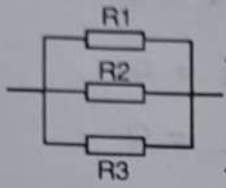
Nom : .... **Prénom :** .... **Groupe :** ......

Durée : 1h30min. Calculatrice : Collège Documents : aucun Répondre sur le sujet
Le barème est approximatif

Exercice 1 Calculs de base (3 pts)

1) La résistance équivalente de trois résistances en parallèle est donnée par : $\frac{1}{R_e} = \underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{R_3}$. Déterminer l'expression simplifiée de R_e.



$$\frac{1}{Re} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$= \frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1R_2R_3} + \frac{R_1R_2}{R_1R_2} \cdot \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{Re} = \frac{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$

La résistance équivalente de trois résistances en parallèle est

donc: $Re = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_3+R_2R_3+R_1R_2}$

2) Sur la notice d'un capteur de pression, on peut lire quelques valeurs repères :

Pression en hecto Pascal	Tension de sortie en Volt
P_1 = 0 hPa	Us_1 = 4 V
P_2 = 1000 hPa	Us_2 = 2 V
P_3 = 1250 hPa	Us_3 = ...

a) Compléter ce tableau, on pourra expliquer succintement les calculs ci-dessous :

Les deux grandeurs P et Us ne sont pas équivalents car à P=0 il correspond $Us = 4 \neq 0$

ΔP et ΔUs sont proportionnelle

ΔP	ΔUs
$P_2-P_1 = 1000$	$-2 = Us_2-Us_1$
$P_3-P_1 = 1250$	$Us_3-4 = Us_3-Us_1$

donc: $Us_3 - 4 = \frac{-2\times1250}{1000} = -2{,}5$

$\Longleftrightarrow Us_3 = 4-2{,}5 = \boxed{1{,}5\ V}$

b) Déterminer l'expression de la tension de sortie U_s en fonction de la pression P :

D'après ce qui précède : $Us = aP+b$

$a = \frac{Us_2-Us_1}{P_2-P_1} = \frac{-2}{1000} = -2.10^{-3}$ et pour b : $Us_1 = a.P_1+b$

$\Longleftrightarrow 4 = b$

Donc $\boxed{Us = -2.10^{-3}.P+4}$

Exercice 2 : Trigonométrie (12 pts)

1) Résoudre l'équation : $2.\sin^2(x) + 5\cos(x) - 4 = 0$ (On pourra d'abord exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos^2(x)$)

On sait que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

alors $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

L'équation devient alors : $2(1-\cos^2 x) + 5\cos x - 4 = 0$

$\Longleftrightarrow 2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$

$\Longleftrightarrow -2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$

On pose $X = \cos x$ et on résout : $-2X^2 + 5X - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(-2)(-2) = 25 - 16 = 9 > 0$

$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$

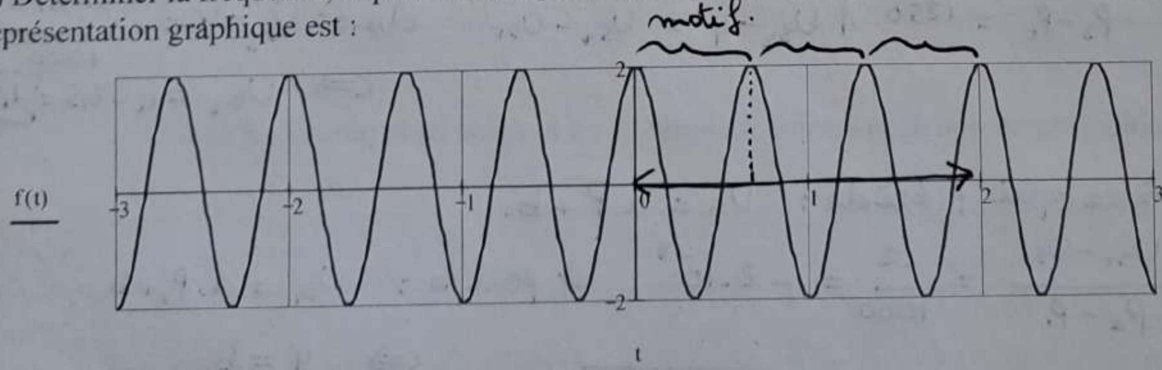
On résout alors les équations : ① $\cos x = 2$ qui est impossible puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$

et ② $\cos x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\boxed{S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

