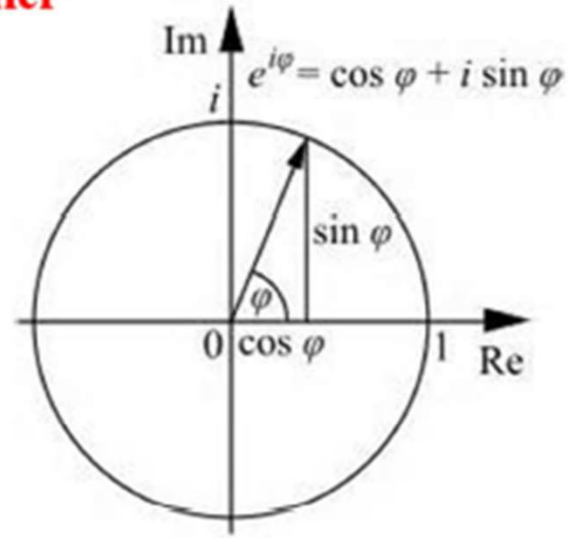
Chapitre 2 : Les bases des nombres complexes pour le GEII

Leonhard Euler



$$e^{i\pi}+1=0$$

Page 5 chapitre 2

Partie A : Définitions et notations du GEII

I. Introduction

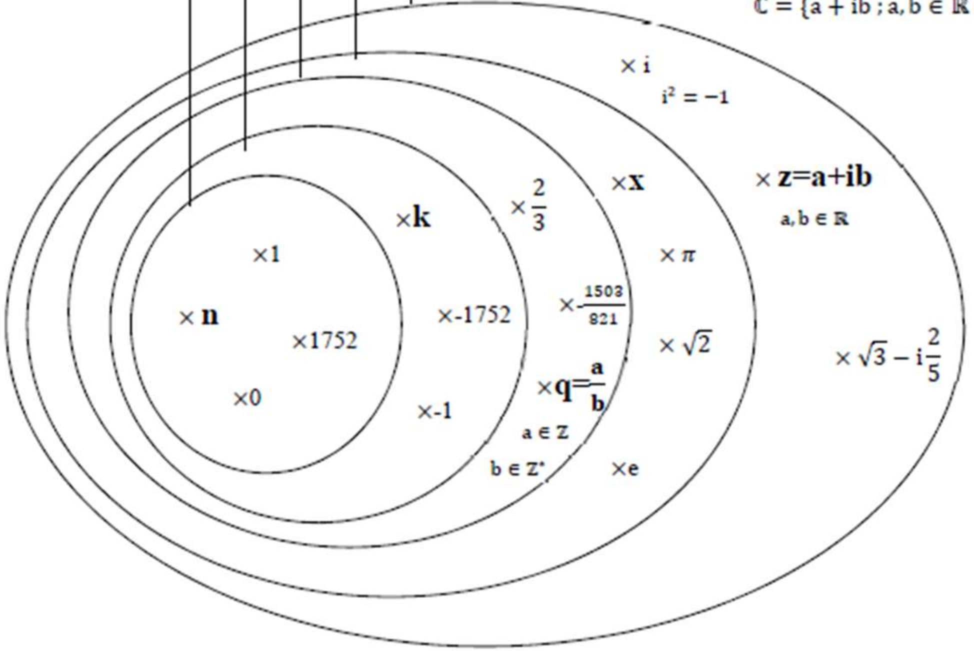
Ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ \ldots\,;n\,;\ldots\}$

Ensemble des nombres <u>entiers relatifs</u> :
$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots;k\,;\ldots\}$

Ensembles des nombres <u>rationnels</u> : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,;a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres <u>réels</u> : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\,;\ e\,;\ \pi\,;\ldots;x\,;\ldots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres <u>complexes</u> :
$\mathbb{C} = \{a + ib\,; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes Résoudre $x^2+1=0 \iff x^2=-1<0$ c'est impossible dans $\mathbb{R}$.

Page 4 chapitre 2

Soit i, un nombre imaginaire tel que $\boxed{i^2=-1}$

$x^2=-1 \iff x^2=i^2 \iff x=i$ ou $-i$

$(-i)^2=i^2=-1$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset$ et $S_{\mathbb{C}}=\{-i;i\}$

Résoudre $x^2+4=0 \iff x^2=\underbrace{-4}_{-1\times 4}$

$\iff x^2=i^2.2^2 \iff x^2=(2i)^2 \iff x=2i$ ou $-2i$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset \quad S_{\mathbb{C}}=\{-2i;2i\}$

Résoudre $x^2+2x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times5=4-20=-16<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Rappel :
$\Delta>0$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

$\Delta=i^2.4^2=(4i)^2$

Une racine carrée de Δ dans $\mathbb{C}$ est donc $4i$

On obtient : $x_1=\dfrac{-2-4i}{2}=\dfrac{\cancel{2}(-1-2i)}{\cancel{2}}=-1-2i$ et $x_2=-1+2i$ $\quad S_{\mathbb{C}}=\{-1-2i;-1+2i\}$

Ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ \dots;n\,;\dots\}$

Ensemble des nombres <u>entiers relatifs</u> :
$\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\dots;k\,;\dots\}$

Ensembles des nombres <u>rationnels</u> : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,;a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres <u>réels</u> : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\,;\ e\,;\ \pi\,;\dots;x\,;\dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres <u>complexes</u> :
$\mathbb{C} = \{a + ib\,; a,b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$

$\times\, i$

$i^2 = -1$

On appelle i le nombre imaginaire, défini par $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{z = a + ib\,; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

Dans cet ensemble toute équation du second degré possède deux solutions.

