Préparation DS sur les séries de Fourier niveau 2
BUT GEII 2

Questions de cours

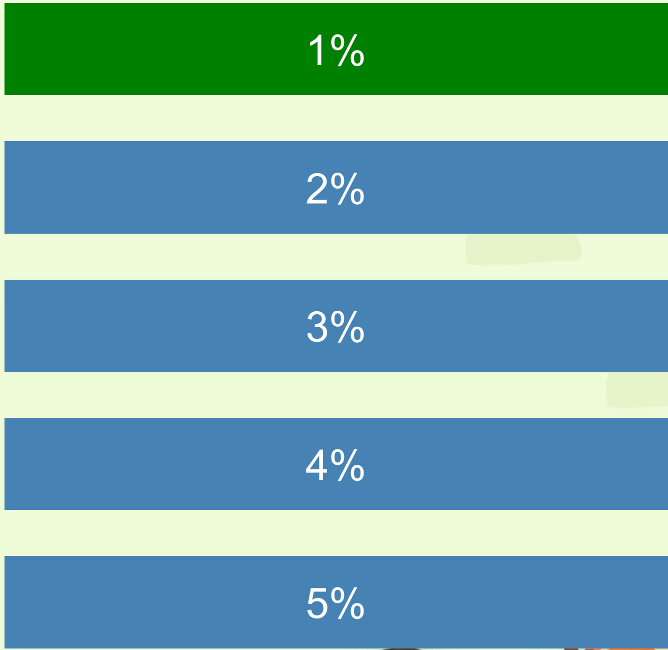
Soit x, un signal pair alors :

1. sa courbe est symétrique par rapport à (Oy) et $b_p = 0 \; \forall p \geq 1$

2. sa courbe est symétrique par rapport à O et $b_p = 0 \; \forall p \geq 1$

3. sa courbe est symétrique par rapport à (Oy) et $a_0 = a_p = 0 \; \forall p \geq 1$

4. sa courbe est symétrique par rapport à O et $a_0 = a_p = 0 \; \forall p \geq 1$



Soit x, un signal impair alors :

1. sa courbe est symétrique par rapport à (Oy) et $b_p = 0\ \forall p \geq 1$
2. sa courbe est symétrique par rapport à O et $b_p = 0\ \forall p \geq 1$
3. sa courbe est symétrique par rapport à (Oy) et $a_0 = a_p = 0\ \forall p \geq 1$
4. ✓4 sa courbe est symétrique par rapport à O et $a_0 = a_p = 0\ \forall p \geq 1$

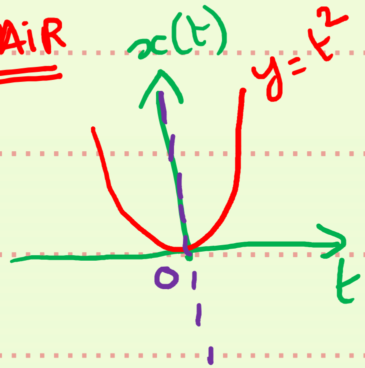
1	1%
2	2%
3	3%
4	4%

Notes

Série de Fourier de x :

$$S(t) = \underbrace{a_0}_{\text{pairs}} + \sum_{p\geq 1} \underbrace{a_p \cos(p\omega t)}_{\text{pairs}} + \underbrace{b_p \sin(p\omega t)}_{\text{impairs}}$$

PAIR

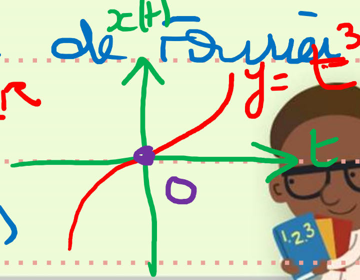


- Si x est pair alors sa série de Fourier est en Cosinus et $b_p = 0 \ \forall p \geq 0$.

$$S(t) = a_0 + \sum_{p\geq 1} a_p . \cos(p\omega t)$$

- Si x est impair alors sa série de Fourier est en sinus et $a_0 = a_p = 0 \ \forall p \geq 1$

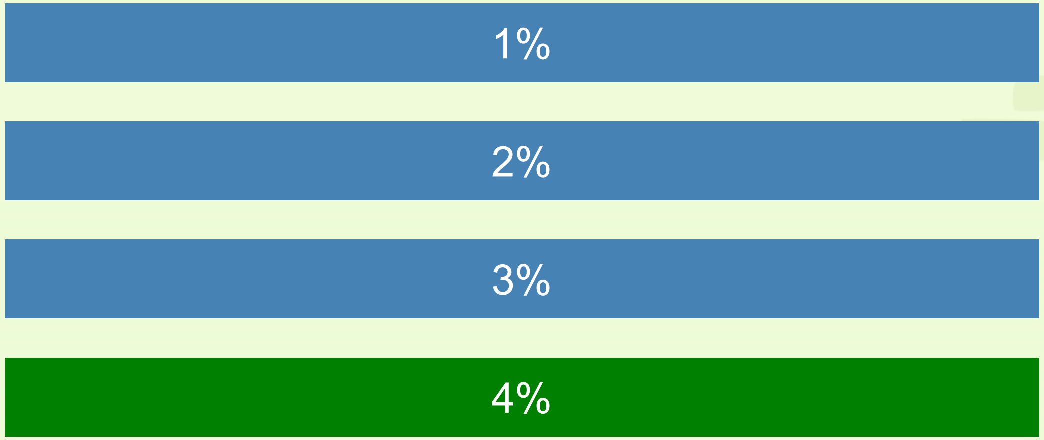
IMPAIR



$$S(t) = \sum_{p\geq 1} b_p \sin(p\omega t)$$

Quelle est l’égalité juste ? (k est un entier relatif)