2) Simplifier $\sin(\theta + \frac{7\pi}{2}) = \sin\theta \cdot \underbrace{\cos\frac{7\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\sin\frac{7\pi}{2}}_{=-1} \cos\theta = -\cos\theta$

3) Déterminer la fréquence, la période, l'amplitude, puis l'expression de la fonction f, dont la représentation graphique est :



On compte 3 motifs sur une durée de 2 secondes. Donc la fréquence est égale à : $f = \frac{3}{2}$ Ainsi $T = \frac{1}{f} = \frac{2}{3}$. De plus, $\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{3}{2} = 3\pi$

$A = 2$ Il n'y a pas de déphasage : $t_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$

L'expression du signal est donc $f(t) = 2 \cos(3\pi t)$

4) Compléter :

$\left(\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 5 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

5) Calculer à l'aide d'une intégrale la valeur moyenne de la fonction u, définie par : $u(t) = \sin(3t + \frac{\pi}{4})$

On déterminera d'abord la période de u :

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$

$V_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\,dt = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \frac{3}{2\pi} \left[\frac{-\cos(3t + \frac{\pi}{4})}{3}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}$

$= \frac{3}{2\pi} \left(\frac{-\cos\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}{3} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3} \right)$

$= \frac{3}{2\pi} \times \frac{1}{3} \times \left(-\underbrace{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)}_{= \cos \frac{\pi}{4}} + \cos \frac{\pi}{4} \right) = 0$ $\boxed{V_{moy} = 0}$

6) a) Linéariser $\sin^2(\theta)$ en partant de la formule $\cos(2\theta)$

$\cos(2\theta) = \cos\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \sin\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, alors $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

On obtient alors : $\cos(2\theta) = 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

Ainsi : $-2\sin^2\theta = \cos(2\theta) - 1$ et $\sin^2\theta = \frac{\cos(2\theta) - 1}{-2} = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$

6) b) Simplifier $\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$

En déduire sina.cosb = $\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

6) c) A l'aide des formules obtenues aux deux questions précédentes, linéariser $\sin^3(\theta)$:

$\sin^3\theta = \sin\theta \times \sin^2\theta = \sin\theta \times \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin\theta - \sin\theta \cos(2\theta)\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\theta - \frac{1}{2}\left(\sin(\theta+2\theta)+\sin(\theta-2\theta)\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sin\theta - \frac{1}{2}\sin(3\theta) - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(-\theta)}_{=-\sin\theta}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\sin(3\theta)\right)$

car sin est impaire

$\boxed{\sin^3\theta = \frac{1}{4}\left(3\sin\theta - \sin(3\theta)\right)}$

Exercice 3 Nombres complexes (5 pts)

1) Compléter le tableau ci-dessous :

$\underline{Z}$	Re($\underline{Z}$)	Im($\underline{Z}$)	Z	Arg($\underline{Z}$)	Ecriture	Conjugué de $\underline{Z}$ exponentielle et algébrique
$-1-j\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}$ $=\sqrt{4}=2$	$\arctan(\sqrt{3})-\pi$ $=\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$	exponentielle $2.e^{-2j\pi/3}$	$\underline{Z}^*=-1+j\sqrt{3}$ $\underline{Z}^*=2e^{2j\pi/3}$
$4.e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$4\cos(-\pi/4)$ $=4\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$	$4\sin(-\pi/4)$ $=-4\frac{\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}$	4	$-\frac{\pi}{4}$	algébrique $2\sqrt{2}-j2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}(1-j)$	$\underline{Z}^*=4e^{j\pi/4}$ $\underline{Z}^*=2\sqrt{2}+j2\sqrt{2}$

2) Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et un argument de :
$\underline{T}(\omega) = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}$ où R, L, C et ω sont des nombres réels strictement positifs.

$\underline{T}(\omega) = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} = \frac{jL\omega \times (R-jL\omega)}{(R+jL\omega)\times(R-jL\omega)} = \frac{jRL\omega - j^2L^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}$

$\underline{T}(\omega) = \frac{L^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} + j\frac{RL\omega}{R^2+L^2\omega^2} \Leftrightarrow \begin{cases} Re(\underline{T}(\omega)) = \frac{L^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} \\ Im(\underline{T}(\omega)) = \frac{RL\omega}{R^2+L^2\omega^2} \end{cases}$

$|\underline{T}(\omega)| = \frac{|jL\omega|}{|R+jL\omega|} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$ et $\arg(\underline{T}(\omega)) = \arg(jL\omega) - \arg(R+jL\omega)$

$\arg(\underline{T}(\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$

(car $L\omega>0$)