En électricité la lettre i étant réservée à l'intensité d'un courant, nous la remplacerons par la lettre j.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Page 5 chapitre 2

$3x^2 - 5x + 1.$

$\cancel{x^2\, 3 - x\, 5 + 1}$

$3 = 3 + i.0$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes

Simplifier dans $\mathbb{C}$: $\boxed{i^2 = -1}$

Page 4 chapitre 2 = au 24.

$$(3-4i)\cdot(1+i) = 3+3i-4i-4i^2 = 3-i-4(-1) = 3-i+4 = 7-i$$

$$1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$$ car : $i^3 = i\cdot\underbrace{i^2}_{-1} = -i$

$$(1+2i)^2+(2-i)^2 = 1+2.2i+\underbrace{4i^2}_{-4} + 4-2.2i+\underbrace{i^2}_{-1} = 5-5 = 0$$

$$(3-4i).(3+4i) = 3^2-16i^2 = 9-16i^2 = 9+16 = 25 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a-b)(a+b) &= a^2-b^2\end{aligned}}$$

$$\frac{2+i}{3-4i} = \frac{2+i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(2+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6+8i+3i+4i^2}{25}$$

Astuce

$$= \frac{6+11i-4}{25} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25}+\frac{11}{25}i$$

partie réelle — partie imaginaire

Notations Maths

$$\mathbb{C} = \{ z = a+ib \,;\, a,b \in \mathbb{R} \}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Notations du GEII.

$$\mathbb{C} = \{ \underline{z} = a+jb \,;\, a,b \in \mathbb{R} \}$$

$$\boxed{j^2 = -1}$$

II. Définitions et notations du GEII

Page 7 chapitre 2

- ✓ Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R} \ \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

- ✓ Le plan complexe : On représente un nombre réel sur une droite munie d'un repère $\left(O\,,\overrightarrow{OI}\right)$. Tout nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ par le point M d'abscisse $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$ et d'ordonnée $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$
  Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
  $\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
  $\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

Page 6 chapitre 2

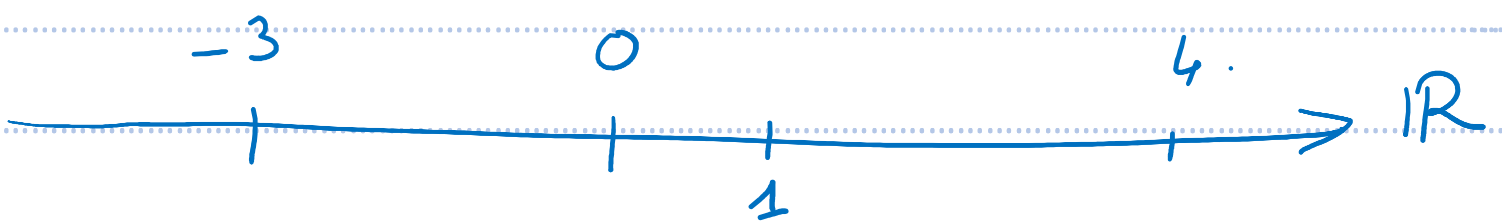
Notes

$z_1 = 3+5j \qquad Re(z_1) = 3 \qquad Im(z_1) = 5$

$z_2 = 5 = 5+0\cdot j \qquad Re(z_2) = 5 \qquad Im(z_2) = 0$

$z_3 = j-1 = -1+1\cdot j \qquad Re(z_3) = -1 \qquad Im(z_3) = 1$

$z_4 = -3j = 0-3j \qquad Re(z_4) = 0 \qquad Im(z_4) = -3$



II. Définitions et notations du GEII

Page 7 chapitre 2

- ✓ Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

- ✓ Le plan complexe : On représente un nombre réel sur une droite munie d'un repère $\left(O, \vec{OI}\right)$. Tout nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{OI}, \vec{OJ}\right)$ par le point M d'abscisse $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$ et d'ordonnée $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$
Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

