \left(v + \sqrt{\frac{g}{h}} h\right) \partial_x v = 0, \end{cases} \\ & \rightsquigarrow \begin{cases} \partial_t v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h - \sqrt{\frac{g}{h}} (v - \sqrt{gh}) \partial_x h + (v - \sqrt{gh}) \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h + \sqrt{\frac{g}{h}} (v - \sqrt{gh}) \partial_x h + (v + \sqrt{gh}) \partial_x v = 0, \end{cases} \\ & \rightsquigarrow \begin{cases} \left(\partial_t v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h\right) + (v - \sqrt{gh}) \left(\partial_x v - \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_x h\right) = 0, \\ \left(\partial_t v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_t h\right) + (v + \sqrt{gh}) \left(\partial_x v + \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_x h\right) = 0, \end{cases} \\ & \rightsquigarrow \begin{cases} \left(\partial_t v - 2\sqrt{g} \partial_t \sqrt{h}\right) + (v - \sqrt{gh}) \left(\partial_x v - 2\sqrt{g} \partial_x \sqrt{h}\right) = 0, \\ \left(\partial_t v + 2\sqrt{g} \partial_t \sqrt{h}\right) + (v + \sqrt{gh}) \left(\partial_x v + 2\sqrt{g} \partial_x \sqrt{h}\right) = 0, \end{cases} \\ & \rightsquigarrow \begin{cases} \partial_t (v - 2\sqrt{gh}) + (v - \sqrt{gh}) \partial_x (v - 2\sqrt{gh}) = 0, \\ \partial_t (v + 2\sqrt{gh}) + (v + \sqrt{gh}) \partial_x (v + 2\sqrt{gh}) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{I}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v - 2\sqrt{gh} \\ v + 2\sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

- MÉTHODE 2 : si on note

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) = [\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) | \mathbf{r}_2(\mathbf{W})]$$

la matrice de changement de base (qui transforme le système en \mathbf{W} en le système diagonale de variable \mathbb{I}), alors

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbb{I}.$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial h} & \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial h} & \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Ici

$$\mathbb{P} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{h}{g}} & \sqrt{\frac{h}{g}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{-1} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{g}{h}} & 1 \\ \sqrt{\frac{g}{h}} & 1 \end{pmatrix},$$

ou, si on choisit le deuxième jeu de vecteurs propres,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} & \sqrt{h} \\ \sqrt{g} & \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{h}} & \frac{1}{\sqrt{g}} \\ \frac{1}{\sqrt{h}} & \frac{1}{\sqrt{g}} \end{pmatrix},$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial h} &= -\frac{1}{2\sqrt{h}}, & \rightsquigarrow & \mathbb{I}_1(\mathbf{W}) = \int -\frac{1}{2\sqrt{h}} dh + f(v) = -\sqrt{h} + f(v) \\ & & \rightsquigarrow & \frac{1}{2\sqrt{g}} = \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial v} = f'(v) \quad \rightsquigarrow \quad f(v) = \frac{1}{2\sqrt{g}} v \\ & & \rightsquigarrow & \mathbb{I}_1(\mathbf{W}) = -\sqrt{h} + \frac{1}{2\sqrt{g}} v = \frac{v - 2\sqrt{gh}}{2\sqrt{g}} \\ \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial h} &= \frac{1}{2\sqrt{h}}, & \rightsquigarrow & \mathbb{I}_2(\mathbf{W}) = \int \frac{1}{2\sqrt{h}} dh + f(v) = \sqrt{h} + f(v) \\ & & \rightsquigarrow & \frac{1}{2\sqrt{g}} = \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial v} = f'(v) \quad \rightsquigarrow \quad f(v) = \frac{1}{2\sqrt{g}} v \\ & & \rightsquigarrow & \mathbb{I}_2(\mathbf{W}) = \sqrt{h} + \frac{1}{2\sqrt{g}} v = \frac{v + 2\sqrt{gh}}{2\sqrt{g}} \end{aligned}$$

ce qui donne le vecteur

$$\mathbb{I}(\mathbf{W}) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \begin{pmatrix} v - 2\sqrt{gh} \\ v + 2\sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

En conclusion, on pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \mathbb{I}_2 = v + 2\sqrt{gh}, \\ \mathfrak{J}_2 &= \mathbb{I}_1 = v - 2\sqrt{gh}. \end{aligned}$$

Lorsque les invariants sont déjà donnés, on doit juste vérifier qu'on a bien $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$. Dans notre cas on a bien

$$\begin{aligned} (\nabla \mathfrak{J}_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial h} \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial v} \frac{2}{3} = 0, \\ (\nabla \mathfrak{J}_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial h} \frac{2\sqrt{h}}{3\sqrt{g}} + \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial v} \frac{2}{3} = 0. \end{aligned}$$

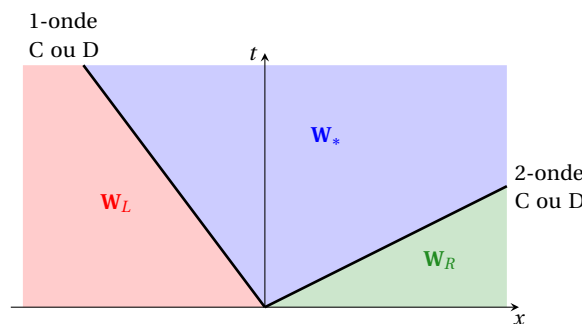
1.4. Problème de Riemann : introduction.

Soit un problème de Riemann, *i.e.* considérons la condition initiale

$$\mathbf{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ v_L \end{pmatrix}$ et $\mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ v_R \end{pmatrix}$ sont deux états constants donnés avec $h_L \geq 0$, $h_R \geq 0$, $v_L \in \mathbb{R}$ et $v_R \in \mathbb{R}$.

La solution faible entropique du problème de Riemann est constituée d'au plus **3 états constants** \mathbf{W}_L , \mathbf{W}_* , \mathbf{W}_R , **séparés par deux ondes**. Ainsi, pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R donnés, on construit une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . Chaque onde $k = 1, 2$ est associée à un champ VNL donc elle est soit une k -détente soit un k -choc, comme dans la figure ci-dessous :



Il y a quatre possibles structures de la solution :

1. \mathbf{W}_L , 1-choc, \mathbf{W}_* , 2-choc, \mathbf{W}_R ;
2. \mathbf{W}_L , 1-choc, \mathbf{W}_* , 2-détente, \mathbf{W}_R ;
3. \mathbf{W}_L , 1-détente, \mathbf{W}_* , 2-choc, \mathbf{W}_R ;
4. \mathbf{W}_L , 1-détente, \mathbf{W}_* , 2-détente, \mathbf{W}_R .

Pour expliciter cette solution on doit définir :

- les vitesses des chocs σ_1 et σ_2 ,
- les états dans les détente : $\mathbf{W}_{1\text{-det}}(t, x)$ et $\mathbf{W}_{2\text{-det}}(t, x)$,
- l'état constant intermédiaire $\mathbf{W}_* = \begin{pmatrix} h_* \\ v_* \end{pmatrix}$.

1.5. Étude des détente.

On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ par une onde de détente.

- La k -détente est comprise entre la droite $x = \lambda_k(\mathbf{W}_g)t$ et la droite $x = \lambda_k(\mathbf{W}_d)t$:

$$\lambda_k(\mathbf{W}_g) \leq \frac{x}{t} = \lambda_k(\mathbf{W}) \leq \lambda_k(\mathbf{W}_d).$$

Plus précisément, la vitesse caractéristique vérifie $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W})$. De même, les inégalités s'écrivent $\lambda_k(\mathbf{W}_g) \leq x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}) \leq \lambda_k(\mathbf{W}_d)$. Comme $\lambda_k(\mathbf{W})$ ne dépend pas explicitement de t on a tout simplement $x = \lambda_k(\mathbf{W})t$.

- Dans une k -détente l'invariant de Riemann \mathfrak{I}_k est conservé :

$$\mathfrak{I}_k(\mathbf{W}_g) = \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}) = \mathfrak{I}_k(\mathbf{W}_d).$$

1. 1-champ : on cherche les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ (connu) par une 1-onde de détente.

- La condition $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W}_*)$ se réécrit $v_L - \sqrt{gh_L} < v_* - \sqrt{gh_*}$ donc

$$v_* > v_L + \sqrt{g}(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_L}).$$

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$, alors

$$\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_L) = \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_*) \quad \rightsquigarrow \quad v_L + 2\sqrt{gh_L} = v_* + 2\sqrt{gh_*}$$

$$\text{d'où } h_* \mapsto v_*(h_*) = v_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_*}).$$

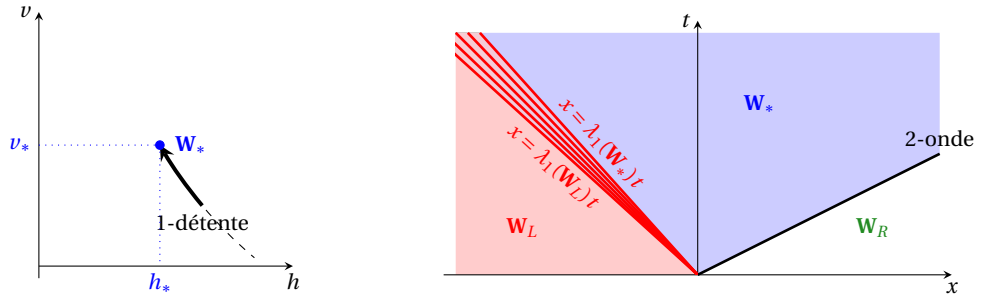
Les deux conditions donnent

$$\underbrace{v_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_*})}_{v_*} > v_L + \sqrt{g}(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_L}) \quad \rightsquigarrow \quad 3\sqrt{g}\sqrt{h_L} > 3\sqrt{g}\sqrt{h_*}.$$

On conclut que les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ donné par une 1-onde de détente vérifient

$$h_* < h_L, \quad v_* > v_L \quad \text{et} \quad v_*(h_*) = v_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_*}).$$

On a donc les graphes suivants : ¹



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieur de la 1-onde de détente, on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$.

- La vitesse de la 1-onde de détente vérifie

$$\lambda_1(\mathbf{W}_L) \leq \frac{x}{t} = \lambda_1(\mathbf{W}) \leq \lambda_1(\mathbf{W}_*),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = \lambda_1(\mathbf{W}) = v - \sqrt{gh}.$$

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$, alors

$$\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_L) = \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = \mathfrak{I}_1(\mathbf{W}_*) \quad \rightsquigarrow \quad v + 2\sqrt{gh} = v_L + 2\sqrt{gh_L}.$$

1. De plus, pour $h_* < h_L$,

$$(v_*)'(h_*) = -\sqrt{\frac{g}{h_*}} < 0,$$

$$(v_*)''(h_*) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{(h_*)^3}} > 0.$$

Ainsi

$$v = v_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh} = v_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\left(v - \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right) \rightsquigarrow v(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{3}\left(v_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)$$

et

$$h = \frac{\left(v - \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)^2}{g} \rightsquigarrow h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g}\left(v_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)^2.$$

2. 2-champ : on cherche les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$ (connu) par une 2-onde de détente.

- La condition $\lambda_2(\mathbf{W}_*) < \lambda_2(\mathbf{W}_R)$ se réécrit $v_* + \sqrt{gh_*} < v_R + \sqrt{gh_R}$ donc

$$v_* < v_R + \sqrt{g}\left(\sqrt{h_R} - \sqrt{h_*}\right).$$

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$ alors

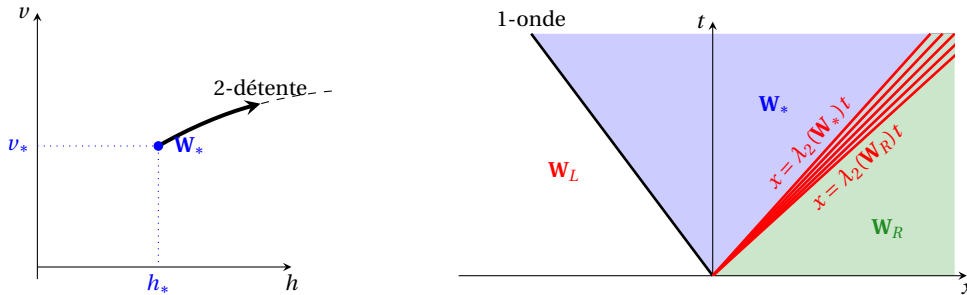
$$\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}_*) = \mathfrak{I}_2(\mathbf{W}_R) \rightsquigarrow v_* - 2\sqrt{gh_*} = v_R - 2\sqrt{gh_R}$$

$$\text{d'où } h_* \mapsto v_*(h_*) = v_R + 2\sqrt{g}\left(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_R}\right).$$

On conclut que les états les états $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$ donné par une 2-onde de détente vérifient

$$h_* < h_R, \quad v_* < v_R \quad \text{et} \quad v_*(h_*) = v_R + 2\sqrt{g}\left(\sqrt{h_*} - \sqrt{h_R}\right).$$

On a donc les graphes suivants :²



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieur de la 2-onde de détente, on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$.

- La vitesse caractéristique de l'onde est

$$\lambda_2(\mathbf{W}_*) \leq \frac{\hat{x}}{\hat{t}} = \lambda_2(\mathbf{W}) \leq \lambda_2(\mathbf{W}_R)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = v + \sqrt{gh}.$$

- Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$, alors

$$\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}_*) = \mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = \mathfrak{I}_2(\mathbf{W}_R) \rightsquigarrow v - 2\sqrt{gh} = v_R - 2\sqrt{gh_R}.$$

2. De plus, pour $h_* < h_R$,

$$(v_*)'(h_*) = \sqrt{\frac{g}{h_*}} > 0,$$

$$(v_*)''(h_*) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{(h_*)^3}} < 0.$$

Ainsi

$$v = v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\sqrt{gh} = v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}} - v\right) \quad \rightsquigarrow \quad v(\hat{t}, \hat{x}) = \frac{1}{3}\left(v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)$$

et

$$h = \frac{\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}} - v\right)^2}{g} \quad \rightsquigarrow \quad h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g}\left(-v_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{\hat{x}}{\hat{t}}\right)^2.$$

1.6. Étude des chocs.