1. $\cos(k\pi) = -1^k$
2. $\sin(k\pi) = 1$
3. $\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 0$
4. $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 0$ si k est pair



✓4

Notes

$k \in \mathbb{Z}$

① $\cos(k\pi) = (-1)^k$

② $\sin(k\pi) = 0$

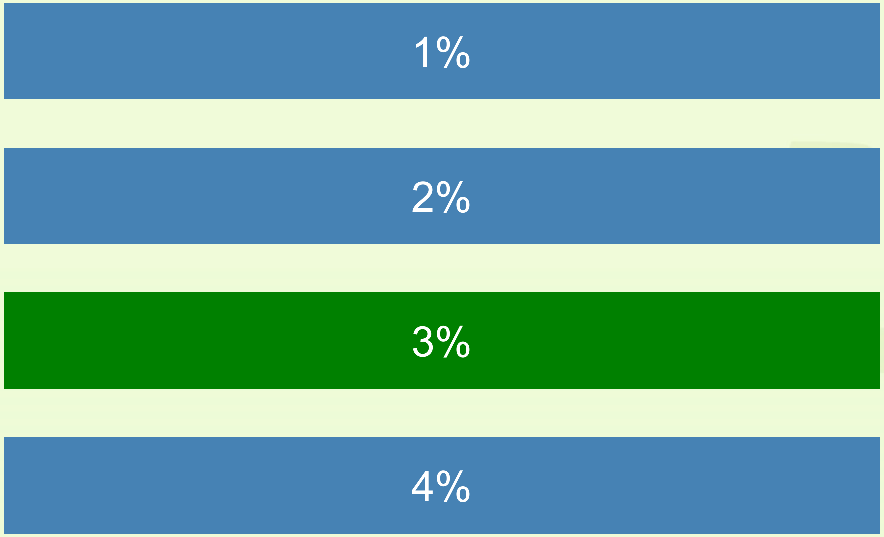
③ $$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k=1 \\ -1 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k=3 \\ 1 & \text{si } k=4 \\ 0 & \text{si } k=5 \\ \vdots & \end{cases}$$

④ $$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \text{si } k=2p : \sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0 \\ \text{si } k=2p+1 : \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \end{cases}$$

Soit la série de Fourier d'un signal x :

$$S(t) = \frac{3}{5}.\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(p\pi)-1}{p}.\ \sin(p\pi t).$$ Peut-on alors écrire ?

1. $S(t) = \frac{-3}{5}.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((k\pi t)}{2k+1}$
2. $S(t) = \frac{-6}{5}.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi\ )}{k}$
3. ✓3 $S(t) = \frac{-6}{5}.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+\ )\pi t)}{2k+1}$
4. Aucune des réponses ci-dessus n'est juste



Notes

$$S_x(t) = \frac{3}{5} \cdot \sum_{p \geq 1} \frac{\cos(p\pi) - 1}{p} \cdot \sin(p\pi t)$$

$$S_x(t) = \frac{3}{5} \cdot \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p - 1}{p} \cdot \sin(p\pi t)$$

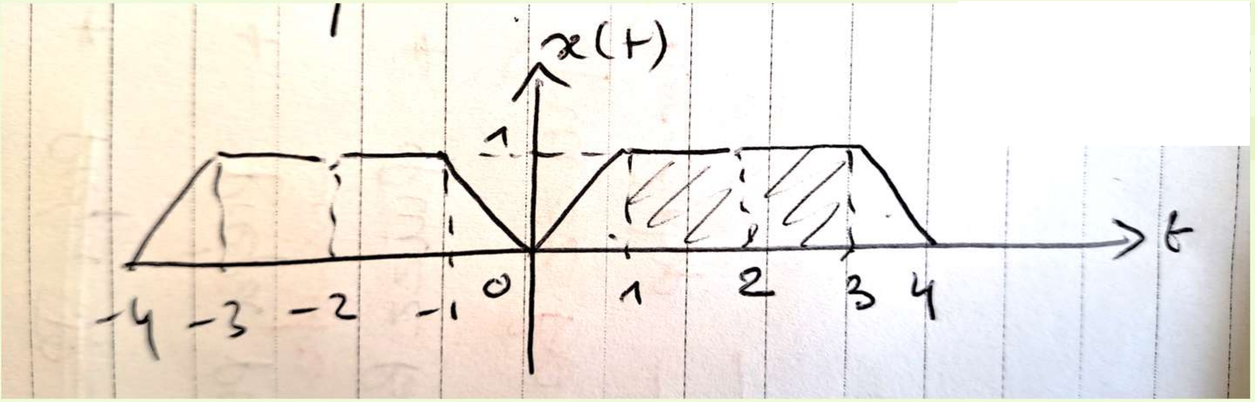
$$= \frac{3}{5} \cdot \Big(\underset{p=1}{\frac{-2}{1} \cdot \sin(\pi t)} + \underset{p=2}{0} + \underset{p=3}{\frac{-2}{3} \cdot \sin(3\pi t)} + \underset{p=4}{0} + \frac{-2}{5} \cdot \sin(5\pi t) + \dots \Big)$$

$$= -\frac{6}{5} \left(\frac{\sin(\pi t)}{1} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \dots \right)$$

$$S_x(t) = -\frac{6}{5} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{2k+1}$$