Page 6 chapitre 2

Notes

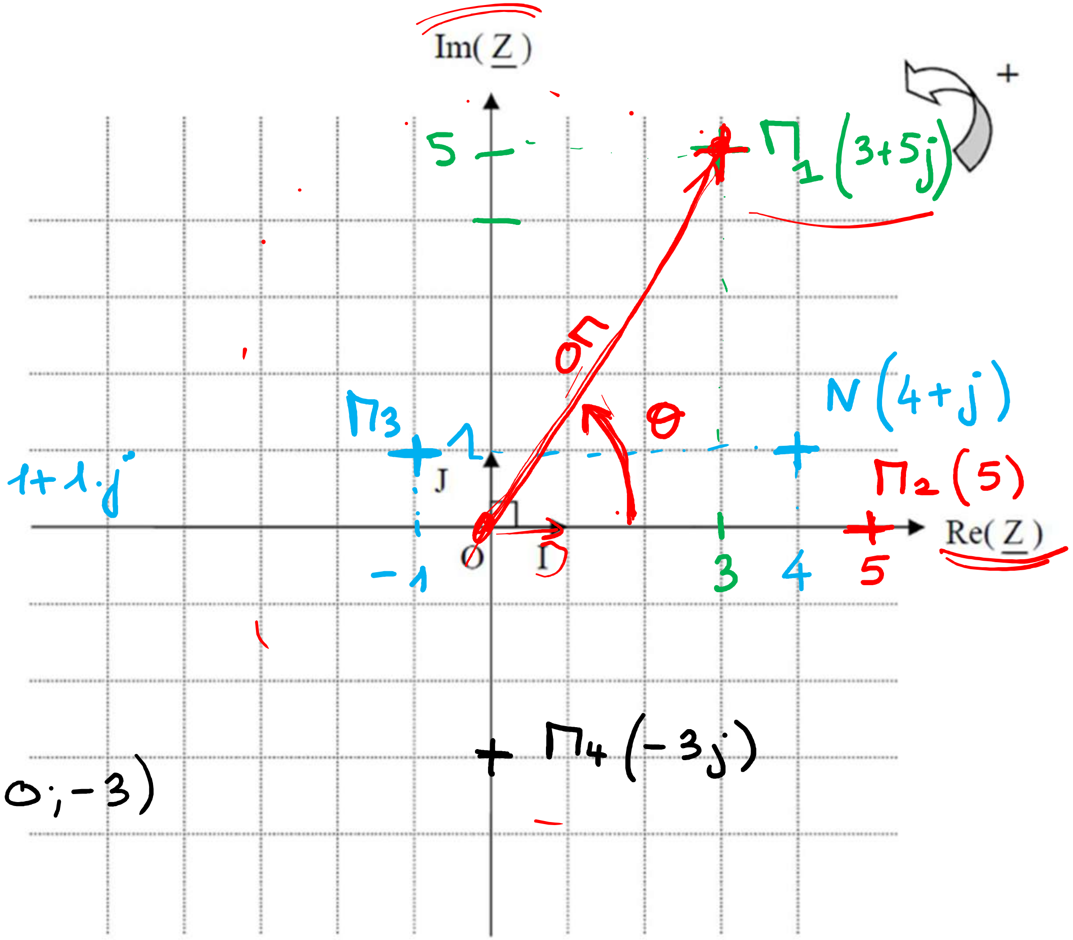
$Z_1 = 3+5j$

M_1 est l'image de $3+5j$

$Z_2 = 5$

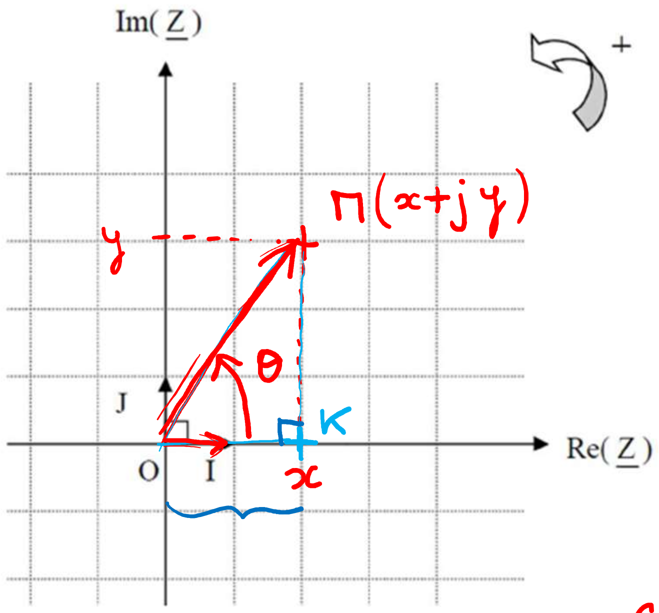
5 est l'affixe de M_2

$Z_3 = j-1 = -1+j = -1+1.j$



$Z_4 = -3j$

Z_4 a pour image $M_4(0;-3)$



Calcul de OM : Pythagore dans OMK

$OM^2 = \underbrace{OK^2}_{x^2} + \underbrace{KM^2}_{y^2} \iff \boxed{OM = \sqrt{x^2+y^2}}$ car $OM \geq 0$

Page 7 chapitre 2

Soit θ, la mesure de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$

$\cos(\theta) = \dfrac{Adj}{Hyp} = \dfrac{OK}{OM} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ — $x \to Re(Z)$

$\sin(\theta) = \dfrac{Opp}{Hyp} = \dfrac{KM}{OM} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ — $y \to Im(Z)$

GEII ↓ Maths ↓

✓ **Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, ainsi :**

$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

✓ **L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à 2kπ près (k ∈ ℤ). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$**, $\in [-\pi ; \pi]$.

on a alors : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases}$ **si $\underline{Z} \neq 0$.**

module de $\underline{Z}$

Page 7&8 chapitre 2

on a alors : $\begin{cases} \underline{\cos(\theta)} = \boxed{\dfrac{x}{\underline{Z}}} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \boxed{\dfrac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{Z}} \\ \underline{\sin(\theta)} = \boxed{\dfrac{y}{\underline{Z}}} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases}$ si $Z \neq 0$.

<u>Remarques</u> : 1. si Z=0, alors M=O, l'origine du repère, O, ne possède pas d'argument.

2. sinon, on a alors : x = …Z. cos θ…… et y = …Z. sin θ……………

3. (x,y) sont appelées « <u>coordonnées cartésiennes</u> » du point M, image du nombre complexe $\underline{Z} = \boxed{x + j.y}$ et $(|\underline{Z}|, \theta)$ sont appelées « <u>les coordonnées polaires</u> » du point M.

$Z_4 = 3+5j$ 10

Page 8&14 chapitre 2

* Notes $Z_1 = 1+j$ $\quad Re(Z_1) = 1$ $\quad Im(Z_1) = 1$

module de Z_1 : $Z_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

argument de Z_1 : $\theta_1 = arg(Z_1)$ est tel que : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{Re(Z_1)}{Z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{Im(Z_1)}{Z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{Z_1 = \sqrt{2} \quad arg(Z_1) = \frac{\pi}{4}}$ par choix

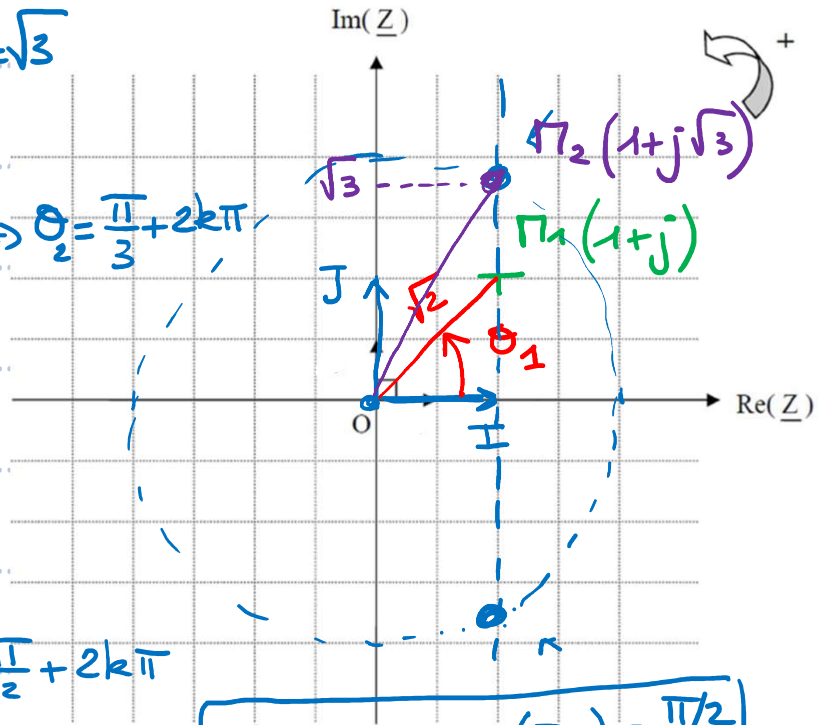
$Z_2 = 1+j\sqrt{3}$ $\quad Re(Z_2) = 1$ $\quad Im(Z_2) = \sqrt{3}$