Passons maintenant à la description des courbes de choc. Une k -onde de choc est une solution discontinue, constante par morceaux, satisfaisant la condition d'entropie, qui se propage à une vitesse $\dot{\sigma}_k$ dépendant des états existant de part et d'autre du saut. Les variables conservatives doivent respecter les conditions de saut de Rankine-Hugoniot. La courbe $x = \sigma_k(t)$ est la trajectoire du choc et $\dot{\sigma}_k$ est la vitesse du choc.

On a vu que, pour les courbes de raréfaction, si la valeur propre ne dépend pas explicitement du temps, dans le plan (t, x) on a des droites de pente la valeur propre. De manière analogue, si σ_k ne dépend pas de t , on a des droites de pente $\dot{\sigma}_k$.

Les relations de Rankine-Hugoniot pour un choc de vitesse $\dot{\sigma}_k$ entre un état gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ et un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_k = \frac{[[hv]]}{[[h]]} = \frac{h_g v_g - h_d v_d}{h_g - h_d}, \\ \dot{\sigma}_k = \frac{[[hv^2 + \frac{g}{2}h^2]]}{[[hv]]} = \frac{h_g v_g^2 + \frac{g}{2}h_g^2 - h_d v_d^2 - \frac{g}{2}h_d^2}{h_g v_g - h_d v_d}, \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases} h_d v_d - \dot{\sigma}_k h_d = h_g v_g - \dot{\sigma}_k h_g, \\ (v_d - \dot{\sigma}_k)h_d v_d - (v_g - \dot{\sigma}_k)h_g v_g = \frac{g}{2}(h_g^2 - h_d^2), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} j_k \stackrel{\text{def}}{=} h_d(v_d - \dot{\sigma}_k) = h_g(v_g - \dot{\sigma}_k), \\ j_k(v_d - v_g) = \frac{g}{2}(h_g^2 - h_d^2). \end{cases}$$

On en déduit que

$$j_k = \frac{g}{2} \frac{h_g^2 - h_d^2}{v_d - v_g}.$$

De plus, en éliminant $\dot{\sigma}_k$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve :

$$\frac{h_g v_g - h_d v_d}{h_g - h_d} = \frac{h_g v_g^2 + \frac{g}{2}h_g^2 - h_d v_d^2 - \frac{g}{2}h_d^2}{h_g v_g - h_d v_d}$$

d'où

$$\frac{(h_g v_g - h_d v_d)^2}{h_g - h_d} = h_g v_g^2 - h_d v_d^2 + \frac{g}{2}(h_g^2 - h_d^2)$$

soit encore

$$(h_g v_g)^2 + (h_d v_d)^2 - 2h_g h_d v_g v_d = (h_g v_g)^2 - h_g h_d v_d^2 - h_g h_d v_g^2 + (h_d v_d)^2 + \frac{g}{2} (h_g^2 - h_d^2) (h_g - h_d).$$

On simplifie

$$-2h_g h_d v_g v_d = -h_g h_d v_d^2 - h_g h_d v_g^2 + \frac{g}{2} (h_g^2 - h_d^2) (h_g - h_d)$$

et on réarrange les termes

$$h_g h_d (v_d^2 + v_g^2 - 2v_g v_d) = \frac{g}{2} (h_g - h_d)^2 (h_g + h_d)$$

pour obtenir

$$(v_g - v_d)^2 = \frac{g}{2} (h_g - h_d)^2 \frac{h_g + h_d}{h_g h_d}.$$

De plus, la condition d'admissibilité de Lax pour le k -choc s'écrit

$$\lambda_{k-1}(\mathbf{W}_g) < \dot{\sigma}_k \quad \lambda_k(\mathbf{W}_d) < \dot{\sigma}_k < \lambda_k(\mathbf{W}_g) \quad \dot{\sigma}_k < \lambda_{k+1}(\mathbf{W}_d)$$

Ainsi on a les deux cas

$$\begin{aligned} k=1, g=L, d=* & \rightsquigarrow \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L) & \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}_*) \\ k=2, g=*, d=R & \rightsquigarrow \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_2 & \lambda_2(\mathbf{W}_R) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_*) \end{aligned}$$

1. 1-champ : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ par une discontinuité (entropique) de vitesse $\dot{\sigma}_1$. Dans nos formules on a $d = *$ et $g = L$. La condition d'entropie (Lax) pour $k = 1$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_1$ du 1-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \\ \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}_*), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v_* - \sqrt{gh_*} < \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_1 < v_* + \sqrt{gh_*}, \\ \dot{\sigma}_1 < v_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases} \xrightarrow{g=L, d=*} \begin{cases} j_1 < h_* \sqrt{gh_*} \\ j_1 > -h_* \sqrt{gh_*}, \\ j_1 > h_L \sqrt{gh_L}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_* > h_L, \\ j_1 > 0, \end{cases} \xrightarrow{j_1 = \frac{g(h_L^2 - h_*^2)}{2(v_* - v_L)}} v_* < v_L$$

et on conclut que

$$h_* > h_L \quad \text{et} \quad v_* < v_L.$$

En éliminant $\dot{\sigma}_1$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h_* \mapsto v_*(h_*) = v_L + (h_L - h_*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h_*}{h_L h_*}} \quad \text{pour } h_* > h_L$$

et la vitesse du 1-choc est

$$\dot{\sigma}_1 = v_L - h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h_*}{h_L h_*}}$$

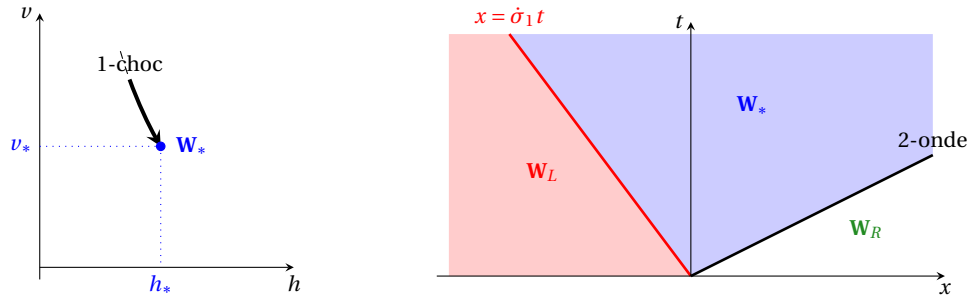
autrement dit

$$x = \dot{\sigma}_1 t$$

donc

$$\frac{x}{t} = v_L - h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h_*}{h_L h_*}}.$$

On a donc les graphes suivants :³



2. 2-champ : on cherche à déterminer les états gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$ par une discontinuité (entropique) de vitesse $\dot{\sigma}_2$. Dans nos formules on a $d = R$ et $g = *$. La condition d'entropie (Lax) pour $k = 2$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_2$ du 2-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2(\mathbf{W}_R) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_*), \\ \lambda_1(\mathbf{W}_*) < \dot{\sigma}_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v_R + \sqrt{gh_R} < \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_2 > v_* - \sqrt{gh_*}, \\ \dot{\sigma}_2 < v_* + \sqrt{gh_*}, \end{cases} \quad \begin{matrix} g=* \\ d=R \end{matrix} \implies \begin{cases} j_2 < -h_R \sqrt{gh_R} \\ j_2 < h_* \sqrt{gh_*}, \\ j_2 > -h_* \sqrt{gh_*}, \end{cases} \implies \begin{cases} h_R < h_*, \\ j_2 < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} j_2 = \frac{g(h_*^2 - h_R^2)}{2(v_R - v_*)} \\ \implies v_R < v_* \end{matrix}$$

et on conclut que

$$h_* > h_R \quad \text{et} \quad v_* > v_R.$$

En éliminant $\dot{\sigma}_2$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h_R \mapsto v_*(h_*) = v_R + (h_* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}} \quad \text{pour } h_* > h_R$$

et la vitesse du 2-choc est

$$\dot{\sigma}_2 = v_R + h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}}.$$

autrement dit

$$x = \dot{\sigma}_2 t$$

donc

$$\frac{x}{t} = \left(v_R + h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_R + h_*}{h_R h_*}} \right).$$

On a donc les graphes suivants :⁴

3. De plus, pour $h_* > h_L$,

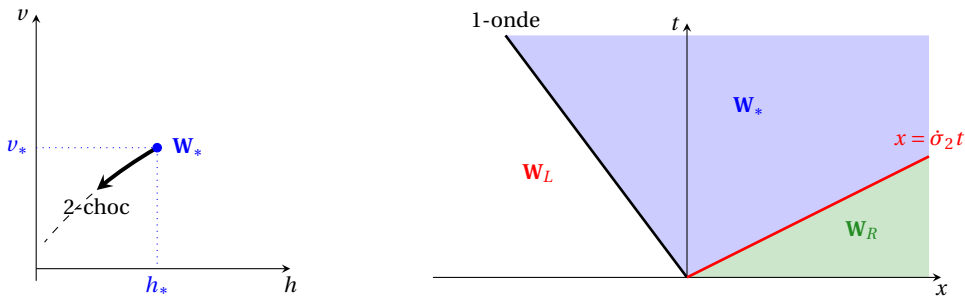
$$(v_*)'(h_*) = -\sqrt{\frac{g}{8} \frac{h_L h_* + 2(h_*)^2 + h_L^2}{(h_*)^3 h_L (h_L + h_*)}} < 0,$$

$$(v_*)''(h_*) = \sqrt{\frac{g}{32} \frac{\sqrt{h_L^3} (5h_* + 3h_L)}{\sqrt{h^5 (h_L + h_*)^3}}} > 0.$$

4. De plus, pour $h_* > h_R$,

$$(v_*)'(h_*) = \sqrt{\frac{g}{8} \frac{h_* h_R + h_R^2 + 2(h_*)^2}{(h_*)^3 h_R (h_* + h_R)}} > 0,$$

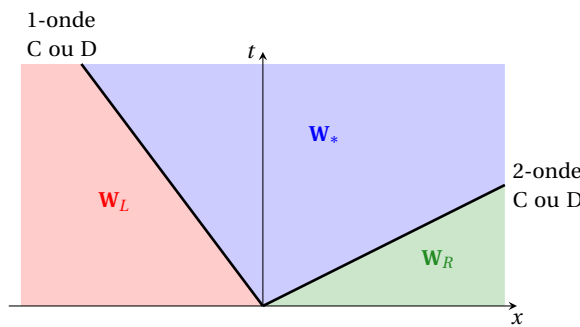
$$(v_*)''(h_*) = -\sqrt{\frac{g}{32} \frac{\sqrt{h_R^3} (5h_* + 3h_R)}{\sqrt{(h_*)^5 (h_* + h_R)^3}}} < 0.$$



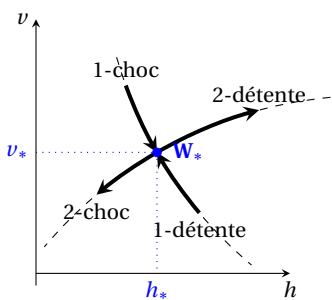
Remarque. Il est intéressant de noter que lorsque $h_* \rightarrow h_L$ (resp. $h_* \rightarrow h_R$), on trouve que $\sigma_1 \rightarrow \lambda_1(\mathbf{W}_L)$ (resp. $\sigma_2 \rightarrow \lambda_2(\mathbf{W}_R)$). En d'autres termes, la vitesse des discontinuités infinitésimales est la même qu'une vitesse caractéristique.

1.7. Problème de Riemann : conclusion.

Pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R donnés, on construit une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . La 1-onde peut être soit un choc soit une détente et de même la 2-onde :



Il y a quatre possibles combinaisons de la solution :



- Cas 1. si $h_* > \max\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'un 1-choc et d'un 2-choc,
- Cas 2. si $h_L < h_* < h_R$ la solution est composée d'un 1-choc et d'un 2-détente,
- Cas 3. si $h_R < h_* < h_L$ la solution est composée d'un 1-détente et d'un 2-choc,
- Cas 4. si $h_* < \min\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'un 1-détente et d'un 2-détente.

Pour expliciter cette solution on doit définir :

- l'état constant intermédiaire $\mathbf{W}_* = \begin{pmatrix} h_* \\ v_* \end{pmatrix}$;
- les vitesses des chocs σ_1 et σ_2 et des détenteurs $(\lambda_1^L, \lambda_1^*)$, $(\lambda_2^*, \lambda_2^R)$;
- les états dans les détenteurs : $\mathbf{W}_{1-\text{det}}(t, x)$ et $\mathbf{W}_{2-\text{det}}(t, x)$.