Exercice 1 : série de Fourier réelle

Soit x, *le signal représenté par* :

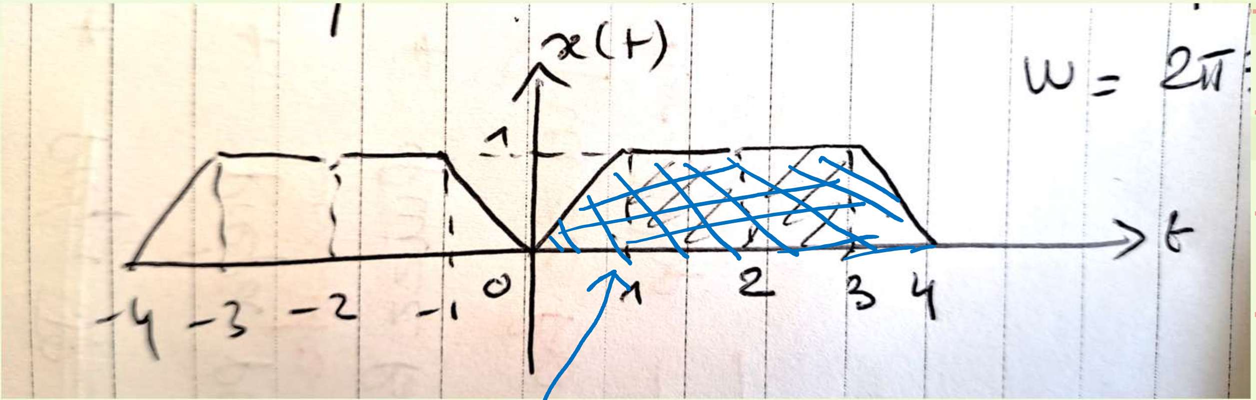


1. x est impair et a pour période $T = 4$	1%
✓2 2. x est pair et a pour période $T = 4$	2%
3. x est pair et a pour période $T = 2$	3%
4.x est impair et a pour période $T = 2$	4%
5. x est ni pair ni impair	5%

La valeur moyenne du signal précédent est égale à :

1. $a_0=3$	1%
2. $a_0=0$	2%
3 3. $a_0=3/4$	3%
4. Aucune des valeurs précédentes n’est juste.	4%

Notes



$$a_0 = \frac{1}{T} \times \int_a^{a+T} x(t)\,dt = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

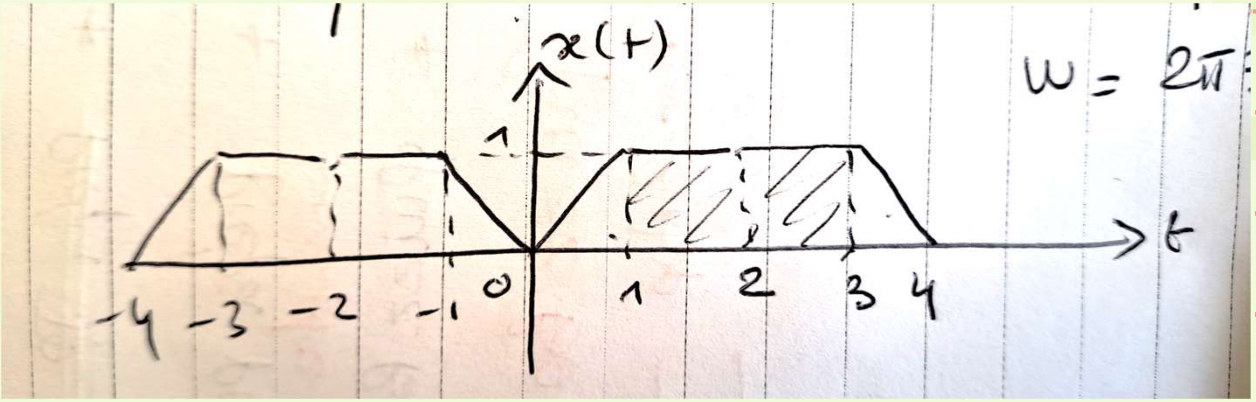
Q

Les coefficients de Fourier a_p pour p $\geq$1, s'obtiennent en calculant : $a_p = \int_0^2 x(t).\cos\left(\frac{p\pi}{2}t\right).dt$

✓1 1. VRAI — 1%

2. FAUX — 2%

Notes



$p \geq 1$

$$a_p = \frac{2}{T} \cdot \int_a^{a+T} \underbrace{x(t)}_{\text{paire} \times \text{paire} = \text{paire}} \cdot \cos(p\omega t)\, dt \qquad T = 4 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