* $Z_2 = |Z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

GEII $\quad$ Maths

$\theta_2 = arg(Z_2)$ est tel que : $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{Re(Z_2)}{Z_2} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{Im(Z_2)}{Z_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\boxed{Z_2 = 2 \text{ et } arg(Z_2) = \frac{\pi}{3}}$



$Z_3 = 4j$ $\quad Re(Z_3) = 0$ $\quad Im(Z_3) = 4$.

* $Z_3 = |Z_3| = |4j| = \sqrt{0^2+4^2} = 4$

$\theta_3 = arg(Z_3)$ est tel que : $\begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{0}{4} = 0 \\ \sin\theta_3 = \frac{4}{4} = 1 \end{cases} \iff \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\boxed{Z_3 = 4 \quad arg(Z_3) = \pi/2}$

Voir suite P. 14

Suite de la p. 8

Page 8&14 chapitre 2

Notes

* $Z_4 = 3+5j \qquad Re(Z_4) = 3 \qquad Im(Z_4) = 5$

$Z_4 = |3+5j| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} =$

$arg(Z_4) = \theta_4$ est tel que : $\begin{cases} \cos\theta_4 = \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \sin\theta_4 = \frac{5}{\sqrt{34}} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta_4 = \frac{\sin\theta_4}{\cos\theta_4} = \frac{\frac{5}{\sqrt{34}}}{\frac{3}{\sqrt{34}}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \theta_4 = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$

$\boxed{Z_4 = \sqrt{34} \text{ et } arg(Z_4) = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)}$

* $Z_5 = 1-j \qquad Re(Z_5) = 1 \qquad Im(Z_5) = -1$

$Z_5 = |1-j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

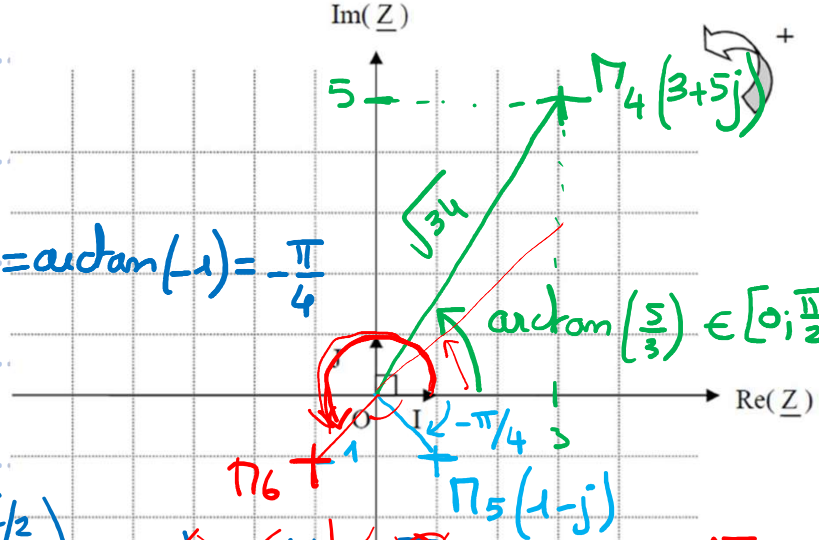
$arg(Z_5) = \theta_5 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_5 = \sqrt{2}/2 \\ \sin\theta_5 = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow \theta_5 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

* $Z_6 = -1-j \qquad \boxed{Re(Z_6) = -1 < 0}$

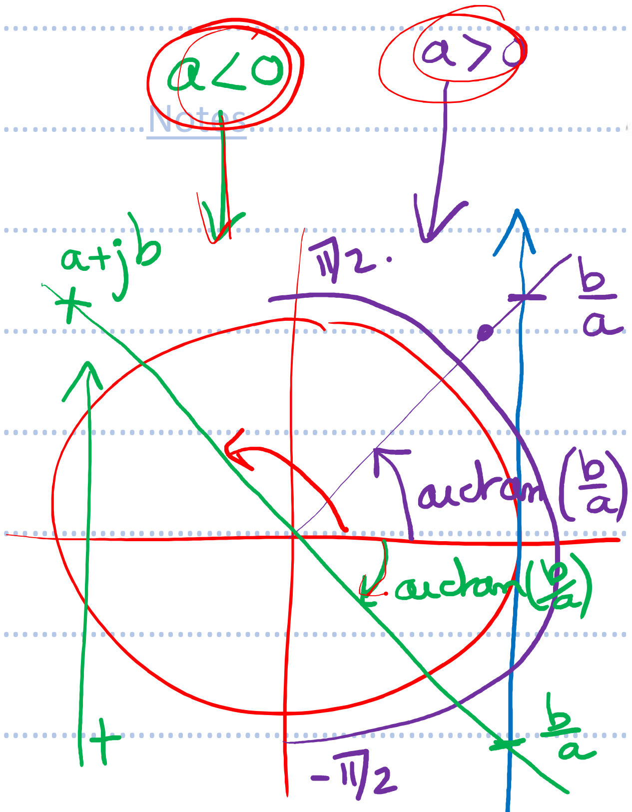
$Z_6 = |-1-j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

θ_6 est tel que : $\begin{cases} \cos\theta_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_6 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2}\right) = \cancel{\arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$ car $\theta_6 = \frac{-3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta_6 = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} = arg(Z_6)$



Notes



$\arg(a+jb) = \arctan\frac{b}{a} \pm \pi$

Page 15 chapitre 2

Partie C : Opérations sur les module et arguments d'un nombre complexe

I. Argument d'un nombre complexe et arctangente

Comment obtenir θ l'argument d'un nombre complexe, lorsqu'il n'est pas remarquable ?