1.7.1. Étape I : calcul de l'état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$

La méthode de résolution du problème de Riemann repose sur le calcul d'un état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$. On a vu que cet état peut être relié à l'état de gauche (h_L, v_L) par une 1-onde :

$$v_* = f^L(h_*) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_L - (h_* - h_L) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L + \sqrt{h_*}}} & \text{si } h_* \leq h_L \text{ (1-détente)} \\ v_L - (h_* - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_L}{h_* h_L}} & \text{si } h_* > h_L \text{ (1-choc)} \end{cases}$$

et à l'état de droite (h_R, v_R) par une 2-onde :

$$v_* = f^R(h_*) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_R + (h_* - h_R) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R + \sqrt{h_*}}} & \text{si } h_* \leq h_R \text{ (2-détente)} \\ v_R + (h_* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}} & \text{si } h_* > h_R \text{ (2-choc)} \end{cases}$$

- Pour calculer h_* on doit donc résoudre l'équation

$$f^L(h_*) = f^R(h_*),$$

soit encore chercher h_* le zéro de la fonction

$$\heartsuit \mapsto f(\heartsuit) = f^L(\heartsuit) - f^R(\heartsuit).$$

Astuce "algorithmique" : on définit la fonction

$$(h, \psi) \mapsto z(h, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h} + \sqrt{\psi}} & \text{si } h \leq \psi, \\ \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h + \psi}{h\psi}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

ainsi

$$f^R(h_*) = v_R + (h_* - h_R)z(h_*, h_R) \quad \text{et} \quad f^L(h_*) = v_L - (h_* - h_L)z(h_*, h_L)$$

ce qui revient à chercher h_* le zéro de la fonction

$$\heartsuit \mapsto f(\heartsuit) = v_R - v_L + (\heartsuit - h_L)z(\heartsuit, h_L) + (\heartsuit - h_R)z(\heartsuit, h_R).$$

- v_* est ensuite déduit de h_* tout simplement par

$$v_* = v_R + (h_* - h_R)z(h_*, h_R).$$

Remarque 1 (Creation d'une zone sèche) Notons que, dans le cas de la 1-détente suivie d'une 2-détente, on cherche h_* solution de

$$\frac{v_L - v_R}{2\sqrt{g}} = \frac{(h_* - h_L)}{\sqrt{h_L + \sqrt{h_*}}} + \frac{(h_* - h_R)}{\sqrt{h_R + \sqrt{h_*}}}$$

d'où

$$\sqrt{h_*} = \frac{v_L - v_R}{4\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{h_L + \sqrt{h_R}}}{2}.$$

Par conséquent, si $v_R - v_L > 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R})$, il n'y a pas de solution. On peut cependant définir une solution en introduisant un état sec et la solution consiste en deux ondes de raréfaction séparées par une zone sèche où $h = 0$ et où les autres variables dépendantes sont laissées indéfinies (classiquement on pose $v = 0$).

1.7.2. Étape II : définition des vitesses des ondes et de la solution dans les détetes

- Les vitesses des ondes de choc

$$\dot{\sigma}_1 \stackrel{\text{def}}{=} v_L - h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h_*}{h_L h_*}}, \quad \dot{\sigma}_2 \stackrel{\text{def}}{=} v_R + h_* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}}.$$

- Les vitesses des ondes de détente

$$\lambda_1^L \stackrel{\text{def}}{=} v_L - \sqrt{gh_L}, \quad \lambda_1^* \stackrel{\text{def}}{=} v_* - \sqrt{gh_*}, \quad \lambda_2^* \stackrel{\text{def}}{=} v_* + \sqrt{gh_*}, \quad \lambda_2^R \stackrel{\text{def}}{=} v_R + \sqrt{gh_R}.$$

- La solution dans une onde de détente

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}}(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{9g} (v_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3} (v_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_{2\text{-det}}(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{9g} (-v_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3} (v_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t}) \end{pmatrix}.$$

- Pour définir la solution en cas de zones sèches, on introduit de plus

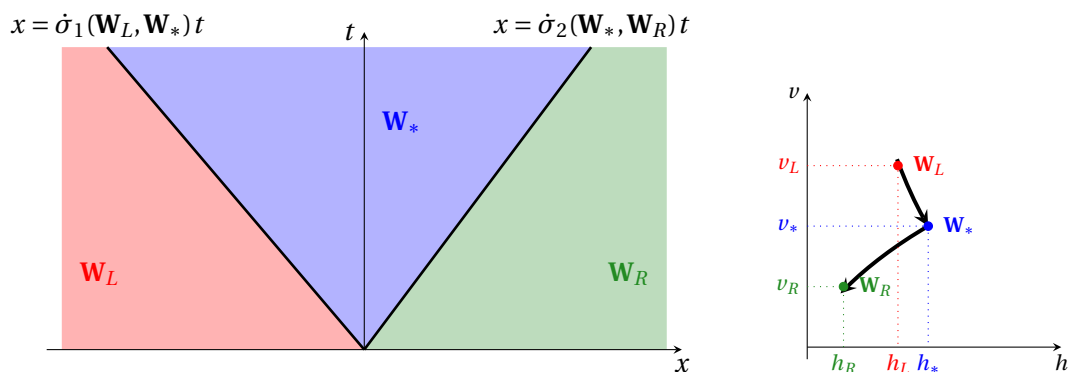
$$\mathfrak{J}_1^L \stackrel{\text{def}}{=} v_L + 2\sqrt{gh_L}, \quad \mathfrak{J}_2^R \stackrel{\text{def}}{=} v_R - 2\sqrt{gh_R}.$$

1.7.3. Étape III : solution complète

On peut avoir quatre structures différentes de la solution :

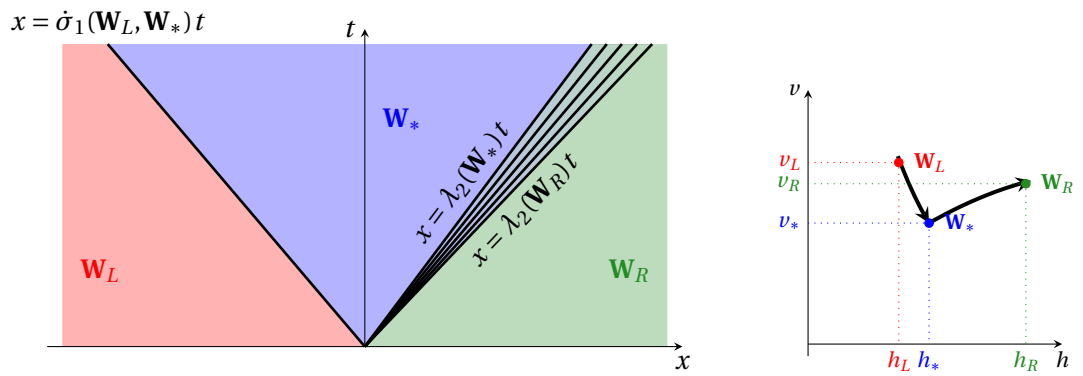
Cas 1) si $h_* > \max\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'un 1-choc et d'un 2-choc et s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1 t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \dot{\sigma}_1 t < x < \dot{\sigma}_2 t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2 t, \end{cases}$$



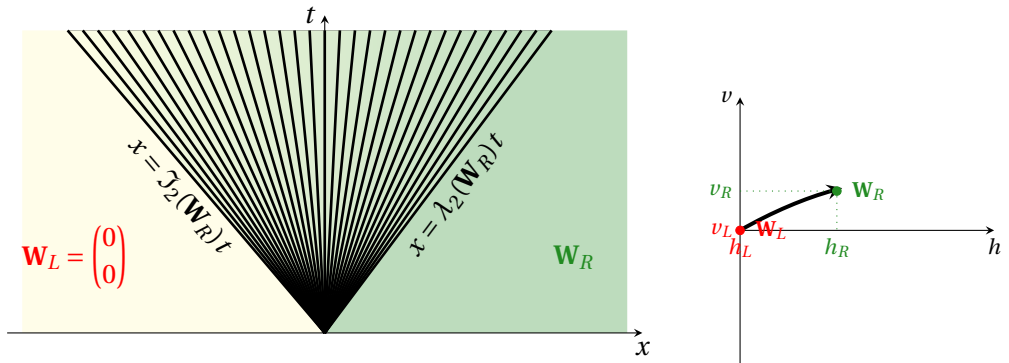
Cas 2) si $h_L < h_* < h_R$ la solution est composée d'un 1-choc et d'une 2-détente et s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1 t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \dot{\sigma}_1 t < x < \lambda_2^* t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}(t, x), & \text{si } \lambda_2^* t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t, \end{cases}$$



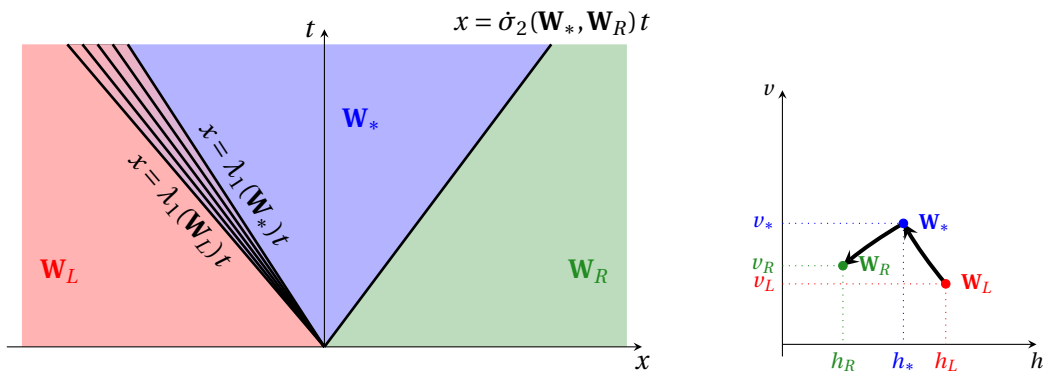
Remarque : si $h_L = 0$, il est naturel de considérer $v_L = 0$ et il n'y a qu'une 2-détente (la 1-onde de choc n'est pas définie). Dans ce cas la solution s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} (0, 0), & \text{si } x < \mathfrak{J}_2^R t, \\ \mathbf{W}_{\text{det}}(t, x), & \text{si } \mathfrak{J}_2^R t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t, \end{cases}$$



Cas 3) si $h_R < h_* < h_L$ la solution est composée d'une 1-détente et d'un 2-choc et s'écrit

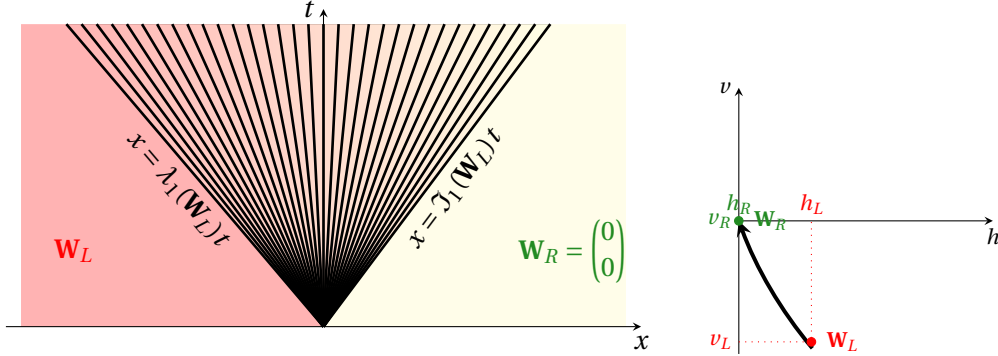
$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \lambda_1^* t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \lambda_1^* t < x < \mathfrak{S}_2 t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \mathfrak{S}_2 t, \end{cases}$$



Remarque : si $h_R = 0$, il est naturel de considérer $v_R = 0$ et il n'y a qu'une 1-détente (la

2-onde de choc n'est pas définie). Dans ce cas la solution s'écrit

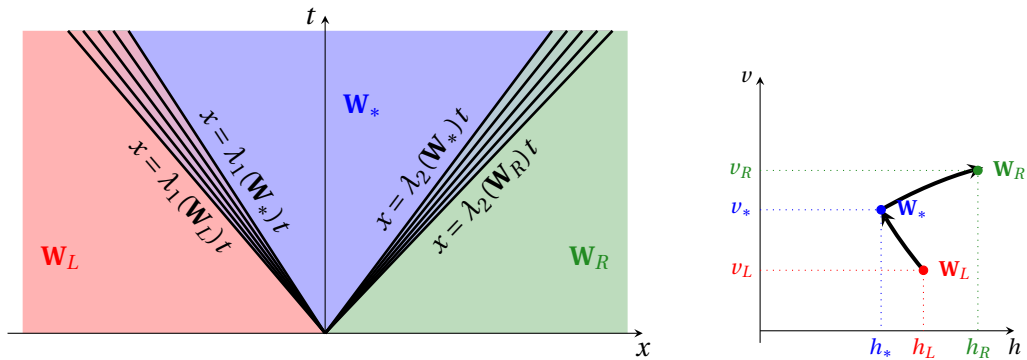
$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{\text{det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \mathfrak{J}_1^L t, \\ (0, 0), & \text{si } x > \mathfrak{J}_1^L t, \end{cases}$$



Cas 4) si $h_* < \min\{h_L, h_R\}$ la solution est composée d'une 1-détente et d'une 2-détente et il faut considérer deux sous-cas :

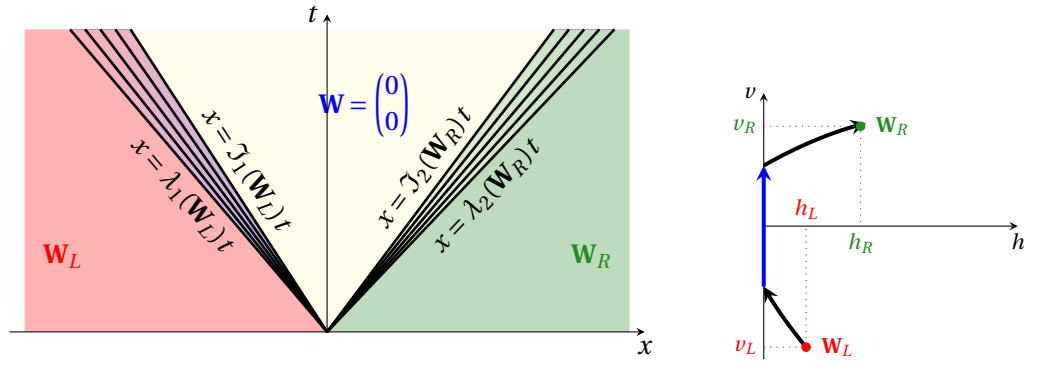
- si $v_R - v_L < 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L})$ alors $h_* > 0$ et la solution s'écrit

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \lambda_1^* t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \lambda_1^* t < x < \lambda_2^* t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}(t, x), & \text{si } \lambda_2^* t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t \end{cases}$$



- Remarque : si $v_R - v_L \geq 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L})$, il faut introduire une zone "sèche" :

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \lambda_1^L t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}(t, x), & \text{si } \lambda_1^L t < x < \mathfrak{J}_1^L t, \\ (0, 0), & \text{si } \mathfrak{J}_1^L t < x < \mathfrak{J}_2^R t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}(t, x), & \text{si } \mathfrak{J}_2^R t < x < \lambda_2^R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \lambda_2^R t \end{cases}$$



1.8. Entropie.

L'énergie totale E et le flux d'énergie G sont respectivement

$$E = \frac{hv^2 + gh^2}{2}, \quad G = \frac{hv^3}{2} + gh^2v.$$

On peut calculer

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{2} + gh \\ hv \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{v^2}{2} + 2gh\right)(v + mt) \\ \frac{3}{2}hv^2 + gh^2 \end{pmatrix},$$

ainsi $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{W}} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{W}}$. Cela signifie que l'énergie totale est une *entropie* pour le système (1.1).