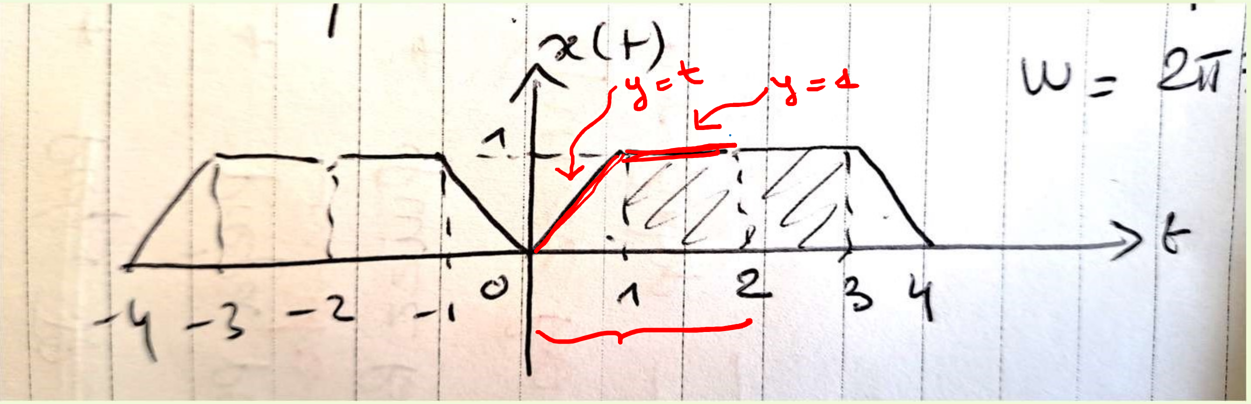
$$a_p = \frac{1}{2} \times \int_{-2}^{2} x(t) \cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) dt = 2 \times \frac{1}{2} \times \int_0^2 x(t) \cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) dt$$

$$a_p = \int_0^2 x(t) \cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) dt$$

Le coefficient de Fourier a_p pour p ≥ 1, s'obtient en calculant : $a_p = \int_0^2 x(t).\cos\left(\frac{p\pi}{2}t\right).dt$, et on a alors :

1. Aucun des résultats ci-dessous n'est juste. — 1%
2. $a_p = \frac{4}{p^2\pi^2}(\cos(p\pi) - 1)$ — 2%
3. $a_p = \frac{4}{p^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right)$ — 3%
4. $a_p = \frac{4}{p^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1\right)$ — 4%

✓4



$$a_p = \int_0^2 x(t)\cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) dt = \underbrace{\int_0^1 t\cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) dt} + \underbrace{\int_1^2 1\cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) dt}$$

IPP.

$$\begin{cases} u = t \\ v' = \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{2}{p\pi}\cdot \sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$$

$$= \frac{2}{p\pi}\cdot\left[\sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{p\pi}\cdot\left(\underbrace{\sin(p\pi)}_{=0} - \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$a_p = \frac{2}{p\pi}\cdot\left[t\cdot \sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1 - \frac{2}{p\pi}\int_0^1 \sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right) dt - \frac{2}{p\pi}\cdot \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)$$

Notes

$$a_p = \frac{2}{p\pi}\cdot\left[t\cdot\sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1 - \frac{2}{p\pi}\cdot\int_0^1 \sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)dt - \frac{2}{p\pi}\cdot\sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_p = \frac{2}{p\pi}\left(\cancel{\sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)} - 0\right) - \frac{2}{p\pi}\times\frac{2}{p\pi}\times\left[-\cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1 - \cancel{\frac{2}{p\pi}\sin}\left(p\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_p = \frac{4}{p^2\pi^2}\cdot\left[\cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1$$

$$a_p = \frac{4}{p^2\pi^2}\cdot\left(\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) \; ; \; p \geq 1$$

Q

La série de Fourier de x est donc :

1. $S(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} . \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1}{p^2} . \sin\left(\frac{p\pi}{2} t\right)$
2. $S(t) = \frac{4}{\pi^2} . \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1}{p^2} . \sin\left(\frac{p\pi}{2} t\right)$
3. $S(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} . \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1}{p^2} . \cos\left(\frac{p\pi}{2} t\right)$ ✓3
4. Aucune des solution précédente n'est juste.

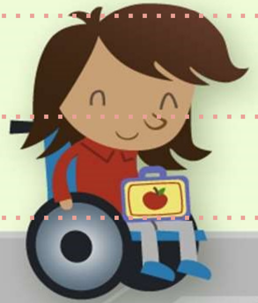
1%
2%
3%
4%

Notes $a_0 = \frac{3}{4}$; $a_p = \frac{4}{p^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1\right)$; $b_p = 0 \ \forall p \geq 1$ car x est paire.

Série de Fourier de x : $a_0 + \sum_{p\geq 1} a_p \cos(p\omega t)$

$$S_x(t) = \frac{3}{4} + \sum_{p\geq 1} \frac{4}{p^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1\right)\cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$S_x(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{p\geq 1} \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1}{p^2} \cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right)$$



Les termes pairs de la série de Fourier de x ci-dessous sont tous nuls.

$$S(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} . \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1}{p^2} . \cos\left(\frac{p\pi}{2} t\right)$$

1. VRAI — 1%
2. FAUX — 2%

Notes

$$S_x(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\cdot \underbrace{\sum_{p\geq 1} \frac{\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)-1}{p^2}\cdot \cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right)}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{1^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}_{p=1} + \underbrace{\frac{-2}{2^2}\cos\left(\pi t\right)}_{p=2} + \underbrace{\cdots\cdots}_{p=3}$$

Ou Si : $p=2k$ alors $\dfrac{\cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right)-1}{(2k)^2} = \dfrac{\cos(k\pi)-1}{(2k)^2} = \dfrac{(-1)^k-1}{4k^2}$