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul et $a \neq 0$.

Pour déterminer un argument de $\underline{Z}$, on calcule

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Si θ n'est pas un angle remarquable, alors on calcule : $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a}$.

On peut alors en déduire θ, en utilisant la fonction Arctangente, mais en faisant très attention, car Arctan(x)∈ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!!! En effet, lorsque la partie réelle de $\underline{Z}$ est négative, la mesure principale de son argument θ n'est pas dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour obtenir le bon résultat, il suffit donc d'ajouter ou de soustraire π à Arctan $\left(\frac{b}{a}\right)$

A retenir

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

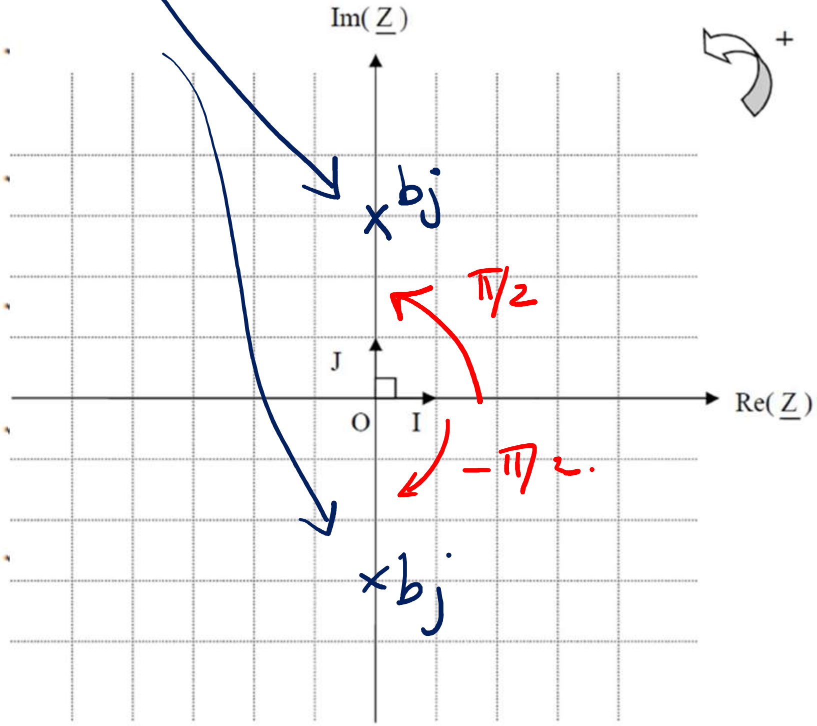
$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Page 15 chapitre 2

<u>Remarque</u> : Que se passe-t-il si a = 0 ?

Alors $\underline{Z} = 0 + bj$ est un "imaginaire pur"

et $\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } b < 0 \end{cases}$



Partie B : Les différentes écritures d'un nombre complexe

Page 9 chapitre 2

I. Définitions

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

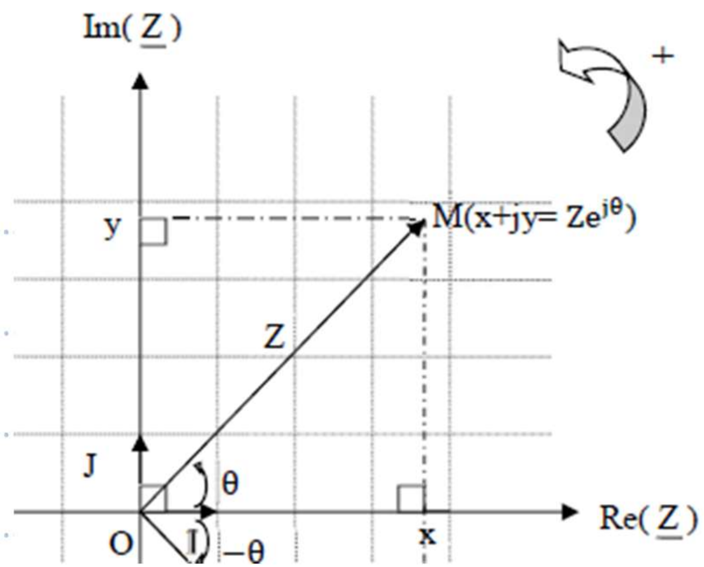
x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

Le <u>module</u> de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $\left|\underline{Z}\right|$, c'est la distance de O à M, donc $\left|\underline{Z}\right| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'<u>argument</u> de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$



Notes

Page 9 chapitre 2

<u>Forme algébrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

<u>Forme trigonométrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.\left(\cos(\theta) + j.\sin(\theta)\right)$ aussi noté : $\underline{Z} = [Z , \theta]$

<u>Forme exponentielle, géométrique ou polaire</u> : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

Voir page 19

Page 19 chapitre 2

écriture cartésienne.