Pour établir la convexité de l'énergie, on calcule la matrice Hessienne :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{W}} \right)^T = \begin{pmatrix} g & v \\ v & h \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est définie strictement positive (et donc l'entropie est strictement convexe) si et seulement si $v^2 < gh$.

Soit (h_g, v_g) et (h_d, v_d) deux états et notons $[\star] \stackrel{\text{def}}{=} \star_d - \star_g$ le saut. Puisqu'un choc entropique se propage en vérifiant la condition de Rankine-Hugoniot : $[[h\nu]] = [[h]]\dot{\sigma}_k$ et $[[hv^2 + \frac{g}{2}h^2]] = [[h\nu]]\dot{\sigma}_k$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} [[E]] &= \frac{1}{2} [[hv^2 + gh^2]] \\ &= \frac{1}{2} \left[hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \right] + \frac{g}{4} [[h^2]] \\ &= \frac{1}{2} [[h\nu]]\dot{\sigma}_k + \frac{g}{4} (h_d + h_g) [[h]] \\ &= \frac{1}{2} [[h]] \left(\dot{\sigma}_k^2 + \frac{g}{2} (h_d + h_g) \right). \end{aligned}$$

Pour un 1-choc, la condition d'admissibilité de Lax demande à ce que $[[h]] > 0$ (i.e. $h_* > h_L$), ce qui implique $[[E]] > 0$. Dans ce cas, les vitesses du flux relatives au choc sont

$$v_L - \dot{\sigma}_1 = \sqrt{g \frac{h_L + h_*}{2} \frac{h_*}{h_L}} > 0, \quad v_* - \dot{\sigma}_1 = \sqrt{g \frac{h_L + h_*}{2} \frac{h_L}{h_*}} > 0.$$

Des deux cotés, la vitesse du flux relative au choc est positive, ainsi l'énergie totale E décroît du pre-choc (l'état gauche) vers le post-choc (état intermédiaire).

De la même manière, pour un 2-choc on a $[[h]] < 0$ (i.e. $h_* > h_R$) donc $[[E]] < 0$ et les vitesses du flux relatives au choc sont

$$v_* - \dot{\sigma}_2 = -\sqrt{g \frac{h_R + h_*}{2} \frac{h_R}{h_*}} > 0, \quad v_R - \dot{\sigma}_2 = -\sqrt{g \frac{h_R + h_*}{2} \frac{h_*}{h_R}} < 0.$$

Des deux cotés, la vitesse du flux relative au choc est négative, ainsi l'énergie totale E croît du pre-choc (l'état intermédiaire) vers le post-choc (état droit).

2.

Un système hyperbolique avec des champs linéairement dégénérés

Soit $a > 0$ une constante fixée et considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + a^2 \partial_x \rho = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Exercice 2.1

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ ne dépend pas de \mathbf{W} et s'écrit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres (qui ne dépendent pas de \mathbf{W}) λ_1 et λ_2 . Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1 < \lambda_2$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 de la matrice \mathbb{A} . En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact.)
5. Proposer un choix pour \mathcal{J}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique, $k = 1, 2$.
6. *Étude des discontinuités de contact.*
 - 6.1. Soit une onde de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Calculer σ_1 sa vitesse de propagation.
 - 6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (ρ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L) et un état droit (ρ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ρ_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

Correction

1. a étant une constante, on a directement

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} u \\ a^2 \rho \end{pmatrix}.$$

2. Si on pose $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ (autrement dit, si on choisit comme vecteur pour l'écriture non conservative le même vecteur des variables de l'écriture conservative), le système quasilinéaire s'écrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche les 2 solutions λ_k de l'équation $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbf{Id}) = 0$, *i.e.* de l'équation

$$(-\lambda)^2 - a^2 = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = a.$$

Puisque par hypothèse $a > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système est strictement hyperbolique.

On peut prendre

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

4. Pour déterminer la nature des deux champs on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$. Comme les valeurs propres ne dépendent pas de \mathbf{W} , leurs gradients sont nuls et les champs caractéristiques sont donc linéairement dégénérés

5. Cherchons les invariants de Riemann. Comme $p = 2$ on doit trouver $p - 1 = 1$ invariant de Riemann pour chaque champ caractéristique.

Pour cela il faut tout d'abord trouver un vecteur $\mathbb{1}(\mathbf{W})$ pour lequel le système est diagonal, autrement-dit on cherche un vecteur $\mathbb{1}(\mathbf{W})$ tel que

$$\partial_t \mathbb{1} + \mathbb{D} \partial_x \mathbb{1} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on notera \mathfrak{J}_k l'invariant de Riemann du k^e champ caractéristique. Dans le champ $k = 1$ c'est la composante $\mathbb{1}_2$ qui est un invariant et dans le champ $k = 2$ c'est la composante $\mathbb{1}_1$ qui est un invariant ainsi on notera

$$\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = \mathbb{1}_2, \quad \mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = \mathbb{1}_1$$

avec $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$.

MÉTHODE 1 : pour des champs VNL, la k -ième valeur propre est un k -invariant de Riemann, donc d'habitude on pose directement $\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = \lambda_1$ et $\mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = \lambda_2$. Cependant, dans cet exemple particulier, les valeurs propres sont constantes, ce qui ne nous donne aucune information utile.

MÉTHODE 2 : Les relations définissant les invariants de Riemann $\mathfrak{J}_k(\mathbf{W})$ sont $(\nabla \mathfrak{J}_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (\nabla \mathfrak{J}_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \mathfrak{J}_1}{\partial \rho} \times (-1) + \frac{\partial \mathfrak{J}_1}{\partial u} \times a \\ (\nabla \mathfrak{J}_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \mathfrak{J}_2}{\partial \rho} \times 1 + \frac{\partial \mathfrak{J}_2}{\partial u} \times a \end{aligned}$$

autrement dit

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{J}_1}{\partial \rho} - a \frac{\partial \mathfrak{J}_1}{\partial u} = 0, & \rightsquigarrow \mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = u + a\rho, \\ \frac{\partial \mathfrak{J}_2}{\partial \rho} + a \frac{\partial \mathfrak{J}_2}{\partial u} = 0, & \rightsquigarrow \mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = u - a\rho. \end{cases}$$

MÉTHODE 3 : on cherche une combinaison linéaire "astucieuse" des équations pour obtenir cette forme diagonale.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + a^2 \partial_x \rho = 0, \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + aL_1 \end{matrix}} \begin{cases} \partial_t(u - a\rho) - a\partial_x(u - a\rho) = 0, \\ \partial_t(u + a\rho) + a\partial_x(u + a\rho) = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \mathbb{1}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u - a\rho \\ u + a\rho \end{pmatrix}.$$

MÉTHODE 4 : si on note

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) = [\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) | \mathbf{r}_2(\mathbf{W})]$$

la matrice de changement de base (qui transforme le système en \mathbf{W} en le système diagonale), alors

$$\mathbb{P}^{-1}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbb{l} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbb{l}_1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \mathbb{l}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathbb{l}_2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \mathbb{l}_2}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Ici

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -a & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\frac{\partial \mathbb{l}_1}{\partial \varrho} = -\frac{1}{2}, \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{l}_1(\mathbf{W}) = \int -\frac{1}{2} d\varrho + f(u) = -\frac{1}{2}\varrho + f(u)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2a} = \frac{\partial \mathbb{l}_1}{\partial u} = f'(u) \quad \rightsquigarrow \quad f(u) = \frac{1}{2a}u \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{l}_1(\mathbf{W}) = -\frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2a}u = \frac{u - a\varrho}{2a}$$

$$\frac{\partial \mathbb{l}_2}{\partial \varrho} = \frac{1}{2}, \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{l}_2(\mathbf{W}) = \int \frac{1}{2} d\varrho + f(u) = \frac{1}{2}\varrho + f(u)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2a} = \frac{\partial \mathbb{l}_2}{\partial u} = f'(u) \quad \rightsquigarrow \quad f(u) = \frac{1}{2a}u \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{l}_2(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2a}u = \frac{u + a\varrho}{2a}$$

ce qui donne par exemple le vecteur

$$\mathbb{l}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u - a\varrho \\ u + a\varrho \end{pmatrix}.$$

Bien noter que \mathbb{l} dépend de \mathbf{W} .

6. Étude des discontinuités de contact.

6.1. Considérons le 1-champ.

C'est un champ linéairement dégénéré, donc on a une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse $\dot{\sigma}_1 = \lambda_1(\mathbf{W}_L) = \lambda_1(\mathbf{W}_*) = -a$.

Pour trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_* , on peut utiliser

- soit les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} -a = \dot{\sigma}_1 = \frac{u_* - u_L}{\varrho_* - \varrho_L} \rightsquigarrow -a(\varrho_* - \varrho_L) = u_* - u_L \\ -a = \dot{\sigma}_1 = \frac{a^2 \varrho_* - a^2 \varrho_L}{u_* - u_L} \end{cases}$$

- soit la conservation de l'invariant de Riemann $\mathfrak{J}_1(\mathbf{W})$ à la traversée de la discontinuité :

$$\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}_L) = \mathfrak{J}_1(\mathbf{W}_*) \rightsquigarrow \mathbb{l}_2(\mathbf{W}_L) = \mathbb{l}_2(\mathbf{W}_*) \rightsquigarrow u_L + a\varrho_L = u_* + a\varrho_*$$

On obtient

$$u_*(\varrho_*) = u_L + a(\varrho_L - \varrho_*)$$

6.2. Considérons le 2-champ.

C'est aussi un champ linéairement dégénéré, donc on a une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse $\dot{\sigma}_2 = \lambda_2(\mathbf{W}_*) = \lambda_2(\mathbf{W}_R) = a$.

Pour trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_* et un état droit \mathbf{W}_R , on peut utiliser

- soit les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} a = \dot{\sigma}_2 = \frac{u_R - u_*}{\varrho_R - \varrho_*} \rightsquigarrow a(\varrho_R - \varrho_*) = u_R - u_* \\ a = \dot{\sigma}_2 = \frac{a^2 \varrho_R - a^2 \varrho_*}{u_R - u_*} \end{cases}$$

- soit la conservation de l'invariant de Riemann $\mathcal{J}_2(\mathbf{W})$ à la traversée de la discontinuité :

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{W}_*) = \mathcal{J}_2(\mathbf{W}_R) \rightsquigarrow \mathbb{I}_1(\mathbf{W}_*) = \mathbb{I}_1(\mathbf{W}_R) \rightsquigarrow u_* - a\rho_* = u_R - a\rho_R.$$

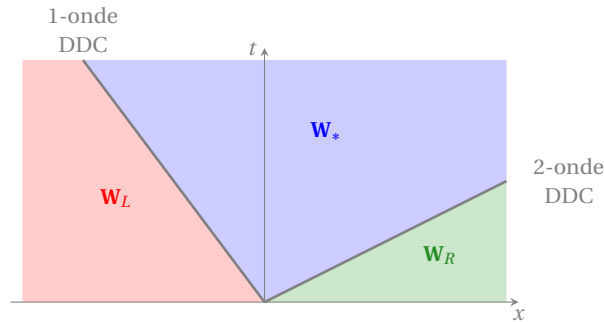
On obtient

$$u_*(\rho_*) = u_R - a(\rho_R - \rho_*)$$

7. *Solution du problème de Riemann.* Soit un problème de Riemann avec les deux états donnés suivants :

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

Pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R donnés, on construit une solution composée de deux ondes séparant trois états constant : \mathbf{W}_L , \mathbf{W}_* et \mathbf{W}_R . Les deux ondes sont des discontinuités de contact.



Pour expliciter cette solution on doit définir :

- les vitesses des discontinuités de contact $\dot{\sigma}_1$ et $\dot{\sigma}_2$,
- l'état constant intermédiaire $\mathbf{W}_* = \begin{pmatrix} \rho_* \\ u_* \end{pmatrix}$.

Étape I : calcul de l'état intermédiaire $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$

- L'état intermédiaire (ρ_*, u_*) peut être relié à l'état de gauche (ρ_L, u_L) par une 1-DDC et l'on a $u_* = u_L + a(\rho_L - \rho_*)$,
- ce même état peut être relié à l'état de droite (ρ_R, u_R) par une 2-DDC et l'on a $u_* = u_R - a(\rho_R - \rho_*)$.