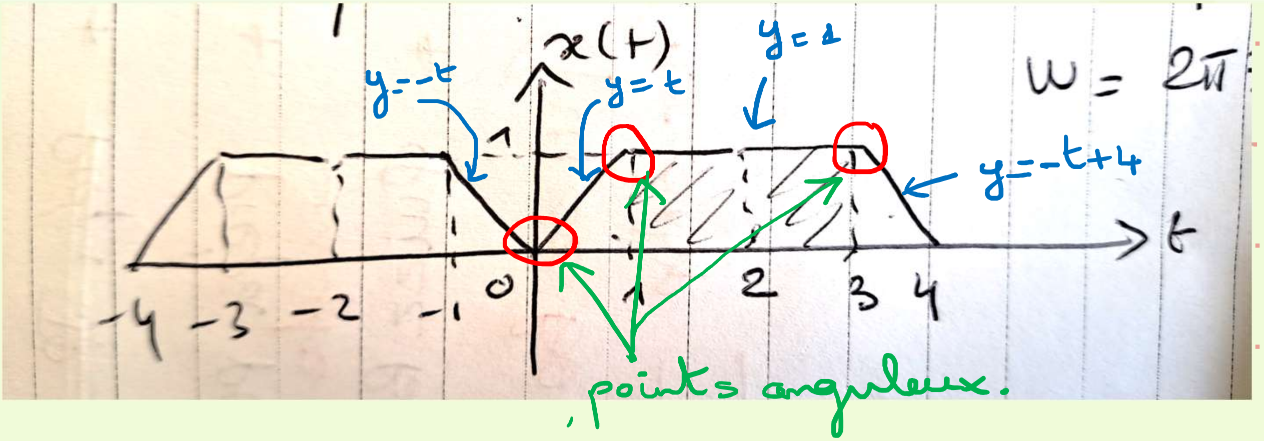
Si $p=2k+1$ alors $\dfrac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)-1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-1}{(2k+1)^2} \neq 0$

Q

Le signal x vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet car :

✓1

1. x est continue sur [0;4[et dérivable sur [0;4[sauf en 0 ; 1 et 3 où : x'(0+)=x'(1-)=1 ; x'(0-)=x'(3+)=-1 et x'(3-)=x'(1+)=0 sont finies. — 1%
2. x est continue et dérivable sur [0;4[. — 2%
3. x est continue sur [0;4[et dérivable sauf en 0 où : x'(0+)=1 et x'(0-)=-1 sont finies. — 3%
4. x est continue sur [0;4[et dérivable sur [0;4[sauf en 0 ; 1 et 3 où : x'(0+)=x'(0-)=x'(3+)=x'(1-)=1 et x'(3-)=x'(0+)=0 sont finies. — 4%



Théorème de Dirichlet : <u>hyp1</u> sur $[0;4[$ x est continue

<u>hyp2</u> sur $[0;4[$ x est dérivable sauf en 0 ; 1 et 3

où : $x'(0^-) = -1$ $\quad x'(0^+) = 1$

$x'(1^-) = 1$ $\quad x'(1^+) = 0$

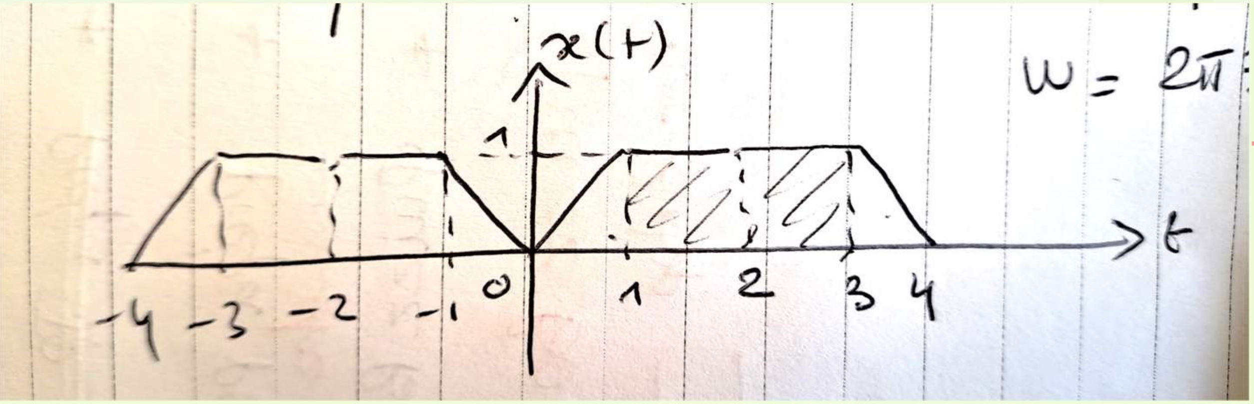
$x'(3^-) = 0$ $\quad x'(3^+) = -1$

} sont finis

La théorème de Dirichlet conclut que la série de Fourier de x converge pour toutes valeurs de t et a pour somme :

1. $S(t) = 0$
2. $S(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \text{ est entier} \\ x(t) \text{ sinon} \end{cases}$
3. $S(t) = \begin{cases} 0{,}5 \text{ si } t = 4k \\ 0 \text{ si } t = 2k+1 \\ x(t) \text{ sinon} \end{cases}$
4. $S(t) = x(t)$
5. Aucun des résultats ci-dessus n’est exact.