* $z_1 = -1 - j$ $\quad Re(z_1) = -1 \quad Im(z_1) = -1$

<0

module de z_1 = $Z_1 = |-1-j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

argument de z_1 : $\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{Im(z_1)}{Re(z_1)}\right) \pm \pi = \arctan(1) \pm \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{3\pi}{4}$

écritures : $Z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{-3j\pi/4}$ ← écriture exponentielle

$Z_1 = [\sqrt{2}; -135°]$ car $-\frac{3\pi}{4} = -\frac{3 \times 180°}{4} = -135°$

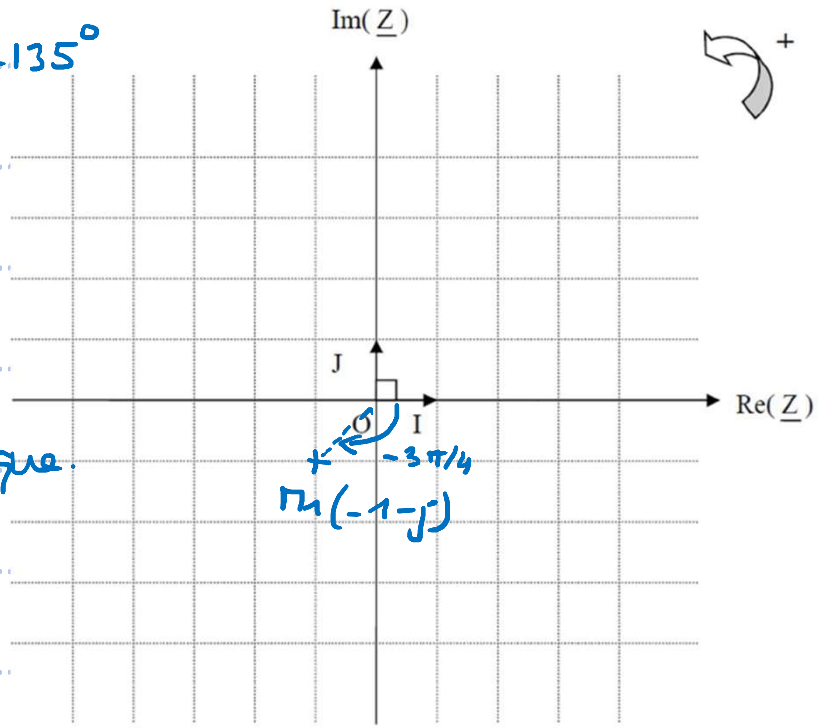
↑ écriture polaire

* $Z_2 = 7 \cdot e^{j\pi/3}$ ← écriture exponentielle

$Z_2 = [7; 60°]$ ← écriture polaire

$Z_2 = 7\cos\frac{\pi}{3} + j7\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ← écriture trigonométrique

$Z_2 = \frac{7}{2} + j7\frac{\sqrt{3}}{2}$ ← écriture cartésienne.



III. Application au GEII

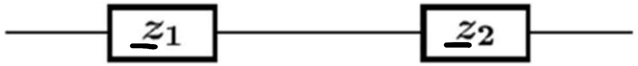
Page 17 chapitre 2

Soient les deux nombres complexes : $\underline{z}_1 = \mathbf{1} + \boldsymbol{j3}$ et $\underline{z}_2 = \mathbf{2} + \boldsymbol{j4}$.
Calculer le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$ En génie électrique, ce calcul correspond à calculer l'impédance équivalente de deux impédances montées en série ($\underline{z}_{eq} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$).

$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$

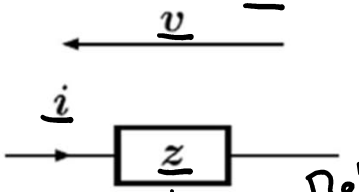
$\arg(a+jb) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a>0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi \text{ si } a<0 \end{cases}$



$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 1+3j + 2+4j = \boxed{3+7j = \underline{Z}_{eq}}$

* module de $\underline{Z}_{eq}$: $Z_{eq} = |3+7j| = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$
* $\arg(\underline{Z}_{eq}) = \arctan\left(\frac{7}{3}\right)$
* $Re(\underline{Z}_{eq}) = 3$ et $Im(\underline{Z}_{eq}) = 7$.

2. $\underline{z_1}.\underline{z_2}$ Cela correspond par exemple à calculer en régime sinusoïdal établi, la tension complexe $\underline{v}$ aux bornes d'une impédance $\underline{z} = 1 + 3j$ traversée par un courant $\underline{i} = 2 + 4j$ ($\underline{v} = \underline{z}.\underline{i}$).



$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{z} \Leftrightarrow x = z\cos\theta \\ \sin\theta = \frac{y}{z} \Leftrightarrow y = z.\sin\theta . \end{cases}$

Page 17&18 chapitre 2

Méth 1

* module de $\underline{v} = \underline{z}.\underline{i} = (1+3j).(2+4j)$

$\underline{v} = 2+4j+6j+\underbrace{12j^2}_{=-12} = \boxed{-10+10j}$ 20

$v = \sqrt{10^2+10^2} = \sqrt{200} = \sqrt{2\times 100} = 10\sqrt{2}$

* $\arg(\underline{v}) = \arctan\left(\frac{10}{-10}\right) + \pi = \arctan(-1)+\pi = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$

* $Re(\underline{v}) = -10$

$Im(\underline{v}) = 10$

Méth 2

* $v = \boxed{|\underline{z}.\underline{i}| = |\underline{z}|.|\underline{i}|} = z.i$

$= |1+3j| \times |2+4j| = \sqrt{1^2+3^2} \times \sqrt{2^2+4^2}$

$v = \sqrt{10}\times\sqrt{20} = \sqrt{10}.\sqrt{2}.\sqrt{10} = 10\sqrt{2}$ ok

* $\arg(\underline{v}) = \boxed{\arg(\underline{z}.\underline{i}) = \arg(\underline{z})+\arg(\underline{i})}$

$= \arg(1+3j)+\arg(2+4j) =$

$\arg(\underline{v}) = \arctan(3)+\arctan(2)$

* $Re(\underline{v}) = Z.\cos\theta = 10.\sqrt{2}.\cos(\arctan 3+\arctan 2) = -10$

$Im(\underline{v}) = Z.\sin\theta = 10\sqrt{2}.\sin(\arctan 3+\arctan 2) = 10$

3. $\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}$. Cela correspond à calculer le courant $\underline{i}$ qui traverse une impédance $\underline{z} = \mathbf{2} + \mathbf{4}j$ ayant une tension $\underline{v} = 1 + 3j$ à ses bornes $\left(\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right)$.