Pour calculer ρ_* on doit donc résoudre $u_L + a(\rho_L - \rho_*) = u_R - a(\rho_R - \rho_*)$ ce qui donne

$$\rho_* = \frac{u_L - u_R + a(\rho_L + \rho_R)}{2a} = \frac{\rho_R + \rho_L}{2} - \frac{u_R - u_L}{2a}.$$

Ensuite u_* est déduit de ρ_* , par exemple par $u_* = u_L + a(\rho_L - \rho_*)$, ce qui donne

$$u_* = \frac{u_L + u_R}{2} + \frac{a(\rho_R - \rho_L)}{2}$$

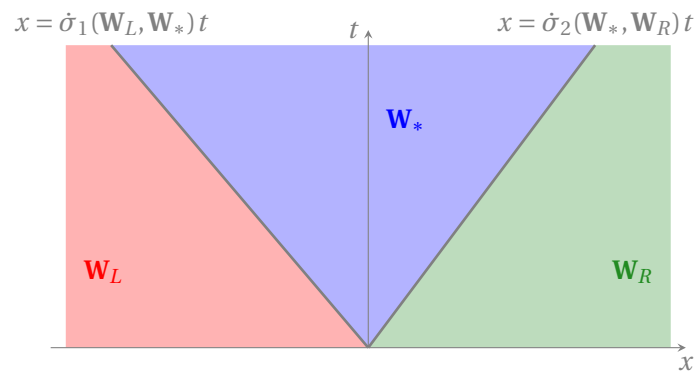
Étape II : calcul des vitesses des ondes Il n'y a que des discontinuités de contact. leurs vitesses sont

$$\dot{\sigma}_1 \stackrel{\text{def}}{=} -a,$$

$$\dot{\sigma}_2 \stackrel{\text{def}}{=} a.$$

Étape III : solution complète. La solution est composée d'une 1-ddc et d'une 2-ddc et s'écrit

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1 t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \dot{\sigma}_1 t < x < \dot{\sigma}_2 t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2 t, \end{cases}$$



Deuxième partie

PROJETS

Liste des projets

Nous avons illustré la résolution du problème de Riemann pour deux systèmes de $p = 2$ équations :

Exemple 1. le système de SAINT-VENANT associé à 2 champs caractéristiques vraiment non-linéaires

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + \frac{g}{2}h^2) = 0, \end{cases}$$

(les ondes associées à chacun de ces 2 champs ne peuvent être que des ondes de choc ou de détente);

Exemple 2. un système hyperbolique associé à 2 champs caractéristiques linéairement dégénérés

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + a^2 \partial_x \rho = 0. \end{cases}$$

(les ondes associées à chacun de ces 2 champs ne peuvent être que des discontinuités de contact).



Devoir maison : choisir un sujet parmi ceux proposés.

Pour le 11 novembre 2024 : déposer sur Moodle **un rapport pdf et un fichier py ou ipynb**.

- **Rapport** : il s'agit de détailler la **solution exacte des problèmes de Riemann** associés au système hyperbolique donné (on pourra suivre le canevas utilisé pour le système de Saint-Venant).
- **Code source** : écrire un programme qui implémente un schéma d'approximation VF et le valider à l'aide de la **solution exacte** pour un problème de Riemann calculée au point précédent.



Projet 3. système de Saint-Venant par relaxation

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2 u) = \mu h \left(\frac{g}{2} h^2 - \pi \right), \end{cases}$$

Projet 4. modèle de Ripa

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0. \end{cases}$$

Projet 5. modèle de Ripa par relaxation

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \pi\theta) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2 u) = \mu h \left(\frac{g}{2} h^2 - \pi \right), \end{cases}$$

Projet 6. système de SAINT-VENANT avec une loi de frottement de type Mohr-Coulomb

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2} h^2) = mh. \end{cases}$$

✧

Projet 7. p-système isotherme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad p(\rho) = a^2 \rho.$$

Projet 8. p-système isotherme, relaxation en pression

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \pi) + \partial_x(\rho \pi u + c^2 u) = \mu \rho (p(\rho) - \pi). \end{cases}$$

Projet 9. système de l'acoustique fortement non linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) = 0, \end{cases} \quad p(\rho) = a^2 \rho.$$

Projet 10. p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad p(\tau) = 1/\tau.$$

Projet 11. p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes, relaxation en pression :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_t \pi + \partial_x(c^2 u) = \mu(p(\tau) - \pi). \end{cases}$$

Projet 12. système de l'acoustique fortement non linéaire en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \\ \partial_t v = 0, \end{cases} \quad p(\tau) = a^2/\tau.$$

Projet 13. modèle $\tau u v \pi$:

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_t v + \frac{a}{b} \partial_x \pi = 0 \\ \partial_t \pi + ab \partial_x v = 0. \end{cases}$$

Projet 14. p-système isotherme avec friction

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = m\rho, \end{cases} \quad p(\rho) = a^2 \rho.$$

✧

Projet 15. p-système isentropique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad p(\rho) = \rho^\gamma.$$

Projet 16. p-système isentropique, relaxation en volume

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi(\rho, V)) = 0, \\ \partial_t(\rho V) + \partial_x(\rho u V) = \mu \rho \left(\frac{1}{\rho} - V \right), \end{cases} \quad \pi(\rho, V) = p \left(\frac{1}{V} \right) - a^2 \left(\frac{1}{\rho} - V \right)$$

Projet 17. mélange diphasique isentropique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho, c)) = 0, \\ \partial_t(\rho c) + \partial_x(\rho u c) = 0, \end{cases} \quad p(\rho, c) = (c\rho)^2 + ((1-c)\rho)^2.$$

Projet 18. p-système isentropique en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad p(\tau) = \tau^{-\gamma}.$$

Projet 19. p-système isentropique en coordonnées Lagrangiennes, relaxation en volume

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi(\tau, V) = 0, \\ \partial_t V = \mu(\tau - V), \end{cases}$$

Projet 20. mélange diphasique isentropique en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau, c) = 0, \\ \partial_t c = 0, \end{cases} \quad p(\tau, c) = \left(\frac{c}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{1-c}{\tau} \right)^2.$$

✧

Projet 21. p-système isentropique avec la loi d'état de Chaplygin

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad p(\rho) = -\frac{A}{\rho}.$$

Projet 22. p-système isentropique avec une loi d'état logarithmique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad p(\rho) = A \ln(\rho).$$

----- ✧ -----
Projet 23. modélisation des écoulements sanguins

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + eA^{3/2} \right) = 0. \end{cases}$$

----- ✧ -----

Projet 24. système de AW et RASCLE en ρ - w

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (w\rho - w^2) = 0, \\ \partial_t (w\rho) + \partial_x (w^2\rho - w\rho^2) = 0. \end{cases}$$

Projet 25. système de AW et RASCLE

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho(u + p(\rho))) + \partial_x (\rho u(u + p(\rho))) = 0, \end{cases}$$

----- ✧ -----

Projet 26. système uv

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{au}{u+v} \right) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \left(\frac{bv}{u+v} \right) = 0, \end{cases}$$

Projet 27. système uv bis

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x ((u^2 + v^2)u) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x ((u^2 + v^2)v) = 0, \end{cases}$$

3.

Étude du système de Saint-Venant par relaxation

On se propose de remplacer le système de Saint-Venant par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2u) = \mu h \left(\frac{g}{2} h^2 - \pi \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $\pi(x, t) > 0$ une nouvelle variable dite "de relaxation" et $c > 0$ une constante.

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, on retrouve le système de Saint-Venant classique à partir du système (3.1).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (3.1), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système (3.1) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (h, u, \pi)$, montrer que le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{c^2}{h} & u \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).
5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera \mathcal{J}_k et J_k . Montrer qu'un choix possible est
 - pour le 1-champ : $\mathcal{J}_1(\mathbf{Y}) = u - \frac{c}{h}$, $J_1(\mathbf{Y}) = \pi + \frac{c^2}{h}$,
 - pour le 2-champ : $\mathcal{J}_2(\mathbf{Y}) = u$, $J_2(\mathbf{Y}) = \pi$,
 - pour le 3-champ : $\mathcal{J}_3(\mathbf{Y}) = u + \frac{c}{h}$, $J_3(\mathbf{Y}) = \pi + \frac{c^2}{h}$.

6. *Étude des discontinuités de contact.*

Pour chaque k -onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ la vitesse de propagation de la k -onde.

En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,

- montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
 - trouver une relation entre un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_* séparés par la 1-onde,
 - trouver une relation entre un état gauche \mathbf{Y}_\heartsuit et un état droit \mathbf{Y}_R séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_R on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires \mathbf{Y}_1 et \mathbf{Y}_2 . On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

4.

Étude du système de Ripa

Les équations des eaux peu profondes sont utilisées pour simuler un grand nombre de phénomènes physiques, tels que les courants dans les estuaires, la propagation des forages et les vagues d'inondation dans les déferlements et les tsunamis. Le modèle de Ripa contient les équations des eaux peu profondes et des termes qui rendent compte des gradients de température horizontaux.

Le système de Ripa unidimensionnel avec une topographie de fond plat a la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $h(x, t) > 0$ la hauteur de l'eau, $u(x, t) \in \mathbb{R}$ la vitesse horizontale, $\theta(x, t) > 0$ la température et $g > 0$ est l'accélération due à la gravité.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} \equiv (h, u, \theta)$, montrer que le système (4.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g\theta & u & \frac{g}{2}h \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.
5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathcal{J}_k(\mathbf{W})$ et $J_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
 - pour le 1-champ : $\mathcal{J}_1(\mathbf{W}) = \theta$ et $J_1(\mathbf{W}) = u + 2a(h, \theta)$;
 - pour le 2-champ : $\mathcal{J}_2(\mathbf{W}) = u$ et $J_2(\mathbf{W}) = \frac{g}{2}h^2\theta$;
 - pour le 3-champ : $\mathcal{J}_3(\mathbf{W}) = \theta$ et $J_3(\mathbf{W}) = u - 2a(h, \theta)$,

ayant noté $a(h, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh\theta}$. Remarquons que $\frac{\partial a(h, \theta)}{\partial h} = \sqrt{g\theta} \frac{1}{2\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{gh\theta}}{h} = \frac{a(h, \theta)}{2h}$.

6. Étude des détente.

- 6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L, \theta_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (h_*, u_*, \theta_*)$. Montrer que $\theta_* = \theta_L$, $u_* > u_L$, $h_* < h_L$. Exprimer u_* en fonction de h_L , u_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
- 6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, u_R, \theta_R)$.

7. *Étude des chocs.*

7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L, \theta_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (h_*, u_*, \theta_*)$. Montrer que $\theta_* = \theta_L$, $u_* < u_L$, $h_* > h_L$. Exprimer u_* en fonction de h_L , u_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h, u) .

7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, u_R, \theta_R)$.

8. *Étude de la discontinuité de contact.*

Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, u_*, \theta_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $h_\heartsuit^2 \theta_\heartsuit = h_*^2 \theta_*$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité?

9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (h_L, u_L, θ_L) et un état droit (h_R, u_R, θ_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (h_*, u_*, θ_*) et $(h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

5.

Étude du système de Ripa par relaxation

Le système de Ripa unidimensionnel avec une topographie de fond plat a la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $h(x, t) > 0$ la hauteur de l'eau, $u(x, t) \in \mathbb{R}$ la vitesse horizontale, $\theta(x, t) > 0$ la température et $g > 0$ est l'accélération due à la gravité.

Le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques peut rendre la résolution du problème de Riemann assez compliquée. On se propose alors de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \pi\theta) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2u) = \mu h(\frac{g}{2}h^2 - \pi), \end{cases} \quad (5.2)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $c > 0$ une nouvelle constante et $\pi(x, t) > 0$ une nouvelle variable dite "de relaxation".

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, on retrouve le système de Ripa classique (5.1).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (5.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} \equiv (h, u, \theta, \pi)$, montrer que le système (5.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{\pi}{h} & \frac{\theta}{h} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{h} & 0 & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ (double) et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2a}(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2b}(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs sont linéairement dégénérés.

5. Pour les champs $k = 1$ et $k = 3$ on a trois invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{J}_k(\mathbf{W})$, $J_k(\mathbf{W})$ et $\mathfrak{K}_k(\mathbf{W})$. Pour le champ $k = 2$ on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{J}_2(\mathbf{W})$ et $J_2(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :

- pour le 1-champ : $\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = \theta$, $J_1(\mathbf{W}) = u - a(h, \theta)$, $\mathfrak{K}_1(\mathbf{W}) = \pi + \frac{c^2}{h}$;
- pour le 2-champ : $\mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = u$ et $J_2(\mathbf{W}) = \ln(\theta) + \ln(\pi)$;
- pour le 3-champ : $\mathfrak{J}_3(\mathbf{W}) = \theta$, $J_3(\mathbf{W}) = u + a(h, \theta)$, $\mathfrak{K}_3(\mathbf{W}) = \pi + \frac{c^2}{h}$;

ayant noté $a(h, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c\sqrt{\theta}}{h}$. Remarquons que $\frac{\partial a(h, \theta)}{\partial h} = \frac{(c\sqrt{\theta})}{h^2} = -\frac{a(h, \theta)}{h}$.

6. *Étude des discontinuités de contact.*

Pour chaque k -onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k -onde.

En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,

- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_* séparés par la 1-onde,
- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_* et un état droit \mathbf{W}_\heartsuit séparés par la 2-onde,
- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_\heartsuit et un état droit \mathbf{W}_R séparés par la 3-onde.

7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $(h_L, u_L, \theta_L, \pi_L)$ et un état droit $(h_R, u_R, \theta_R, \pi_R)$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $(h_*, u_*, \theta_*, \pi_*)$ et $(h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit, \pi_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

6.

Étude du système de Saint-Venant avec une loi de frottement de type Mohr-Coulomb

On modifie les équations de Saint-Venant pour prendre en compte une loi de frottement de type Mohr-Coulomb. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement peuvent être écrites comme suit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2}h^2) = mh, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.1)$$

Les inconnues sont $h(x, t) \geq 0$, la profondeur de l'écoulement mesurée perpendiculairement au plan, et $u(x, t) \in \mathbb{R}$, la vitesse moyenne de l'écoulement en profondeur; $g > 0$ est l'accélération gravitationnelle et m l'accélération constante résultant de la somme des forces dues à la gravité et au frottement. Si $m \geq 0$ et $u \geq 0$, le système peut représenter par exemple un écoulement granulaire sur un plan incliné recouvert ou non d'une couche de matériau constituée du même matériau que la masse granulaire qui s'écoule.