Réponse	
1.	1%
2.	2%
3.	3%
4.	4%
5.	5%



Théorème de Dirichlet : Concl. $S_x(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{p \geq 1} \frac{\cos(p\frac{\pi}{2}) - 1}{p^2} \cdot \cos(p\frac{\pi}{2}t)$

S_x converge et :

$S_x(t) = x(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$ car x est continue sur $\mathbb{R}$.

A partir de la conclusion du théorème de Dirichlet on peut en déduire la valeur de la série : $S = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1-cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)}{p^2}$

1. $S = -\frac{4\pi^2}{3}$ — 1%
2. $S = -\frac{3\pi^2}{16}$ — 2%
3. $S = \frac{4\pi^2}{3}$ — 3%
4. $S = \frac{3\pi^2}{16}$ — 4%

✓4

Notes

$$S_x(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{p\geq 1}\frac{\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)-1}{p^2}\cdot\cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right) = x(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$S_x(0) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{p\geq 1}\frac{\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)-1}{p^2} = x(0) = 0$$

$$\iff \sum_{p\geq 1}\frac{\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)-1}{p^2} = -\frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{4} = -\frac{3\pi^2}{16}$$

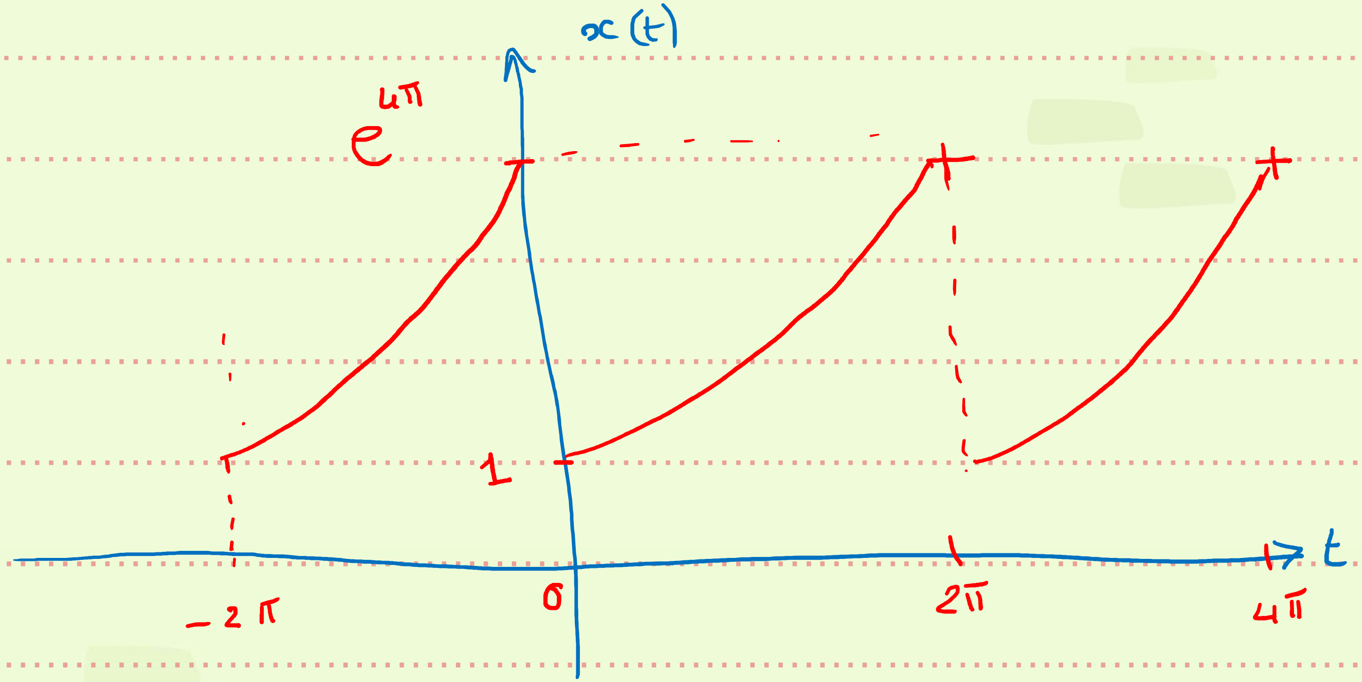
$$\iff \sum_{p\geq 1}\frac{1-\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)}{p^2} = \frac{3\pi^2}{16}$$

Exercice 2 : série de Fourier complexe

Soit x, *le signal* $2\pi -$ *périodique défini par :* $x(t) = e^{2t}$

1. x est alors impair	1%
2. x est alors pair	2%
✓3 3. x est ni pair ni impair	3%

Notes



x est ni pair, ni impair

Q

Soit $K = \frac{e^{4\pi} - 1}{\pi}$.