Page 18 chapitre 2

Méth 1

$\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{z}} = \frac{1+3j}{2+4j} \times \frac{2-4j}{2-4j} = \frac{\quad}{2^2+4^2}$

$(x+jy)(x-jy) = x^2+y^2$

$x^2-(jy)^2 = x^2-j^2y^2 = x^2+y^2$

$\underline{i} = \frac{2-4j+6j-12j^2}{20} = \frac{14+2j}{20} = \frac{\cancel{2}(7+j)}{\cancel{20}\ 10}$

$\underline{i} = \frac{7}{10} + j\frac{1}{10}$

* $i = \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{100}+\frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

* $\arg(\underline{i}) = \arctan\left(\frac{1/10}{7/10}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$.

* $Re(\underline{i}) = \frac{7}{10}$ et $Im(\underline{i}) = \frac{1}{10}$.

Méth 2

* $|\underline{i}| = \boxed{\left|\frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right| = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{z}|}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}.\sqrt{10}}$

$i = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

* $\arg(\underline{i}) = \boxed{\arg\left(\frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right) = \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{z})}$

$\arg(\underline{i}) = \arctan(3) - \arctan(2)$

* $\boxed{Re(\underline{i}) = Z.\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(\arctan 3 - \arctan 2)$
$= 7/10.$

* $\boxed{Im(\underline{i}) = Z.\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(\arctan 3 - \arctan 2)$
$= \frac{1}{10}$

II. Propriétés et Opérations sur les module et arguments

Notes

Page 16 chapitre 2

2) Produit de deux nombres complexes

$$\arg(\underline{Z}.\underline{Z'}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\text{, et } |\underline{Z}.\underline{Z}'| = |\underline{Z}|.|\underline{Z}'|$$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

3) Quotient

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \text{, et } \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

II. Propriétés et Opérations sur les module et arguments

4) Puissances $n^{ième}$ d'un nombre complexe (n est un entier naturel)

Page 17 chapitre 2

$$\arg\left(\underline{Z}^n\right) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z} \,,\ \text{et}\ \left|\underline{Z}^n\right| = \left|\underline{Z}\right|^n$$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à $2k\pi$ près)

Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

Forme trigonométrique de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)

module >0 argument

Page 9 chapitre 2

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.\left(\cos(\theta) + j.\sin(\theta)\right)$ aussi noté : $\underline{Z} = [Z, \theta]$

Forme exponentielle, géométrique ou polaire : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

Nombre complexe conjugué de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.\,e^{-j\theta}$

$$\underline{Z} = x + jy = Z\cos\theta + jZ\sin\theta \qquad \underline{Z}\underline{Z}' = \qquad e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\underline{Z}' = x' + jy' = Z'\cos\theta' + jZ'\sin\theta'$$

$$\underline{Z}\underline{Z}' = ZZ'\cos\theta\cos\theta' + jZZ'\cos\theta.\sin\theta' + jZZ'\sin\theta\cos\theta' + \underbrace{j^2}_{-1} ZZ'\sin\theta\sin\theta'$$

$$= ZZ'\cos\theta\cos\theta' - ZZ'.\sin\theta\sin\theta' + j\left(ZZ'\cos\theta\sin\theta' + ZZ'\sin\theta\cos\theta'\right)$$

$$= ZZ'\left(\underbrace{\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta'}_{\cos(\theta+\theta')}\right) + jZZ'\left(\underbrace{\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'}_{\sin(\theta+\theta')}\right)$$

2) Produit de deux nombres complexes (Comme $\boxed{e^{a}.e^{b} = e^{a+b}}$ il est préférable d'utiliser l'écriture exponentielle/polaire le plus possible)

Page 16 chapitre 2

$$\boxed{\underline{Z}.\underline{Z'} = Ze^{j.\theta}.Z'e^{j.\theta'} = \underbrace{Z.Z'}_{\text{module}}e^{j(\theta+\theta')}}$$ on en déduit que :

$$\mathbf{arg(\underline{Z}.\underline{Z'}) = arg(\underline{Z}) + arg(\underline{Z}') + 2k\pi \,,\; k \in \mathbb{Z} \,,\; et\; |\underline{Z}.\underline{Z}'| = |\underline{Z}|.|\underline{Z}'|}$$

$$[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}] \times [\mathbf{Z}', \boldsymbol{\theta}'] = [\mathbf{ZZ}', \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}']$$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

Page 16 chapitre 2

3) <u>Quotient</u> (Rappel : $\boxed{\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}}$ on utilisera l'écriture exponentielle/polaire si possible)

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{Z e^{j.\theta}}{Z' e^{j.\theta'}} = \underbrace{\frac{Z}{Z'}}_{\text{module}} e^{j(\theta-\theta')}$$ argument. on en déduit que :

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ \text{et} \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$$

$$\frac{[Z,\theta]}{[Z',\theta']} = [\frac{Z}{Z'}, \theta - \theta']$$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

Page 16 chapitre 2

Cas particulier : (Rappel : $\boxed{\frac{1}{e^a} = e^{-a}}$) $\quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z.e^{j.\theta}} = \frac{1}{Z}.e^{-j.\theta}$ argument . avec $\underline{Z} \neq 0$. On en déduit que :

module

$$\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = -\arg(\underline{Z}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ \text{, et}\ \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{1}{|\underline{Z}|} \qquad \frac{1}{[Z,\theta]} = [\frac{1}{Z}, -\theta]$$

Le module de l'inverse d'un nombre complexe est l'inverse de son module, l'argument de l'inverse d'un nombre complexe est l'opposé de son argument (à 2kπ près)

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

Notes

Page 17 chapitre 2

4) Puissances $n^{ième}$ d'un nombre complexe (n est un entier naturel)

Rappel : $\boxed{\left(e^{p}\right)^{n} = e^{p.n}}$ et $(a.b)^n = a^n . b^n$)

argument .

$$\underline{Z}^{n} = \left(Ze^{j.\theta}\right)^{n} = Z^{n}.e^{n.j.\theta}$$ on en déduit que :

module

$\arg\left(\underline{Z}^{n}\right) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\underline{Z}^{n}\right| = \left|\underline{Z}\right|^{n}$

$[\mathbf{Z}\,,\theta]^{n} = [\,Z^{n}\,, n.\theta]$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à 2kπ près)