Partie ① Montrer que (h, u) est une solution régulière du système autonome non homogène (6.1) ssi (h, v) est solution du système non-autonome homogène suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(h(v + mt)) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv(v + mt) + \frac{g}{2}h^2) = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

ayant noté $v(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) - mt$.

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'au système (6.2) en variable h et v .

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}, t) = \mathbf{0}$. On remarquera que le flux dépend explicitement du temps : on dit que le système n'est pas autonome.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} \equiv (h, v)$, montrer que le système (6.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}, t) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W}, t)$ s'écrit

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}, t) = \begin{pmatrix} v + mt & h \\ g & v + mt \end{pmatrix}.$$

On remarquera que la matrice dépend explicitement du temps.

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W}, t)$ et $\lambda_2(\mathbf{W}, t)$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}, t) < \lambda_2(\mathbf{W}, t)$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W}, t)$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.

On remarquera que les valeurs propres dépendent explicitement du temps, mais pas les vecteurs propres.

4. Vérifier que les champs sont vraiment non linéaires.
5. Pour chaque champ k on a un invariant de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ (indépendant de t). Montrer qu'un choix possible est :
- pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = v + 2a(h)$;
 - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = v - 2a(h)$

ayant noté $a(h) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh}$.

On remarquera que les invariants de Riemann ne dépendent pas explicitement du temps.

6. *Étude des détentees.*

On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ par une onde de détente. La k -détente est comprise entre la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_g, t)$ et la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_d, t)$. Puisque les valeurs propres dépendent explicitement du temps, les courbes de détente ne sont plus des droites de pente la valeur propre mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$. Montrer que $v_* > v_L$, $h_* < h_L$. Exprimer v_* en fonction de h_L , v_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h, v) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.

6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$.

7. *Étude des chocs.*

On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ par une onde de choc. La vitesse du choc vérifie $x'(t) = \sigma_k(\mathbf{W}_g, \mathbf{W}_d, t)$. Puisque elle dépend explicitement du temps, les courbes de choc ne sont plus des droites mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (h_*, v_*)$. Montrer que $v_* < v_L$, $h_* > h_L$. Exprimer v_* en fonction de h_L , v_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h, v) .

7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$.

8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (h_L, v_L) et un état droit (h_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (h_*, v_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

On observe que, sous l'influence d'une force externe constante, les courbes caractéristiques, les raréfactions et les ondes de choc prennent des formes paraboliques. De plus, lorsque la force externe constante disparaît, les solutions convergent vers les solutions correspondantes du système de Saint-Venant classique.

7.

Étude du p-système isotherme

On note $\rho(x, t) > 0$ la densité et $u(x, t)$ la vitesse du fluide. Soit $p(\rho) > 0$ la pression du gaz. Si la température est constante, la loi des gaz parfaits se réduit à

$$p(\rho) = a^2 \rho$$

où $a > 0$ est une constante (c'est la vitesse du son et l'on a $a^2 = RT$).

En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{a^2}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera \mathfrak{J}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{J}_1 = u + a \ln(\rho)$ et $\mathfrak{J}_2 = u - a \ln(\rho)$.

6. Étude des détente.

6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\rho_* < \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L, u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.

6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.

7. Étude des choc.

7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\rho_* > \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L, u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) .

7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.

8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L) et un état droit (ρ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ρ_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

8.

Étude du p-système isotherme par relaxation en pression

On considère le système de la dynamique des gaz isotherme en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

avec une loi d'état $p(\rho)$. On note $\rho(x, t) > 0$ la densité et $u(x, t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \pi) + \partial_x(\rho \pi u + c^2 u) = \mu \rho (p(\rho) - \pi), \end{cases} \quad (8.2)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $\pi(x, t) > 0$ une nouvelle variable dite *pression de relaxation* et $c > 0$ une nouvelle constante.

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, alors on retrouve le système (8.1) à partir du système (8.2) (et on aura $\pi = p(\rho)$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (8.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système (8.2) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (\rho, u, \pi)$, montrer que le système (8.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).

5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera \mathfrak{J}_k et J_k . Montrer qu'un choix possible est

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(\mathbf{Y}) &= \pi + cu, & J_1(\mathbf{Y}) &= \pi + \frac{c^2}{\rho}, \\ \mathfrak{J}_2(\mathbf{Y}) &= u, & J_2(\mathbf{Y}) &= \pi, \\ \mathfrak{J}_3(\mathbf{Y}) &= \pi - cu, & J_3(\mathbf{Y}) &= \pi + \frac{c^2}{\rho}. \end{aligned}$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*

Pour chaque k -onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k -onde.

En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,

- montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
 - trouver une relation entre un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_* séparés par la 1-onde,
 - trouver une relation entre un état gauche \mathbf{Y}_\heartsuit et un état droit \mathbf{Y}_R séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_R on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires \mathbf{Y}_1 et \mathbf{Y}_2 . On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

9.

Étude du système de l'acoustique fortement non linéaire

On se donne une constante $a > 0$ strictement positive. Le système de l'acoustique non linéaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + a^2 \rho) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho u v) = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

d'inconnues $\rho(x, t) > 0$ la densité, $u(x, t)$ la vitesse normale et $v(x, t)$ la vitesse tangentielle.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, u, v)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.
5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathcal{J}_k(\mathbf{W})$ et $J_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
 - pour le 1-champ : $\mathcal{J}_1(\mathbf{W}) = v$ et $J_1(\mathbf{W}) = u + a \ln(\rho)$;
 - pour le 2-champ : $\mathcal{J}_2(\mathbf{W}) = u$ et $J_2(\mathbf{W}) = \rho$;
 - pour le 3-champ : $\mathcal{J}_3(\mathbf{W}) = v$ et $J_3(\mathbf{W}) = u - a \ln(\rho)$.

6. Étude des détente.

6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* > u_L$, $\rho_* < \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L , u_L et ρ_* . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.

6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, v_R)$.

7. Étude des chocs.

7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\rho_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* < u_L$, $\rho_* > \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L , u_L et ρ_* .

7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, v_R)$.

8. *Étude de la discontinuité de contact.*

Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $\rho_\heartsuit = \rho_*$. Quelle est la vitesse de déplacement σ_2 de cette discontinuité?

9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L, v_L) et un état droit (ρ_R, u_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (ρ_*, u_*, v_*) et $(\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

10.

Étude du p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes

On considère le système des équations d'Euler en régime isotherme en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x(p(\tau)) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } p(\tau) = \frac{1}{\tau} \quad (10.1)$$

où on a noté $\tau(t, x) > 0$ le volume spécifique et $u(t, x) \in \mathbb{R}$ est la vitesse du fluide.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On note \mathcal{J}_k l'invariant de Riemann du k^e champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathcal{J}_1 = u - \ln(\tau)$ et $\mathcal{J}_2 = u + \ln(\tau)$.
6. *Étude des détente.*
 - 6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
 - 6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
 - 7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\tau_* < \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u) .
 - 7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
8. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (τ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (τ_L, u_L) et un état droit (τ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (τ_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

11.

Étude du p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes par relaxation en pression

On considère le système de la dynamique des gaz isotherme en une dimension d'espace en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x (p(\tau)) = 0, \end{cases} \quad (11.1)$$

avec une loi d'état $p(\tau)$. On note $\tau(x, t) > 0$ le volume et $u(x, t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_t \pi + \partial_x (c^2 u) = \mu(p(\tau) - \pi) \end{cases} \quad (11.2)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $\pi(x, t) > 0$ une nouvelle variable dite *pression de relaxation* et $c > 0$ une nouvelle constante.

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, alors on retrouve le système (11.1) à partir du système (11.2) (et on aura $\pi = p(\tau)$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (11.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système (11.2) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (\rho, u, \pi)$, montrer que le système (11.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).

5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera \tilde{J}_k et J_k . Montrer qu'un choix possible est

$$\tilde{J}_1(\mathbf{Y}) = \pi + cu,$$

$$J_1(\mathbf{Y}) = \pi + c^2\tau,$$

$$\tilde{J}_2(\mathbf{Y}) = u,$$

$$J_2(\mathbf{Y}) = \pi,$$

$$\tilde{J}_3(\mathbf{Y}) = \pi - cu,$$

$$J_3(\mathbf{Y}) = \pi + c^2\tau.$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*

Pour chaque k -onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k -onde.

En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,

- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_* séparés par la 1-onde,
 - montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
 - trouver une relation entre un état gauche \mathbf{Y}_\heartsuit et un état droit \mathbf{Y}_R séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_R on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires \mathbf{Y}_1 et \mathbf{Y}_2 . On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

12.

Étude du système de l'acoustique fortement non linéaire en coordonnées Lagrangiennes

On se donne une constante $a > 0$ strictement positive. Le système de l'acoustique non linéaire en coordonnées Lagrangiennes s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \\ \partial_t v = 0, \end{cases} \quad (12.1)$$

d'inconnues $\tau(x, t) > 0$ le volume, $u(x, t)$ la vitesse normale et $v(x, t)$ la vitesse tangentielle.

On prendra $p(\tau) = a^2/\tau$ avec a une constante positive.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\tau, u, v)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p'(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.
5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathcal{J}_k(\mathbf{W})$ et $J_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
 - pour le 1-champ : $\mathcal{J}_1(\mathbf{W}) = v$ et $J_1(\mathbf{W}) = u - a \ln(\tau)$;
 - pour le 2-champ : $\mathcal{J}_2(\mathbf{W}) = u$ et $J_2(\mathbf{W}) = \tau$;
 - pour le 3-champ : $\mathcal{J}_3(\mathbf{W}) = v$ et $J_3(\mathbf{W}) = u + a \ln(\tau)$.

6. Étude des détente.

6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* > u_L$, $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L , u_L et τ_* . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.

6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, v_R)$.

7. Étude des chocs.

- 7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\tau_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* < u_L$, $\tau_* < \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L , u_L et τ_* .
- 7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, v_R)$.
8. *Étude de la discontinuité de contact.*
Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $\tau_\heartsuit = \tau_*$. Quelle est la vitesse de déplacement σ_2 de cette discontinuité?
9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (τ_L, u_L, v_L) et un état droit (τ_R, u_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (τ_*, u_*, v_*) et $(\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

13.

Étude du modèle $\tau u v \pi$

Le système $\tau u v \pi$ a la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_t v + \frac{a}{b} \partial_x \pi = 0 \\ \partial_t \pi + ab \partial_x v = 0. \end{cases} \quad (13.1)$$

avec $\tau(x, t) > 0$, $u(x, t) \in \mathbb{R}$, $v(x, t) \in \mathbb{R}$ et $\pi(x, t) \in \mathbb{R}$ les quatre fonctions inconnues et $a > b > 0$ deux constantes.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\tau, u, v, \pi)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilineaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.
3. Montrer que, pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{b} \\ 0 & 0 & ab & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ (double) et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2a}(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2b}(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est hyperbolique (mais non strictement hyperbolique).
5. Vérifier que les trois champs sont linéairement dégénérés.
6. Pour les champs $k = 1$ et $k = 3$ on a trois invariants de Riemann qu'on notera $\tilde{\mathcal{J}}_k(\mathbf{W})$, $\mathcal{J}_k(\mathbf{W})$ et $\mathfrak{K}_k(\mathbf{W})$. Pour le champ $k = 2$ on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{W})$ et $\mathcal{J}_2(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
 - pour le 1-champ : $\tilde{\mathcal{J}}_1(\mathbf{W}) = \pi + bv$, $\mathcal{J}_1(\mathbf{W}) = \pi + au$, $\mathfrak{K}_1(\mathbf{W}) = \pi + ab\tau$;
 - pour le 2-champ : $\tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{W}) = \pi$ et $\mathcal{J}_2(\mathbf{W}) = v$;
 - pour le 3-champ : $\tilde{\mathcal{J}}_3(\mathbf{W}) = \pi - bv$, $\mathcal{J}_3(\mathbf{W}) = \pi - au$, $\mathfrak{K}_3(\mathbf{W}) = \pi + ab\tau$;

7. Étude des discontinuités de contact.

Pour chaque k -onde, calculer $\hat{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k -onde.

En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,

- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_* séparés par la 1-onde,
- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_* et un état droit \mathbf{W}_\heartsuit séparés par la 2-onde,
- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_\heartsuit et un état droit \mathbf{W}_R séparés par la 3-onde.

8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $(\tau_L, u_L, v_L, \pi_L)$ et un état droit $(\tau_R, u_R, v_R, \pi_R)$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $(\tau_*, u_*, v_*, \pi_*)$ et $(\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit, \pi_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

14.

Étude du p-système isotherme avec friction

On modifie le p-système isotherme pour prendre en compte une loi de frottement. Les équations de conservation peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = m\rho. \end{cases}$$

Les inconnues sont $\rho(x, t) > 0$ la densité et $u(x, t)$ la vitesse du fluide. La constante m représente une force externe spécifique, telle que la gravité, les forces de Coriolis et les forces électromagnétiques. Si la température du gaz est constante et si on considère une loi des gaz parfaits, la pression s'écrit

$$p(\rho) = a^2 \rho$$

où $a > 0$ est une constante (c'est la vitesse du son et l'on a $a^2 = RT$).

Partie ① Montrer que (ρ, u) est une solution régulière du système autonome non homogène précédent ssi (ρ, v) est solution du système non-autonome homogène suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho(v + mt)) = 0, \\ \partial_t(\rho(v + mt)) + \partial_x(\rho v(v + mt) + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad (14.1)$$

ayant noté $v(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) - mt$.

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'au système non-autonome homogène en variable ρ et v .

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}, t): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}, t) = \mathbf{0}$. On remarquera que le flux dépend explicitement du temps : on dit que le système n'est pas autonome.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, v)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}, t) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W}, t)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} v + mt & \rho \\ \frac{a^2}{\rho} & v + mt \end{pmatrix}.$$

On remarquera que la matrice dépend explicitement du temps.

