Application (voir dernier slide du cours).

la série d'observation est donnée par :

$\{0,04 ; 6,2 ; 6,3 ; 7,1 ; 7,2 ; 8,6 ; 9,8 ;$
$9,9 ; 10,5 ; 10,9 ; 11,1 ; 11,4 ; 11,7 ;$
$11,7 ; 12,2 ; 12,4 ; 12,8 ; 13,3 ; 14,5 ;$
$14,7\}$

$Q_1 = 7,2$ (comprend 25% des observations)

$Q_2 =$ médiane $= 11$

$Q_3 = 12,2$ (comprend 75% des observation)

$\Rightarrow \quad Q_1 = \frac{1}{4} \times 20 = 5$

$\quad\quad Q_3 = \frac{3}{4} \times 20 = 15$

la moyenne arithmétique $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\bar{x}_{20} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 10,16$$

le mode de cette série est égal à :

11,7.

$\Rightarrow$ mode $>$ médiane $>$ moyenne.

On peut en conclure que la distribution est oblique à droite (ou étalée à gauche)

Coefficient de Yule $= s = \dfrac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$

$s = -0{,}52 < 0$:

étalement à Gauche (ou oblique à droite)

Coefficient de Pearson :

$s = \dfrac{10{,}16 - 11{,}7}{3{,}456} = -0{,}31$:

étalement à Gauche (ou oblique à droite)

Coefficient de Pearson $B_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$

$\mu_3 = -47{,}07 < 0 \Rightarrow$ "étalement à gauche"

$\mu_2 = 11{,}45 > 0$

$B_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3 = (-47{,}07)^2 / (11{,}45)^3$

$B_1 = 1{,}477$

Exercice type "partiel"

Soit la répartition des salariés par tranche de salaire :

Classe i	classes de salaires	Effectifs n_i
1	[1200 ; 1400 [	3
2	[1400 ; 1600 [	6
3	[1600 ; 1800 [	18 2
4	[1800 ; 2000 [	5
5	[2000 ; 2200 [	4

1) Quel est l'effectif total de l'entreprise ?

2) Calculez les centres de classes (x_i) ; les amplitudes de classes (a_i) ; les fréquences (f_i), les fréquences cumulées F_i, la masse salariale $n_i x_i$, le rapport $\frac{n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}$, le rapport $\sum_{i=1}^{5} \frac{n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}$

3) Calculer le salaire moyen

4) Déterminer la classe modale et la valeur du mode.

5) Déterminer l'étendue de la variable étudiée

6) Déterminer la classe médiane et calculer la valeur de la médiane

7) Au regard des valeurs prises par les caractéristiques de tendance centrale précédemment calculées, que peut-on en déduire quant à la gamme de la distribution des salaires au sein de l'entreprise considérée ?

8) Déterminer la classe médiale (ici le calcul est basé sur $n_i x_i$ et non n_i) et déterminer la valeur de la médiale ?

9) Calculez le rapport :

(Médiale - médiane) / Etendue

Que peut-on en conclure quant à la concentration des salaires dans cette entreprise ? Ce résultat était-il prévisible ? pourquoi ?

Réponses

1) L'effectif total de l'entreprise est donné par : $N = \sum_{i=1}^{5} n_i = 3 + 6 + \dots + 4 = 200$

2) Voir ci-dessous :

Classes salaires	x_i	a_i	f_i	F_i	$n_i x_i$	$\frac{n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}$
[1200; 1400[	1300	200	0,015	0,015	3900	0,011
[1400; 1600[	1500	200	0,03	0,045	9000	0,027
[1600; 1800[	1700	200	0,91	0,455	309 400	0,909
[1800; 2000[	1900	200	0,025	0,98	9500	0,028
[2000; 2200[	2100	200	0,02	1	8400	0,025
Total			1		1	1

$\dfrac{\sum_{i=1}^{s} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}$

0,011

0,038

0,947

0,975

1

3) $\bar{x} = \frac{1}{200} \times 340200 = 1701$

4) la classe modale est la classe pour laquelle l'effectif (ou la fréquence) est le plus élevé, il s'agit en conséquence de la classe $[1600 ; 1800[$. La valeur du mode est donnée par la formule :

$$\text{mode} = e_{i-1} + a_m \times \frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

où e_{i-1} désigne la valeur de l'extrémité inférieure de la classe modale (1600)

a_m l'amplitude de cette même classe (200), d_1 la différence entre l'effectif de la classe modale (182) et l'effectif de la classe précédente et d_2 la différence entre l'effectif de la classe modale (182) et l'effectif de la classe suivante.

$$\text{mode} = 1600 + 200 \times \frac{(182 - 6)}{(182 - 6) + (182 - 5)}$$

$$= 1699,72$$

5) Etendue = 2200 − 1200 = 1000

étendue des salaires égale à 1000 euros

6) Classe médiane : [1600; 1800[

la valeur de la médiane est :

$$\text{Médiane} = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} \times [0,5 - F_{i-1}]$$

ou $e_{i-1} = 1600$; $a_i = 200$; $f_i = 0,91$

$F_i = 0,045$

$$\text{médiane} = 1600 + \frac{200}{0,91} \times [0,5 - 0,045]$$
$$= 1700$$

7) Trois caractéristiques de tendance centrale ont été calculées :

$\bar{x} = 1701$ mode $= 1699,72$ médiane $= 1700$

Ces trois valeurs étant très proches, on en déduit que la distribution des salaires au sein de l'entreprise est symétrique.

8) La détermination de la classe médiale est similaire à celle de la classe médiane le calcul étant basé non plus sur les seuls effectifs n_i mais sur le produit $n_i x_i$ représentant la masse salariale. Par un raisonnement identique et au regard des valeurs obtenues dans la dernière colonne du tableau ci-dessus, on en déduit que la classe médiale est la classe [1600 ; 1800[. De même, la

valeur de la médiale notée Ml et exprimée en euros, est donnée par :

$$Ml = 1600 + \frac{200}{0,909} \times [0,5 - 0,038] = 1701,65$$

9) On constate que les valeurs de la médiane et de la médiale sont très proches. Plus précisément on a :

$$\frac{Ml - M}{\text{étendue}} = \frac{1701,65 - 1700}{1000} = 0,00165$$

le rapport calculé est très proche de 0, l'écart entre la médiale et la médiane étant très faible par rapport à l'étendue. Cela correspond à une concentration nulle de salaires, i-e à une parfaite équipartition. Ce résultat était prévisible au regard des données figurant dans le tableau : la distribution fait en effet ressortir

que la moyenne est très proche de 1700
euros témoignant d'une très faible
dispersion des salaires autour du
salaire moyen