Exercice 1

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

Page 21 chapitre 2

$$\underline{Z}_7 = \frac{1}{1+j} \times \frac{1-j}{1-j}.$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$Z_7 = \frac{1}{|1+j|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(Z_7) = -\arg(1+j) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

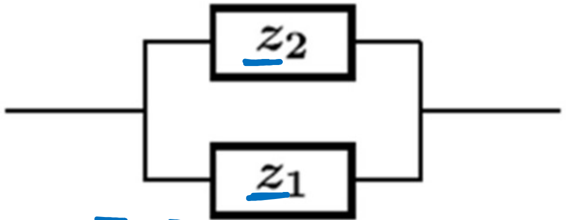
$$Z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; -45°\right]$$

Exercice 2

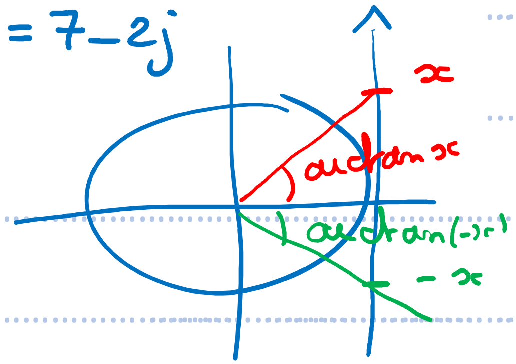
Page 21 chapitre 2

Soient les deux nombres complexes : $\underline{z_1} = 2 - j3$ et $\underline{z_2} = 5 + j$.

Calculer l'argument du nombre complexe $\underline{z}$ défini par : $\dfrac{1}{\underline{z}} = \dfrac{1}{\underline{z_1}} + \dfrac{1}{\underline{z_2}}$. Ce calcul correspond au calcul de l'impédance équivalente de deux impédances $\underline{z_1}$ et $\underline{z_2}$ montées en parallèle.



$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 7 - 2j$



$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{\underline{z}_2 + \underline{z}_1}{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2} \iff \underline{z} = \frac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2}$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\boxed{\tan(-\theta) = -\tan\theta \Rightarrow \tan \text{ est impaire}}$$

$$\boxed{\text{donc arctan est impaire}}$$

$$\arg(\underline{z}) = \arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) - \arg(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)$$

$$= \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) - \arg(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)$$

$$= \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(-\frac{2}{7}\right)$$

$$= -\arctan(3/2) + \arctan(1/5) + \arctan(2/7)$$

Exercice 3 Dans les impédances suivantes $\boxed{R, L, C \text{ et } \omega}$ sont des nombres réels strictement positifs ; déterminer leurs module et argument :

$\underline{Z}_1 = R + j.L.\omega$; $\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j.C.\omega}$; $\underline{Z}_3 = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$; $\underline{Z}_4 = \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}$

Page 21 chapitre 2

$\underline{Z}_5 = \frac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6}$ où x est un nombre réel.

$* \underline{Z}_1 = R + jL.\omega$

$Z_1 = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \cancel{\sqrt{R^2 + L\omega^2}}$

$\arg(\underline{Z}_1) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$

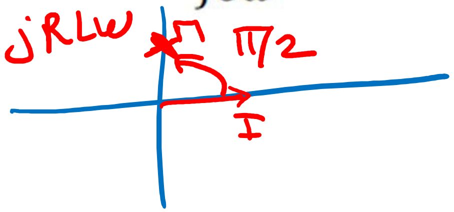
$* \underline{Z}_2 = R + \frac{1}{jC\omega} \times \frac{-j}{-j} = R + \frac{-j}{C\omega} = \boxed{R - j\frac{1}{C\omega}}$ $\quad (jC\omega)^{-1}$

$Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$; $\arg(\underline{Z}_2) = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{C\omega}}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

Exercice 3 Dans les impédances suivantes R, L,C et ω sont des nombres réels strictement positifs ; déterminer leurs module et argument :

Page 21 chapitre 2

$\underline{Z}_1 = R + j.L.\omega$; $\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j.C.\omega}$; $\underline{Z}_3 = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$; $\underline{Z}_4 = \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}$



$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3}.$$

$\underline{Z}_5 = \frac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6}$ où x est un nombre réel.

$$* \ \underline{Z}_3 = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \times \frac{-j}{-j} = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \ ; \ \arg(\underline{Z}_3) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$$* \ \underline{Z}_4 = \frac{0 + jRL\omega}{R + jL\omega} \qquad Z_4 = \frac{|jRL\omega|}{|R+jL\omega|} = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \leftarrow \text{car } R, L, \omega > 0$$

$$\arg(\underline{Z}_4) = \overbrace{\arg(jRL\omega)}^{\frac{\pi}{2} \text{ car } RL\omega > 0} - \arg(R + jL\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Exercice 3 Dans les impédances suivantes R, L,C et ω sont des nombres réels strictement positifs ; déterminer leurs module et argument :

$\underline{Z}_1 = R + j.L.\omega$; $\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j.C.\omega}$; $\underline{Z}_3 = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$; $\underline{Z}_4 = \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}$

Page 21 chapitre 2

$\underline{Z}_5 = \frac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6}$ où x est un nombre réel.

$$\underline{Z}_5 = \frac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6} \quad ; x \in \mathbb{R}.$$

$$|\underline{Z}_5| = \frac{|(1+jx)^{10}|}{|(1-jx)^6|} = \frac{|1+jx|^{10}}{|1-jx|^6} = \frac{\sqrt{1^2+x^2}^{\,10}}{\sqrt{1^2+x^2}^{\,6}} = \frac{(1+x^2)^5}{(1+x^2)^3} = (1+x^2)^2$$

$$\arg(\underline{Z}_5) = \arg\left((1+jx)^{10}\right) - \arg\left((1-jx)^6\right)$$

$$= 10.\arg(1+jx) - 6.\arg(1-jx)$$

$$= 10.\arctan(x) \underbrace{- 6\arctan(-x)}_{+6\arctan(x)} = 16.\arctan x.$$