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W}, t)$ et $\lambda_2(\mathbf{W}, t)$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}, t) < \lambda_2(\mathbf{W}, t)$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W}, t)$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.

On remarquera que les valeurs propres dépendent explicitement du temps, mais pas les vecteurs propres.

4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. Pour chaque champ k on a un invariant de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
 - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1 = v + a \ln(\rho)$;
 - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2 = v - a \ln(\rho)$.

6. *Étude des détente*.

7. *Étude des détente*.

On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (\rho_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (\rho_d, v_d)$ par une onde de détente. La k -détente est comprise entre la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_g, t)$ et la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_d, t)$. Puisque les valeurs propres dépendent explicitement du temps, les courbes de détente ne sont plus des droites de pente la valeur propre mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

7.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, v_*)$. Montrer que $v_* > v_L$ et $\rho_* < \rho_L$. Exprimer v_* en fonction de ρ_L, v_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, v) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.

7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\rho_*, v_*)$.

8. *Étude des choc*.

On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (\rho_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (\rho_d, v_d)$ par une onde de choc. Le k -choc a pour équation $x = x(t)$ qui vérifie $x'(t) = \sigma_k(\mathbf{W}_g, \mathbf{W}_d, t)$. Puisque σ dépend explicitement du temps, les courbes de choc ne sont plus des droites mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

8.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, v_*)$. Montrer que $v_* < v_L$ et $\rho_* < \rho_L$. Exprimer v_* en fonction de ρ_L, v_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, v) .

8.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\rho_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\rho_R, v_R)$.

9. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (ρ, v) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, v_L) et un état droit (ρ_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ρ_*, v_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

On observe que, sous l'influence d'une force externe constante, les courbes caractéristiques, les raréfactions et les ondes de choc prennent des formes paraboliques. De plus, lorsque la force externe constante disparaît, les solutions convergent vers les solutions correspondantes du p-système classique.

15.

Étude du p-système isentrope

On note $\rho(x, t) > 0$ la densité et $u(x, t)$ la vitesse du fluide. En dimension un d'espace, on modélise un écoulement isentrope par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad (15.1)$$

où $p(\rho) > 0$ est la pression du gaz. Si l'entropie du système est constante, la loi des gaz parfaits se réduit à

$$p(\rho) = \rho^\gamma$$

où $\gamma > 1$ est une constante.¹ Pour simplifier les notations on introduit la fonction $\rho \mapsto c(\rho) > 0$ tel que $c^2 \stackrel{\text{def}}{=} p'(\rho) = \gamma \rho^{\gamma-1}$. Notons que c est une fonction strictement croissante.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.
Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera \mathfrak{J}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{J}_1 = u + \frac{2c(\rho)}{\gamma-1}$ et $\mathfrak{J}_2 = u - \frac{2c(\rho)}{\gamma-1}$.
6. *Étude des détente.*
 - 6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\rho_* < \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L, u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
 - 6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
 - 7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\rho_* < \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L, u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) .
 - 7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
8. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (ρ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L) et un état droit (ρ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ρ_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

1. Par exemple, pour un gaz monoatomique $\gamma = 5/3$, pour un gaz diatomique $\gamma = 7/5$

16.

Étude du p-système isentropique par relaxation en volume

On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \end{cases} \quad (16.1)$$

avec une loi d'état $p(\rho)$. On note $\rho(x, t) > 0$ la densité et $u(x, t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho V) + \partial_x(\rho u V) = \mu \rho \left(\frac{1}{\rho} - V \right), \end{cases} \quad (16.2)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $V(x, t) > 0$ une nouvelle variable dite *volume de relaxation* et $\pi \equiv \pi(\rho, V)$ une nouvelle loi d'état

$$\pi(\rho, V) = p\left(\frac{1}{V}\right) - a^2 \left(\frac{1}{\rho} - V \right)$$

où $a > 0$ est une nouvelle constante et $p(1/V)$ est la «vraie» loi d'état du fluide (sur laquelle on ne fait aucune hypothèse).

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, alors on retrouve le système (16.1) à partir du système (16.2) (et on aura $V = 1/\rho$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (16.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système (16.2) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (\rho, u, V)$, montrer que le système (16.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho^3} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \Big|_{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (16.3)$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.

4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).
5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera \mathfrak{J}_k et J_k . Montrer qu'un choix possible est

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(\mathbf{Y}) &= V, & J_1(\mathbf{Y}) &= u - \frac{a}{\rho}, \\ \mathfrak{J}_2(\mathbf{Y}) &= u, & J_2(\mathbf{Y}) &= \pi(\rho, V), \\ \mathfrak{J}_3(\mathbf{Y}) &= V, & J_3(\mathbf{Y}) &= u + \frac{a}{\rho}. \end{aligned}$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*

Calculer σ_k les vitesses de propagation de la k -onde.

En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot, montrer que

- u et $\pi(\rho, V)$ sont constants dans une 2-onde,
 - les courbes de 1-onde et de 3-onde sont des droites dans le plan (u, π) .
7. À l'aide du dessin d'ondes dans le plan (u, π) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_R on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires \mathbf{Y}_1 et \mathbf{Y}_2 . On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

Étude d'un mélange diphasique isentrope

On considère un mélange homogène et isentrope de deux fluides compressibles. En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements bi-fluide par le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho, c)) = 0, \\ \partial_t(\rho c) + \partial_x(\rho u c) = 0. \end{cases} \quad (17.1)$$

où $\rho(x, t) > 0$ est la densité du mélange, $u(x, t)$ la vitesse du mélange, $c(x, t) \in [0; 1]$ la concentration massique du premier fluide et $p(\rho, c) > 0$ la pression du mélange qu'on supposera vérifier les deux conditions suivantes

$$\partial_\rho p(\rho, c) > 0, \quad 2\partial_\rho p(\rho, c) + \rho \partial_{\rho\rho}^2 p(\rho, c) > 0,$$

Pour simplifier les notation on introduit la fonction $a(\rho, c) > 0$ (vitesse du son du mélange) telle que

$$a^2(\rho, c) = \partial_\rho p(\rho, c).$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, u, c)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilineaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.



Dans la suite on prendra

$$p(\rho, c) = (c\rho)^2 + ((1-c)\rho)^2 = (c^2 + (1-c)^2)\rho^2 = (2c^2 - 2c + 1)\rho^2$$

ainsi

$$\begin{aligned} \partial_\rho p(\rho, c) &= 2(c^2 + (1-c)^2)\rho = 2(2c^2 - 2c + 1)\rho > 0, & \partial_{\rho\rho}^2 p(\rho, c) &= 2(c^2 + (1-c)^2) = 2(2c^2 - 2c + 1) > 0 \\ \partial_c p(\rho, c) &= 2(2c - 1)\rho^2, \end{aligned}$$

et

$$a(\rho, c) = \sqrt{2(c^2 + (1-c)^2)}\sqrt{\bar{\rho}} > 0, \quad \partial_\rho a(\rho, c) = \frac{\sqrt{2(c^2 + (1-c)^2)}}{2\sqrt{\bar{\rho}}} > 0.$$

5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathcal{J}_k(\mathbf{W})$ et $J_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :

- pour le 1-champ : $\mathcal{J}_1(\mathbf{W}) = c$ et $J_1(\mathbf{W}) = u + \int^\rho \frac{a(r,c)}{r} dr = u + 2a(\rho, c)$;
- pour le 2-champ : $\mathcal{J}_2(\mathbf{W}) = u$ et $J_2(\mathbf{W}) = p(\rho, c)$;
- pour le 3-champ : $\mathcal{J}_3(\mathbf{W}) = c$ et $J_3(\mathbf{W}) = u - \int^\rho \frac{a(r,c)}{r} dr = u - 2a(\rho, c)$..

6. *Étude des détente*s.

6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* > u_L$, $\rho_* < \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L , u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.

6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, c_R)$.

7. *Étude des chocs*.

7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\rho_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* < u_L$, $\rho_* > \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L , u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) .

7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, c_R)$.

8. *Étude de la discontinuité de contact*.

Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*, c_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $p(\rho_\heartsuit, c_\heartsuit) = p(\rho_*, c_*)$. Quelle est la vitesse de déplacement σ_2 de cette discontinuité ?

9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L, c_L) et un état droit (ρ_R, u_R, c_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (ρ_*, u_*, c_*) et $(\rho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

18.

Étude du p-système isentrope en coordonnées Lagrangiennes

On veut étudier un modèle qui décrit la dynamique d'un gaz isentropique en coordonnées lagrangiennes. On note $\tau(x, t) > 0$ le volume spécifique du fluide, $u(x, t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse et $p(\tau) > 0$ sa pression.

En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements par le système

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (18.1)$$

Dans tout l'exercice on considère un gaz parfait. La loi de pression se réduit alors à $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$ avec $\gamma > 1$ une constante¹ ainsi

$$p(\tau) = \tau^{-\gamma} > 0, \quad p'(\tau) = -\gamma \tau^{-\gamma-1} < 0, \quad p''(\tau) = \gamma(\gamma+1)\tau^{-\gamma-2} > 0.$$

C'est une fonction positive, décroissante et convexe. Pour simplifier les notations, on introduit la fonction $\tau \mapsto c(\tau) > 0$ telle que

$$c^2(\tau) = -p'(\tau) = \gamma \tau^{-\gamma-1}.$$

c est une fonction positive et décroissante car $c'(\tau) = -\frac{p''(\tau)}{c(\tau)} < 0$.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On note $\mathfrak{J}_k(\mathbf{W})$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est

$$\mathfrak{J}_1 = u - \int^{\tau} c(r) dr = u + \frac{2}{\gamma-1} \tau c(\tau), \quad \mathfrak{J}_2 = u + \int^{\tau} c(r) dr = u - \frac{2}{\gamma-1} \tau c(\tau).$$

6. Étude des détentes.

- 6.1. Considérons le 1-champ. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de détente. Montrer que $u_* > u_L$ et $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L , u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.

1. Par exemple, pour un gaz monoatomique, $\gamma = 5/3$, pour un gaz diatomique $\gamma = 7/5$.

- 6.2. Reprendre la question pour le 2-champ.
7. *Étude des chocs.*
- 7.1. Considérons le 1-champ. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de choc. Montrer que $u_* < u_L$ et $\tau_* < \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u) .
- 7.2. Reprendre la question pour le 2-champ.
8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}^* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

19.

Étude du p-système isentropique en coordonnées Lagrangiennes par relaxation en volume

On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en coordonnées Lagrangiennes et une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad (19.1)$$

où $\tau > 0$ est le volume spécifique, $u \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide et p la pression donnée par une loi d'état telle que $p(\tau) > 0$, $p'(\tau) < 0$.

Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi(\tau, V) = 0, \\ \partial_t V = \mu(\tau - V), \end{cases} \quad (19.2)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $V > 0$ une nouvelle variable dite *volume de relaxation* et π une nouvelle loi d'état

$$\pi(\tau, V) = p(V) + a^2(V - \tau)$$

où $a > 0$ est une nouvelle constante et $p(V)$ est la «vraie» loi d'état du fluide (sur laquelle on ne fait aucune hypothèse). On a

$$\partial_\tau \pi(\tau, V) = -a^2, \quad \partial_V \pi(\tau, V) = p'(V) + a^2.$$

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, on retrouve le système (19.1) à partir du système (19.2) (et on aura $V = \tau$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (19.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$). On suppose aussi que τ et V sont strictement positifs.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Montrer que, pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ avec

$$\mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -a^2 & 0 & a^2 + p'(V) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).
5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\tilde{\mathcal{J}}_k$ et \mathcal{J}_k . Montrer qu'un choix possible est

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_1(\mathbf{Y}) &= V, & \mathcal{J}_1(\mathbf{Y}) &= au + \pi(\tau, V), \\ \tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{Y}) &= u, & \mathcal{J}_2(\mathbf{Y}) &= \pi(\tau, V), \\ \tilde{\mathcal{J}}_3(\mathbf{Y}) &= V, & \mathcal{J}_3(\mathbf{Y}) &= au - \pi(\tau, V). \end{aligned}$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*

Pour chaque k -onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k -onde.

En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,

- trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_* séparés par la 1-onde,
 - montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
 - trouver une relation entre un état gauche \mathbf{W}_\heartsuit et un état droit \mathbf{W}_R séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_R on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires \mathbf{Y}_1 et \mathbf{Y}_2 . On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

20.

Étude d'un mélange diphasique isentrope en coordonnées Lagrangiennes

On considère un mélange homogène et isentrope de deux fluides compressibles. En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements bi-fluide par le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau, c) = 0, \\ \partial_t c = 0, \end{cases} \quad (20.1)$$

où $\tau(x, t) > 0$ est la densité du mélange, $u(x, t)$ la vitesse du mélange, $c(x, t) \in [0; 1]$ la concentration massique du premier fluide et $p(\tau, c) > 0$ la pression du mélange qu'on supposera vérifier la condition

$$\partial_\tau p(\tau, c) < 0,$$

Pour simplifier les notation on introduit la fonction $a(\tau, c) > 0$ (vitesse du son du mélange) telle que

$$a^2(\tau, c) = -\partial_\tau p(\tau, c).$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\tau, u, c)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \partial_\tau p & 0 & \partial_c p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.