Les coefficients de Fourier complexes sont alors :

1. $c_p = K \frac{1 - i.p}{4 + p^2}$ — 1%

2. $c_p = K \frac{1 + i.p}{4 + p^2}$ — 2%

3. $c_p = K \frac{1 + i.p/2}{4 - p^2}$ — 3%

✓4 4. Aucun des résultats ci – dessus n′est juste — 4%

Notes $T = 2\pi \iff \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$C_p = \frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} x(t)\, e^{-jp\omega t}\, dt$$

$$C_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{2t} \cdot e^{-jpt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{(2-jp)t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2-jp} \cdot \left[e^{(2-jp)t} \right]_0^{2\pi}$$

$$C_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2-jp} \cdot \left(e^{2(2-jp)\pi} - 1 \right) = \frac{1}{2\pi(2-jp)} \cdot \left(e^{4\pi} \cdot \underbrace{e^{-2jp\pi}}_{=1} - 1 \right) \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$C_p = \frac{e^{4\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{1}{2-jp} \times \frac{2+jp}{2+jp} = \frac{e^{4\pi} - 1}{2\pi} \cdot \frac{2+jp}{4+p^2}$$

$$k = \frac{e^{4\pi} - 1}{\pi} \longrightarrow = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2+jp}{4+p^2} = k \cdot \frac{1 + j\frac{p}{2}}{p^2+4}$$

Soit $K=\frac{e^{4\pi}-1}{\pi}$. La valeur moyenne de x est donc :

1. K/4 — 1%
2. $K.\frac{e^{4\pi}}{2\pi}$ — 2%
3. $K.\frac{1}{2\pi}$ — 3%
4. Aucun des résultats ci – dessus n′est juste — 4%

Notes

$$C_p = k \cdot \frac{1+j^{p/2}}{4+p^2} \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

La valeur moyenne de x est $C_0 = k \cdot \frac{1+j\cdot 0}{4+0^2} = \frac{k}{4}$

Soit $K=\dfrac{e^{4\pi}-1}{\pi}$. $c_p = K\dfrac{1+i.p/2}{4+p^2}$

Les coefficients de Fourier réels sont alors :

1. $a_p = K\dfrac{1}{4+p^2}$ et $b_p = K\dfrac{p/2}{4+p^2}$ — 1%
2. $a_p = K\dfrac{2}{4+p^2}$ et $b_p = K\dfrac{p}{4+p^2}$ — 2%
3. $a_p = K\dfrac{2}{4+p^2}$ et $b_p = -K\dfrac{p}{4+p^2}$ — 3%
4. Aucun des résultats ci – dessus n′est juste — 4%

Notes $c_p = k \dfrac{1 + ip/2}{4 + p^2} \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}$

$$c_p = \frac{a_p - i b_p}{2} \iff a_p = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_p) \text{ et } b_p = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_p)$$

$\forall\, p \geq 1 \quad a_p = k \cdot \dfrac{2}{4+p^2} \quad$ et $\quad b_p = -k \dfrac{p}{4+p^2}$

Le signal x vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet car :

1. x est continue et dérivable sur [0;2π[. — 1%

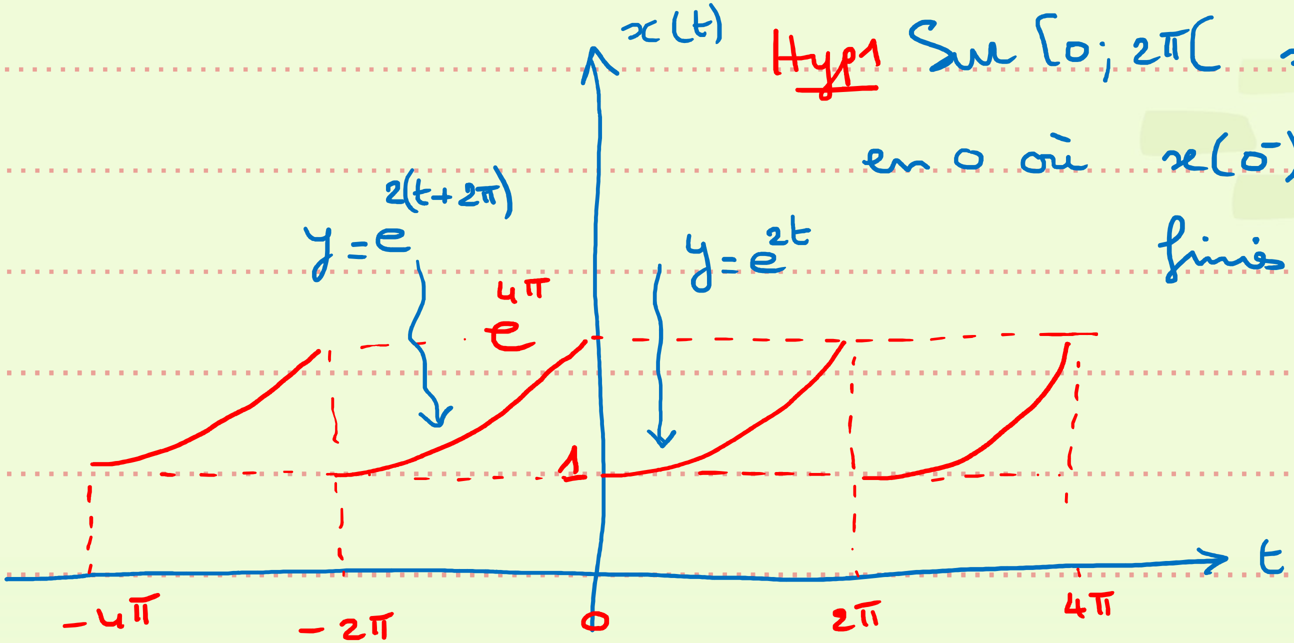
✓2 2. x est continue sur [0;2π[sauf en 0 où $x(0^-) = e^{4\pi}$ et $x(0^+)$=1
x est dérivable sur [0;2π[sauf en 0 où $x'(0^-) = 2e^{4\pi}$ et $x'(0^+)$=2 — 2%

3. x est continue sur [0;2π[sauf en 0 où $x(0^-) = 1$ et $x(0^+)$=1
x est dérivable sur [0;2π[sauf en 0 où $x'(0^-) = 2$ et $x'(0^+)$=2 — 3%

4. x est continue sur [0;2π[sauf en 0 où $x(0^+) = e^{4\pi}$ et $x(0^-)$=1
x est dérivable sur [0;2π[sauf en 0 où $x'(0^+) = 2e^{4\pi}$ et $x'(0^-)$=2 — 4%

5. x est continue sur [0;2π[sauf en 0 où $x(0^+) = 1$ et $x(0^-)$=1
x est dérivable sur [0;2π[sauf en 0 où $x'(0^+) = 2$ et $x'(0^-)$=2 — 5%

Notes



Hyp1 Sur $[0; 2\pi[$ x est continue sauf en 0 où $x(0^-) = e^{4\pi}$ et $x(0^+) = 1$ tout finis

Hyp2 Sur $[0; 2\pi[$ x est dérivable sauf en 0 où

$x'(0^-) = 2e^{4\pi}$

$\left(e^{2(t+2\pi)}\right)' = 2e^{2(t+2\pi)}$

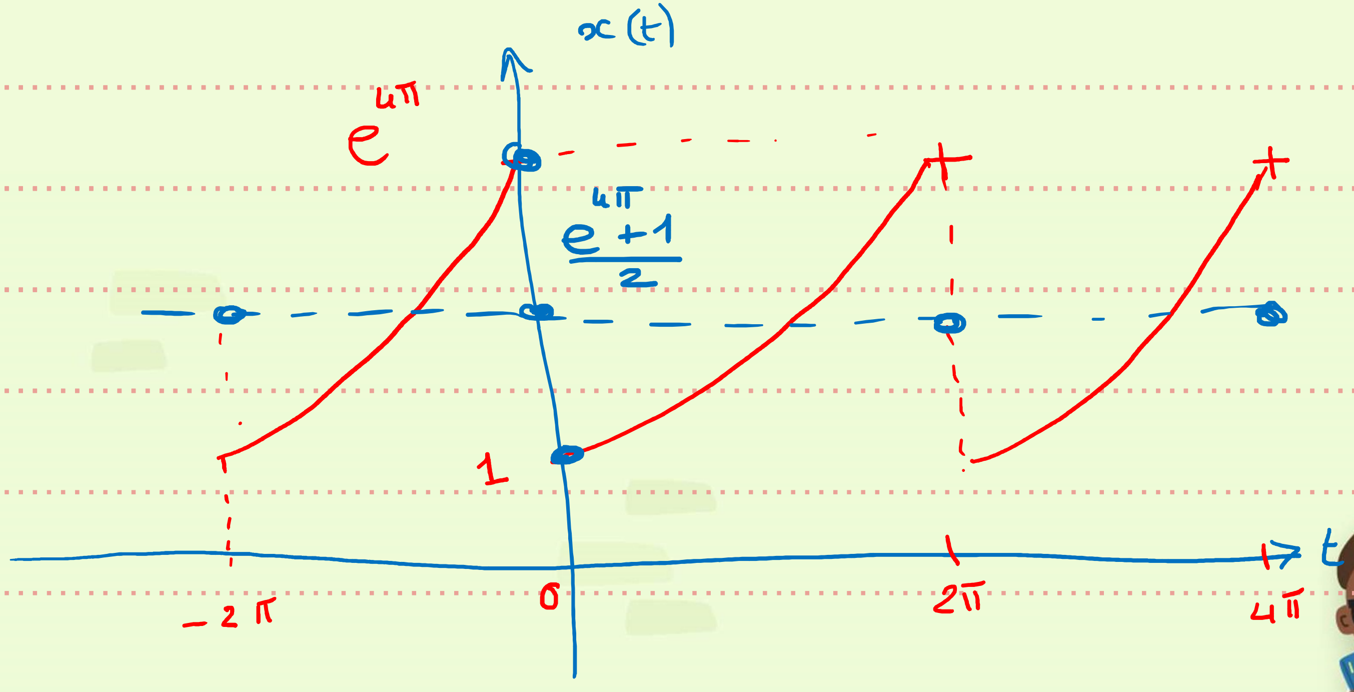
$x'(0^+) = 2$

$\left(e^{2t}\right)' = 2e^{2t}$

La théorème de Dirichlet conclut que la série de Fourier de x converge pour toutes valeurs de t et a pour somme :

1. $S(t) = e^{2t}$ — 1%
2. $S(t) = \begin{cases} 0{,}5 \ si \ t = k\pi \\ x(t) \ sinon \end{cases}$ — 2%
3. $S(t) = \begin{cases} -0{,}5 \ si \ t = 2k\pi \\ x(t) \ sinon \end{cases}$ — 3%
4. $S(t) = \begin{cases} \frac{e^{4\pi}+1}{2} \ si \ t = 2k\pi \\ e^{2t} \ sinon \end{cases}$ — 4%
5. Aucun des résultats ci-dessus n'est exact. — 5%

Notes Concl. th. de Dirichlet : la série de Fourier de x converge et a pour somme : $S_x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{e^{4\pi}+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$



x est ni pair, ni impair