Dans la suite on prendra

$$p(\tau, c) = \left(\frac{c}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{1-c}{\tau}\right)^2 = \frac{c^2 + (1-c)^2}{\tau^2} = \frac{2c^2 - 2c + 1}{\tau^2}$$

ainsi

$$\partial_\tau p(\tau, c) = -\frac{2c^2 + 2(c-1)^2}{\tau^3} = -\frac{2p(\tau, c)}{\tau}, \quad \partial_{\tau\tau}^2 p(\tau, c) = \frac{6(2c^2 - 2c + 1)}{\tau^4}, \quad \partial_c p(\tau, c) = \frac{2(2c-1)}{\tau^2}$$

et

$$a(\tau, c) = \sqrt{-\partial_\tau p(\tau, c)} = \frac{\sqrt{2c^2 + 2(c-1)^2}}{\sqrt{\tau^3}} > 0, \quad \partial_\tau a(\tau, c) = \frac{-3}{2\tau} a(\tau, c) > 0, \quad \partial_c a(\tau, c) = \frac{\partial_c p(\tau, c)}{\tau a(\tau, c)}.$$

5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{J}_k(\mathbf{W})$ et $J_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
- pour le 1-champ : $\mathfrak{J}_1(\mathbf{W}) = c$ et $J_1(\mathbf{W}) = u + 2\tau a(\tau, c)$;
 - pour le 2-champ : $\mathfrak{J}_2(\mathbf{W}) = u$ et $J_2(\mathbf{W}) = p(\tau, c)$;
 - pour le 3-champ : $\mathfrak{J}_3(\mathbf{W}) = c$ et $J_3(\mathbf{W}) = u - 2\tau a(\tau, c)$.
6. *Étude des détente*.
- 6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* > u_L$, $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L , u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
- 6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, c_R)$.
7. *Étude des chocs*.
- 7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\tau_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* < u_L$, $\tau_* < \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L , u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u) .
- 7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, c_R)$.
8. *Étude de la discontinuité de contact*.
Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, c_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $p(\tau_\heartsuit, c_\heartsuit) = p(\tau_*, c_*)$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité?
9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (τ_L, u_L, c_L) et un état droit (τ_R, u_R, c_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (τ_*, u_*, c_*) et $(\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

21.

Étude du modèle de gaz de Chaplygin

On note $\rho(x, t) > 0$ la densité et $u(x, t)$ la vitesse du gaz. En dimension un d'espace, on modélise un écoulement isentrope par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad (21.1)$$

où $p(\rho)$ est la pression du gaz. L'équation d'état d'un gaz isentrope de Chaplygin s'écrit

$$p(\rho) = -\frac{A}{\rho} < 0$$

où $A > 0$ est une constante.¹ Notons que

$$p'(\rho) = \frac{A}{\rho^2} = -\frac{p(\rho)}{\rho} > 0.$$

Pour simplifier les notations on introduit la fonction $\rho \mapsto c(\rho) > 0$ tel que $c^2(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} p'(\rho) = \frac{A}{\rho^2}$. Alors on a $p(\rho) = -\rho c^2(\rho)$ et $c(\rho) = \frac{\sqrt{A}}{\rho} > 0$ et c est une fonction strictement décroissante.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont linéairement dégénérés.
5. On notera \mathcal{I}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathcal{I}_1 = u - c(\rho)$ et $\mathcal{I}_2 = u + c(\rho)$.
6. *Étude des discontinuités de contact.*
 - Soit une onde de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Quelle est la vitesse de déplacement σ_1 de cette discontinuité?
 - Reprendre la question pour la deuxième famille.

1. Cette loi d'état a été introduit par Chaplygin pour calculer la force de portance sur l'aile d'un avion en aérodynamique. Récemment, le gaz de Chaplygin a été proposé comme un modèle possible pour décrire la matière noire et l'énergie noire représentées par un seul fluide et la cosmologie de Chaplygin offre une possibilité intéressante de rendre compte des observations actuelles sur l'expansion de l'univers.

7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L) et un état droit (ρ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ρ_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes. On montrera notamment que les deux ondes s'intersectent ssi

$$u_R + c(\rho_R) > u_L + c(\rho_L).$$

22.

Étude du p-système isentrope avec une loi d'état logarithmique

On note $\rho(x, t) > 0$ la densité et $u(x, t)$ la vitesse du fluide. En dimension un d'espace, on modélise un écoulement isentrope par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad (22.1)$$

où p est la pression du gaz définie par une loi d'état logarithmique :

$$p(\rho) = A \ln(\rho)$$

où $A > 0$ est une constante. Cette loi d'état a été introduite pour étudier l'évolution dynamique de l'univers. Comparé aux diverses généralisations du modèle de gaz de Chaplygin, le modèle logotropique avec l'équation d'état logarithmique dépend du seul paramètre A et conduit à des comportements cosmologiques intéressants. Il est remarquable de constater que la pression est positive lorsque $\rho > 1$ et négative pour $0 < \rho < 1$. Il peut donc être considéré comme une transition entre les gaz polytropiques et les gaz de Chaplygin (généralisés). En conséquence, il a été présenté comme un candidat naturel et robuste pour une nouvelle unification de la matière noire et de l'énergie noire.

Pour simplifier les notations on introduit la fonction $\rho \mapsto c(\rho) > 0$ tel que $c^2(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} p'(\rho) = \frac{A}{\rho}$. Notons que c est une fonction positive, strictement décroissante, convexe :

$$c(\rho) = \sqrt{\frac{A}{\rho}} > 0, \quad c'(\rho) = -\frac{c(\rho)}{2\rho} < 0, \quad c''(\rho) = \frac{3c(\rho)}{4\rho^2} > 0.$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilineaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2(\rho)}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera \mathcal{I}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathcal{I}_1 = u - 2c(\rho)$ et $\mathcal{I}_2 = u + 2c(\rho)$.
6. *Étude des détentés.*

- 6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\rho_* > \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L , u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
- 6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
 - 7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\rho_* < \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L , u_L et ρ_* et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) .
 - 7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L) et un état droit (ρ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ρ_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

Étude d'un modèle d'écoulement sanguin

Un modèle monodimensionnel d'écoulement sanguin est obtenu par intégration des équations de Navier-Stokes sur chaque section transverse d'une artère. Pour une artère donnée, on obtient alors le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + \frac{\beta}{3\rho} A^{3/2} \right) = -K_r \frac{Q}{A}. \end{cases}$$

où $A(t, x)$ est l'aire de la section de l'artère considérée et $Q(t, x)$ le débit sanguin. Les coefficients K_r et β apparaissant dans le modèle sont liés respectivement à la viscosité sanguine et aux propriétés élastiques de la paroi artérielle. En particulier, β peut être interprété comme un coefficient de rigidité de l'artère, proportionnel au module de Young.

Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle du modèle, c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source en posant $K_r = 0$.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. Notons $u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{A}$. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (A, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & A \\ \frac{e^2}{\sqrt{A}} & u \end{pmatrix}.$$

ayant noté $e > 0$ la constante telle que $e^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\beta}{2\rho}$.

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera \mathcal{J}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathcal{J}_1 = 4e\sqrt[4]{A+u}$ et $\mathcal{J}_2 = 4e\sqrt[4]{A-u}$.
6. *Étude des détente.*
 - 6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (A_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (A_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $A_* < A_L$. Exprimer u_* en fonction de A_L, u_L et A_* et tracer son graphe dans le plan (A, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
 - 6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
 - 7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (A_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (A_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $A_* < A_L$. Exprimer u_* en fonction de A_L, u_L et A_* et tracer son graphe dans le plan (A, u) .

7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.

8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (A_L, u_L) et un état droit (A_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (A_*, u_*) . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

24.

Étude du système de Aw Rascle en $\rho-w$

On considère le système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho(w - \rho)) = 0, \\ \partial_t (\rho w) + \partial_x (\rho w(w - \rho)) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (24.1)$$

où $\rho(t, x) > 0$ et $w(t, x) \in \mathbb{R}$ sont les inconnues.¹

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. Soit $\mathbf{W} = (\rho, w)$, alors le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} w - 2\rho & \rho \\ 0 & w - \rho \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite qu'on notera $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que le champ 1 est vraiment non linéaire tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré. Quelle est la nature de ces deux champs? Autrement dit, il s'agit de chocs, de détente ou de discontinuités de contact?
5. On note \mathcal{J}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathcal{J}_1 = w$ et $\mathcal{J}_2 = \lambda_2$.
6. *Étude du 1-champ.*
 - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, w_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une 1-onde de détente. Montrer que $w_* = w_L$ et $\rho_* \leq \rho_L$. Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
 - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, w_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une 1-onde de choc de vitesse σ_1 . Montrer que $w_* = w_L$ et $\rho_* > \rho_L$.
7. *Étude du 2-champ.*

Quelle est la vitesse σ_2 de cette discontinuité? Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\rho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à un état droit \mathbf{W}_R par une discontinuité de vitesse σ_2 .
8. Résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

1. Il s'agit du système de Aw et RASCLE pour la modélisation macroscopique du trafic routier où ρ est la densité des véhicules et $w = u + \rho$ est leur vitesse moyenne u augmentée d'un facteur d'anticipation $p(\rho) = \rho$.

25.

Étude du système de Aw et Rascle

On considère le système de Aw et RASCLE pour la modélisation macroscopique du trafic routier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho(u + p(\rho))) + \partial_x(\rho u(u + p(\rho))) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (25.1)$$

où $\rho > 0$ est la densité des véhicules, u leur vitesse moyenne et p joue le rôle d'un facteur d'anticipation qu'on supposera vérifier les deux conditions suivantes

$$p(\rho) > 0 \qquad p'(\rho) > 0, \qquad p''(\rho) \geq 0.$$

Par exemple on pourra prendre $p(\rho) = \rho$.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. Soit $\mathbf{W} = (\rho, u)$, alors le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho \\ 0 & u - \rho p'(\rho) \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite qu'on notera $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique. (Que se passe-t-il quand $\rho \rightarrow 0$?)
4. Vérifier que le champ 1 est vraiment non linéaire tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré. Quelle est la nature de ces deux champs? Autrement dit, il s'agit de chocs, de détente ou de discontinuités de contact?
5. On note \mathcal{J}_k l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathcal{J}_1 = u + p(\rho)$ et $\mathcal{J}_2 = \lambda_2$.
6. *Étude du 1-champ.*
 - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une 1-onde de détente. Montrer que $u_* > u_L$ et $\rho_* < \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L, u_L et ρ_* . Plus précisément, écrire la fonction $\rho_* \mapsto u_*(\rho_*, \rho_L, u_L)$ et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 1-détente.
 - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une 1-onde de choc de vitesse $\dot{\sigma}_1$. Montrer que les relations de RANKINE-HUGONOT peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} j_1 \equiv \rho_*(u_* - \dot{\sigma}_1) = \rho_L(u_L - \dot{\sigma}_1), \\ (u_* + p(\rho_*))\rho_*(u_* - \dot{\sigma}_1) = (u_L + p(\rho_L))\rho_L(u_L - \dot{\sigma}_1). \end{cases}$$

Montrer que $u_* < u_L$ et $\rho_* > \rho_L$. Exprimer u_* en fonction de ρ_L, u_L et ρ_* . Plus précisément, écrire la fonction $\rho_* \mapsto u_*(\rho_*, \rho_L, u_L)$ et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) .

7. *Étude du 2-champ.*

Quelle est la vitesse σ_2 de cette discontinuité? Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*)$ qui peuvent être relié à un état droit \mathbf{W}_R par une discontinuité de vitesse σ_2 .

8. Résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

26.

Étude du système uv

On considère le système hyperbolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{au}{u+v} \right) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \left(\frac{bv}{u+v} \right) = 0, \end{cases} \quad (26.1)$$

où $0 < a < b$ sont des constantes données et $u(x, t) > 0$ et $v(x, t) > 0$ les deux fonctions inconnues.

1. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, trouver le vecteur $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que le système s'écrive $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système est équivalent à $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Expliciter la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$.
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que le 1-champ est linéairement dégénéré et que le 2-champ est vraiment non linéaire.
5. On note \mathcal{J}_k l'invariant de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathcal{J}_1 = \ln(u) - \ln(v)$ et $\mathcal{J}_2 = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$.
6. *Étude du 1-champ.*
Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\rho_*, w_*)$ qui peuvent être reliés à un état gauche \mathbf{W}_L par une discontinuité de vitesse $\dot{\sigma}_1$. Quelle est la vitesse $\dot{\sigma}_1$ de cette discontinuité?
7. *Étude du 2-champ.*
 - Pour un état gauche \mathbf{W}_* donné on cherche les états droit \mathbf{W}_R qui peuvent être reliés à \mathbf{W}_* par une 2-onde de détente. Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_* . Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 2-détente.
 - Pour un état gauche \mathbf{W}_* donné on cherche les états droit \mathbf{W}_R qui peuvent être reliés à \mathbf{W}_* par une 2-onde de choc de vitesse $\dot{\sigma}_2$. Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_* . Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v) .
8. Résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

Étude du système uv bis

On considère le système hyperbolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x ((u^2 + v^2)u) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x ((u^2 + v^2)v) = 0, \end{cases} \quad (27.1)$$

où $u(x, t) > 0$ et $v(x, t) > 0$ sont les deux fonctions inconnues.

1. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, trouver le vecteur $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système est équivalent à $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Expliciter la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$.
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que le 1-champ est linéairement dégénéré et que le 2-champ est vraiment non linéaire.
5. On note \mathfrak{J}_k l'invariant de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{J}_1 = u^2 + v^2$ et $\mathfrak{J}_2 = \ln(u) - \ln(v)$.
6. *Étude du 1-champ.*
Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\rho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à un état gauche \mathbf{W}_L par une discontinuité de vitesse σ_1 . Quelle est la vitesse σ_1 de cette discontinuité?
7. *Étude du 2-champ.*
 - Pour un état gauche \mathbf{W}_* donné on cherche les états droit \mathbf{W}_R qui peuvent être relié à \mathbf{W}_* par une 2-onde de détente. Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_* . Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v) . Calculer enfin \mathbf{W} dans la 2-détente.
 - Pour un état gauche \mathbf{W}_* donné on cherche les états droit \mathbf{W}_R qui peuvent être relié à \mathbf{W}_* par une 2-onde de choc de vitesse σ_2 . Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_* . Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v) .
8. Résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}_* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.